저속 압축성 유동에서 예조건화 방법을 이용한 수렴성 증진에 대한 연구

이 재 은*1, 박 수 형*2, 권 장 혁*3

A Study of Convergence Enhancement Using Preconditioning Methods at Two Dimensional Compressible Low Speed Flows

J. E. Lee, S. H. Park and J. H. Kwon

It is well known that preconditioning methods are efficient for convergence acceleration at compressible low Mach number flows. In this study, the original Euler equations and three preconditioners nondimensionalized differently are implemented in two dimensional inviscid bump flows using the 3rd order MUSCL and DADI schemes as flux discretization and time integration respectively. The multigrid and local time stepping methods are also used to accelerate the convergence. The test case indicates that a properly modified local preconditioning technique involving concepts of a global preconditioning one produces Mach number independent convergence. Besides, an asymptotic analysis for properties of preconditioning methods is added.

Key Words: 예조건화기법(Preconditioning Method), 저속 유동(Low Speed Flow), Euler Equation, 수렴성 증진(Convergence Enhancement), 압력 보정(Pressure Correction), 점근 해석(Asymptotic Analysis)

1. 서 론

수년 동안 많은 연구자들이 초음속에서 아음속까지의 넓은 속도 영역의 유동장을 하나의 flow solver로 해석하려고 노력했다. 특히 저속(M=0.1이하)영역에서 압축성 algorithm의 수렴성 악화에 대한 문제는 자주 거론되어 왔다.[1-11] 이는 Jacobian 행렬의 고유치들 중 최대 고유치와 최소 고유치의 비가 저마하수에서 커짐으로 인해 최소 고유치의 영향에 의해 수렴성이 나빠지거나 더 이상 수렴하지 않는(stiff)특성을 가지기 때문으로 알려져 있다.[1]

시간항 예조건화 기법 (time-derivative preconditioning method) 은 정상상태 해를 구할 때 시간항에 예조건화 행렬(preconditioning matrix)을 곱하여 고유치들의 비를 인위적으로 조절하여 수렴성 증진을 얻을 수 있는 방법이다.[2,3] 또한, 높은 받음각을 가진 익형과 같은 전체 유동장은 초음속이지만 부분적으로 저속 영역을 포함하고 있는 경우나 노즐, 터빈과 같이 강한 열원에 의한 온도변화가 존재하는 저속유동 등과 같은 경우를 해석할 때 기존의 비압축성 방정식(incompressible equation)으로는 한계가 있다고 알려져 있다.[4]

예조건화 기법을 local preconditioning 기법과 global preconditioning 기법으로 나눌 수 있는데 대부분의 예조건화 기법이 전자에 속한다. Local preconditioner는 예조건화 행렬의 변수로 국지적 유

*1 학생회원, 한국과학기술원, 항공우주공학전공
*2 Louisiana State University Center for Computation and Technology, Research Associate
*3 종신회원, 한국과학기술원, 항공우주공학전공
*E-mail : LeeJaeeun@kaist.ac.kr ,jhkwon@kaist.ac.kr

동변수를 사용한다. 그러나 점성이나 비정상 유동해석 시 정체점(stagnation point)에서의 특이성(singularity)제거를 위한 제한자(limiter) 구성에 고려되어져야 할 인자들이 늘어나는 단점이 있다.[2,3] Global preconditioner는 주로 Briley에 의해 개발되었는데 자유류의 마하수를 이용하여 algorithm 전반적으로 고정된 값을 사용한다. 이는 위에서 언급한 local preconditioner의 단점을 보완한다 할 수 있지만 하나의 유동영역에 다양한 마하수의 분포가 존재하는 복잡한 유동의 경우 정확도와 효율성에서 문제가 된다.[5,6]

본 연구에서는 Weiss and Smith의 local preconditioner[3]와 Briley의 global preconditioner[5,6]를 살펴보고 전자를 기본으로 하여 후자에 이용된 개념을 사용한 WSBR preconditioner를 구성하였는데, 결과적으로 local preconditioner와 유사한 수치 해를 가지면서 global preconditioner의 수렴특성을 보인다. Reed 등이 Choi and Merckle의 preconditioner를 이용하여 유사한 결과를 낸 바 있다.[1]

저속유동에 대한 asymptotic analysis의 결과에 의하면 운동방정식의 압력 항이 특이성(singularity)을 가지게 되므로 이 항에서 hydrodynamic pressure를 직접적으로 반영해야 한다.[7,12,13] 비점성 bump 유동에 대하여 압력보정 전후 각 preconditioner의 수렴성과 각 원시변수벡터에서 유동변수들의 정확도를 살펴보고 global preconditioner에서 밀도항의 해상도문제를 점근 해석(asymptotic analysis)을 이용하여 추론했다.

2. 무차원화

보통 유체역학에서 지배방정식을 무차원화된 형태로 사용하게 되는데 이는 수렴특성에도 영향을 미친다. 본 연구에서는 세 가지 종류의 예조건화 기법에 각각 다른 무차원화변수를 사용했다. 무차원화된 변수를 표시하는 (˜) 기호는 2장과 5.3.2절에서만 사용하고 다른 장에서는 생략하기로 한다.

2.1 A local preconditioner

$$\tilde{\rho}=\frac{\rho}{\rho_r},\ (\tilde{u},\tilde{v})=\frac{(u,v)}{\sqrt{p_r/\rho_r}},\ \tilde{p}=\frac{p}{p_r},\ \tilde{T}=\frac{T}{T_r}$$
$$(\tilde{x},\tilde{y})=\frac{(x,y)}{L_r},\ \tilde{t}=\frac{t}{L_r/\sqrt{p_r/\rho_r}},\qquad (1)$$
$$\tilde{E}=\frac{E}{p_r/\rho_r},\ \tilde{H}=\frac{H}{p_r/\rho_r}$$

식 (1)의 변수들로 무차원화된 상태방정식과 총엔탈피는 식 (2)-(3)과 같다.

$$\tilde{p}=\tilde{\rho}\tilde{T} \qquad (2)$$

$$\tilde{H}=\frac{\tilde{c}^2}{(\gamma-1)}+\tilde{\phi},\quad \tilde{\phi}=\frac{\tilde{u}^2+\tilde{v}^2}{2} \qquad (3)$$

2.2 A global preconditioner

$$\tilde{\rho}=\frac{\rho}{\rho_r},\ (\tilde{u},\tilde{v})=\frac{(u,v)}{u_r},\ \tilde{p}=\frac{p}{\rho_r u_r^2},\ \tilde{T}=\frac{T}{T_r}$$
$$(\tilde{x},\tilde{y})=\frac{(x,y)}{L_r},\ \tilde{t}=\frac{t}{L_r/u_r},\ \tilde{E}=\frac{E}{h_r},\ \tilde{H}=\frac{H}{h_r} \qquad (4)$$

Global precondtioner에서는 저속에서 총엔탈피의 손실을 피하기 위해 기준엔탈피(reference enthalpy) $h_r=C_pT_r$과 Eckardt 수 $E_c=U_r^2/h_r=(\gamma-1)M_r^2$가 도입되고 이로 인해 총엔탈피와 총에너지는 $H=E+Ep/\rho$의 관계가 된다.[5]

상태방정식과 총엔탈피는 식 (5)-(6)으로 나타난다.

$$\tilde{p}=\frac{\tilde{\rho}\tilde{T}}{\gamma M_r^2}=\frac{\tilde{\rho}\tilde{c}^2}{\gamma},\ \tilde{c}^2=\frac{\tilde{T}}{M_r^2} \qquad (5)$$

$$\tilde{H}=M_r^2[\tilde{c}^2+(\gamma-1)\tilde{\phi}] \qquad (6)$$

2.3 The WSBR preconditioner

본 연구에서 고안한 WSBR preconditioner에 대한 소개는 3장에 하기로 하고 먼저 식 (1)과 식 (4)의 무차원화와 다른 종류의 무차원화 변수를 소개한다.[14]

$$\tilde{\rho}=\frac{\rho}{\rho_r},\ (\tilde{u},\tilde{v})=\frac{(u,v)}{u_r},\ \tilde{p}=\frac{p}{\rho_r u_r^2},\ \tilde{T}=\frac{T}{T_r}$$
$$(\tilde{x},\tilde{y})=\frac{(x,y)}{L_r},\ \tilde{t}=\frac{t}{L_r/u_r},\ \tilde{E}=\frac{E}{u_r^2},\ \tilde{H}=\frac{H}{u_r^2} \qquad (7)$$

식 (7)에서 2.1절과 다르면서 수렴특성에 중요한 역할을 하는 것은 $\rho_r u_r^2$으로 무차원화한 압력항이고 이 항의 역할은 5장에서 점근 해석(asymptotic analysis)과 더불어 설명하기로 한다. 식 (4)와 같이 총엔탈피와 총에너지를 무차원화하는 변수로 기준엔

탈피(reference enthalpy)를 사용하게 되면 고유치(eigen value)와 고유치벡터행렬(eigen vector)로 구성된 eigensystem이 복잡해진다. 상태방정식은 식(5)와 같고 총엔탈피는 식 (3)과 같다.

3. 예조건화 기법

3.1 Local preconditioner와 Global preconditioner

Local preconditioner에서 소개된 예조건화 행렬 Γ에서 제한자 역할을 하는 U_r 은 식 (8)과 같다.[3]

$$U_r = min\left[c, \max\left(|U|, KU_{cut}, \frac{\mu}{\rho\Delta d}, \sqrt{\frac{|p|}{\rho}}\right)\right] \quad (8)$$

$p' = p - p_\infty$, $U_{cut} = min(U_\infty, c_\infty)$ 은 수정된 항들이다.[8,15]

Global preconditioner는 Γ_q라는 대각행렬을 예조건화 행렬로 사용하는데 $\beta_{br} = min(1, M_r^2)$ 이 초음속과 아음속에서 eigensystem의 전환역할을 하고 저속에서는 global preconditioner의 특징인 기준 마하수(reference Mach number)가 된다. Global preconditioner의 system matrix $\Gamma_q a$는 local preconditioner에 비해 매우 간단한 변수로 구성된다.[5,6]

원시변수벡터의 유동변수로 local preconditioner는 압력, 속도, 온도를, global preconditioner는 밀도, 속도, 압력을 사용한다.[3,5]

3.2 The WSBR preconditioner

본 연구에서 고안한 WSBR preconditioner는 local preconditioner를 기본으로 하고 2.3절에서 설명한 무차원화 방법을 사용한다. 예조건화된 지배방정식, 예조건화 행렬 Γ, 원시변수벡터행렬은 local preconditioner와 같고 상태방정식과 system 행렬 $\Gamma^{-1}AM$, eigensystem은 global preconditioner와 유사한 특징을 가지고 있다.

$$\Gamma^{-1}AM = \begin{bmatrix} \beta_{wb}u & \frac{\rho T\beta_{wb}}{M_r^2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ \frac{uM_r^2(\gamma-1)(\beta_{wb}-1)}{\rho} & T\beta_{wb}(\gamma-1) & 0 & u \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\lambda(\Gamma^{-1}AM) = \{u, u, u'+c', u'-c'\}$$
$$u' = u(1-\alpha)$$
$$c' = \sqrt{\alpha^2u^2 + U_r^2} \quad (10)$$
$$\alpha = \frac{(1-\beta_{wb}U_r^2)}{2}$$

$$\beta_{wb} = \frac{1}{c^2} = \frac{1}{\gamma RT} \quad (11)$$

4. 수치해석기법

4.1 공간 이산화 기법

격자중심의 유한 체적법을 사용하여 예조건화된 지배방정식을 공간 이산화 한다. $F_{i+1/2}$는 각각의 격자 경계면에서 계산된 수치 유속을 의미하고 식(12)와 같다.

일반적으로 비점성 유동이나 점성항의 영향이 적은 경우 저속 유동장에서도 적절한 상류차분법이 필요하다. 예조건화 된 지배 방정식의 eigensystem은 예조건화 행렬에 의해 보정되고 따라서 Roe's FDS를 적용할 때 인공점성항에 이 효과를 반영해야 저속에서 해의 정확도를 보장할 수 있다.[3]

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2}(F_R + F_L) - \frac{1}{2}\Gamma|A_\Gamma|\Delta Q \quad (12)$$

$$A_\Gamma = \Gamma^{-1}AM, \ |A_\Gamma| = X|\Lambda_\Gamma|X^{-1} \quad (13)$$

$$\Lambda_\Gamma = diagonal(u, u, u'+c', u'-c') \quad (14)$$

단순한 상류차분법만 적용하는 경우 수치 기법의 공간 정확도는 1차가 되고 보다 정확한 해를 얻기 위해서 3차 정확도의 MUSCL(Monotone Upstream Centered for Conservation Laws)기법을 적용한다. MUSCL기법을 적용할 때 유동변수로서 비보존변수들을 보정하고 보존변수들을 계산했다.[9]

4.2 시간 전진 기법

본 연구에서 사용한 시간전진 기법은 Multigrid기법이 적용된 DADI(Diagonalized Alternate Directional Implicit)기법이다.[16,17]

$$X_{\Gamma\xi}[I + \Delta t\{\nabla^-\Lambda_{\Gamma\xi}^+ + \nabla^+\Lambda_{\Gamma\xi}^-\}]X_{\Gamma\xi}^{-1} \cdot$$
$$X_{\Gamma\eta}[I + \Delta t\{\nabla^+\Lambda_{\Gamma\eta}^- + \nabla^-\Lambda_{\Gamma\eta}^+\}]X_{\Gamma\eta}^{-1} \cdot \quad (15)$$
$$\Delta Q = -\Delta t\Gamma^{-1}R$$

식 (15)는 DADI기법의 최종식이고 $\nabla^\pm$는 각각 전후방 차분을 의미하며 X_Γ와 Λ_Γ는 예조건화된

system matrix A_Γ의 고유치벡터행렬(eigen vetor), 고유치(eigen value)행렬을 표기한다.[8,18]

정상상태 해를 구할 때 각 계산 격자마다 다른 시간 간격을 적용해 최대의 시간 간격을 사용하도록 하는 국소 시간 간격(local time stepping)을 적용했고 이 때 속도와 음속은 예조건화 기법에 의해 보정된 수치를 사용해야 한다.[9]

5. Asymptotic Analysis

5.1 해석 과정

점근 해석(asymptotic analysis)은 복잡한 문제의 간단한 해석적 형태의 근사 해를 얻기 위해 사용되는, 응용수학에서 매우 강력한 도구이고 수치해석에서도 유용하게 사용된다. 여기서는 논문[7]을 토대로 다음과 같은 절차로 해석했다.

1) 지배방정식의 준이산화(semi-discretization)
2) 무차원화
3) 모든 변수들을 마하수의 수열로 정리하여 대입
$(*)=(*)^{(0)}+M_r(*)^{(1)}+M_r^2(*)^{(2)}+\cdots$
4) 마하수의 order에 맞게 각 항들을 정리

5.2 압력 보정

Guillard and Viozat[7]은 점근 해석을 이용하여 연속방정식에서 압력항이 마하수의 제곱의 크기로 해석되지만, 예조건화 되지 않은 Roe's FDS에서는 압력항이 마하수 1승의 크기로 해석이 되고 예조건화 기법을 적용하면 압력항이 보정되어 저속에서 수치해의 정확도를 보장한다고 설명했다.

$$p(x,t)=P^{(0)}(t)+M_r^2p^{(2)}(x,t) \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^{(0)}+\nabla\cdot(\rho^{(0)}\hat{u}^{(0)})=0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^{(0)}\hat{u}^{(0)}+\nabla\cdot(\rho^{(0)}\hat{u}^{(0)}\cdot\hat{u}^{(0)})+\nabla p^{(2)}=0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^{(0)}+\nabla\cdot(\rho^{(0)}\hat{u}^{(0)})=0 \tag{19}$$

연속적(continuous) 형태의 지배방정식을 $O(1)$의 방정식만으로 정리하면 식 (16)-(19)와 같고 이 때 식 (16)에서 $P^{(0)}$가 상수로 열역학적 압력이라 한다면 $p^{(2)}$는 hydrodynamic 압력으로 마하수 제곱의 크기를 가진다.[7,12,13] 기본적 개념은 같으나 수치기법에 적용할 때 참고문헌 [2,4]에서는 마무리오차(round-off error) 제어를 목적으로 게이지 압력(gauge pressure)을 사용한다. 식 (18)에서 알 수 있듯이 운동방정식에서 압력의 보정은 수렴가속의 중요한 역할을 한다. 특히 식 (20)-(21)을 살펴보면 식 (4)와 식(7) 에서 사용한 압력항의 무차원화 방법은 압력계수의 형태를 가지고 있어서 Mach number independent의 수렴특성에 기여한다고 설명할 수 있다.[1]

$$p'=\bar{p}-\bar{p}_r,\ \bar{p}=\frac{p}{\rho_r u_r^2}=\frac{1}{M_r^2}\frac{p}{p_r},\ \bar{p}_r=\frac{1}{\gamma M_r^2} \tag{20}$$

$$p'=\frac{p-p_r}{\rho_r u_r^2}=\frac{C_p}{2} \tag{21}$$

5.3 인공점성항에 대한 해석

6장에서 보여주는 비점성 bump 유동의 수치계산 결과를 살펴보면 Weiss and Smith의 local preconditioner와 WSBR preconditioner의 마하수가 10^{-7}인 경우를 제외하고 유동변수들의 수치해가 잘 해상되는 반면 global preconditioner의 결과에서는 밀도의 해상에 문제가 있음을 볼 수 있다. 저속영역($M\le 0.1$) 에서 그 특징이 나타나는데 비보존변수 중의 하나인 밀도의 정확도가 떨어지므로 밀도와 온도로 계산하는 온도 역시 문제가 있게 된다.

본 연구에서는 대략적인 점근 해석을 통해 원인을 규명했다.

5.3.1 각 예조건화 기법의 인공점성항

Local preconditioner와 global preconditioner를 준이산화하기 전에 시간 항에 곱해지는 예조건화 행렬의 역할이 수렴성과 고유치의 보정이라고 한다면 수치유속에서 인공점성 항은 해의 정확성에 영향을 주게 되므로[10] 두 종류의 preconditioner의 인공점성항만 참고문헌 [3]에서 소개된 수식으로 정리했다.

$$\Gamma|A_\Gamma|\Delta Q=|U|\begin{bmatrix}\Delta(\rho)\\ \Delta(\rho u)\\ \Delta(\rho v)\\ \Delta(\rho E)\end{bmatrix}+\delta u\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho H\end{bmatrix}+\delta p\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ U\end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\delta u=M^*\Delta U+[c^*-(1-2\alpha)|u|-\alpha uM^*]\frac{\Delta p}{\rho U_r^2} \tag{23}$$

$$\delta p=M^*\Delta p+[c^*-|u|+\alpha uM^*]\rho\Delta U \tag{24}$$

$$c^*=\frac{|u'+c'|+|u'-c'|}{2},\ M^*=\frac{|u'+c'|-|u'-c'|}{2c'} \tag{25}$$

식 (22)의 local preconditioner의 인공점성 항과 식 (26)의 global preconditioner의 인공점성 항을 비교해 보면 에너지방정식에서 차이가 난다.

$$M\Gamma^{-1}|\Gamma_q a|\Delta q=|U|\begin{bmatrix}\Delta(\rho)\\ \Delta(\rho u)\\ \Delta(\rho v)\\ \Delta(\rho\phi)\end{bmatrix}+\delta u\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho\phi\end{bmatrix}+\delta p\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ U\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \delta'\end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\delta u=-M^*\Delta U+[c^*-|u|-\alpha uM^*]\frac{2\alpha u\Delta U}{c^2\beta_{br}} + [c^*-|u|-\alpha uM^*]\frac{\Delta p}{\rho c^2\beta_{br}} \quad (27)$$

$$\delta p=-M^*\Delta p+[c^*-|u|-\alpha uM^*]\rho\Delta U \quad (28)$$

$$\delta'=\left[-\rho M^*\Delta U+(c^*+\alpha UM^*)\frac{\Delta p}{c^2\beta_{br}}\right]\frac{c^2}{(\gamma-1)} \quad (29)$$

$$c^*=\frac{|u'+c'|+|u'-c'|}{2},\ M^*=\frac{|u'+c'|-|u'-c'|}{2c'} \quad (30)$$

5.3.2 에너지 방정식에 대한 고찰

해석절차에 따라 정리해 보면 에너지 방정식을 제외하고는 연속방정식과 운동방정식에서 local preconditioner와 global precondtioner간의 특징적인 차이나 문제점을 발견하지 못하여 본문에서는 생략하기로 한다. 마하수가 작아지면 $O(1)$인 항들의 영향이 상대적으로 커지게 되는데 이해를 돕기 위해 global preconditioner의 에너지 방정식의 인공점성 항들을 따로 정리하면 식 (31)과 같다. 단, 식 (31)-(32)는 무차원화하기 전 의 식이다.

$$|U|\Delta(\rho\phi)+\delta u(\rho\phi)+\delta p(U)+\delta' \quad (31)$$

식 (31)을 local preconditioner의 인공점성 항과 같이 총에너지와 총엔탈피로 정리하면 식 (32)의 δ'' 항이 부족함을 알 수 있다.

$$|U|\Delta(\rho E)+\delta u(\rho H)+\delta p(U)-\delta'' \quad (32)$$

식 (32)의 δ''항을 해석절차에 따라 정리하면 다음과 같다.

$$\tilde{\delta}''=\frac{\tilde{\rho}\Delta\tilde{U}}{\tilde{\beta}_{br}}\left\{(1-M_r^2\tilde{\beta}_{br})\tilde{U}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{Y}}{2}-|\tilde{U}|\\ -\frac{(1-M_r^4\tilde{\beta}_{br}^2)\tilde{U}}{2\sqrt{Y}}\end{pmatrix}\right\} - \frac{\Delta\tilde{p}}{\tilde{\beta}_{br}}\frac{(1-M_r^2\tilde{\beta}_{br})^2\tilde{U}^2}{2\sqrt{Y}} \quad (33)$$

$$Y=\frac{X}{u_r^2}=(1-\tilde{\beta}_{br})^2\tilde{U}+4\tilde{\beta}_{br}\tilde{c}^2 \quad (34)$$

식 (33)을 살펴보면 마하수가 작아질수록 반영되어야 하는 두 개의 항이 있음을 확인 할 수 있다. 따라서 global preconditioner가 저속에서 밀도를 해상하지 못하는 것은 에너지항의 수치점성이 충분하지 않기 때문이라는 결론을 얻을 수 있다. 예조건화된 방정식의 인공점성 항이 예조건화 행렬에 영향을 받기 때문에 이를 해결하기 위해서는 예조건화 행렬의 수정이 필요하다.

6. 수치계산

6.1 계산 조건

본 연구에서는 10% 원호를 가진 2차원 비점성 bump 유동에 대해 수치해석을 했다. 격자는 65×17개의 벽면과 bump 전후로 밀집된 격자점으로 이루어진 정렬격자이고 입, 출구 경계조건으로 [19]에 소개된 특성(characteristic)경계조건과 같은 결과를 가지는 간단한 형태의 비특성(noncharacteristic)경계조건을 사용했다. 또한, 수렴가속을 위해 4 level multigrid를 적용했다. CFL수는 5이고 마하수는 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7}까지 single CPU에서 계산했다.

6.2 결과 및 검토

6.2.1 Local preconditioner와 Global preconditioner

Fig. 1에서 Fig. 5까지는 local preconditioner와 global preconditioner의 유동변수들의 수치해와 수렴곡선이다. 마하수가 10^{-5}까지는 Fig. 1과 Fig. 6의 (a)에서 볼 수 있듯이 각 유동변수의 등선들이 잘 해상된다. 단, global preconditioner의 등밀도 선도가 등속선, 등압선과는 달리, bump위치에서 등선이 평행하게 나타나는 것은 5.3절에서 언급했듯이 에너지 방정식의 수치점성이 충분하지 않기 때문으로 추론된다. Fig. 2와 Fig. 3은 마하수가 10^{-7}일 때 local preconditioner와 global preconditioner의 운동방정식에서 게이지 압력 사용 전후 등선의 변화인데 압력과 온도항이 물리적인 유효숫자 범위 안에서 최소 마하수까지 등선을 유지하는 반면, 온도는 마하수 10^{-7}이하에서 파편화되기 시작한다. 참고문헌 [11]에 따르면 에너지 방정식의 감지엔탈피와 운동에너지 부분이 더해지는 과정에서 두 항의 크기차이로 인한 유효숫자 손실이 원인이라 보고, 일반적으로 압력이나 속도항만으로 상대적 변수로 표현하는데 반해 압력, 엔탈피, 대류항까지 상대적 변수로 표현하고 확장 2배 정확도(long double precision)를 써서 마하수

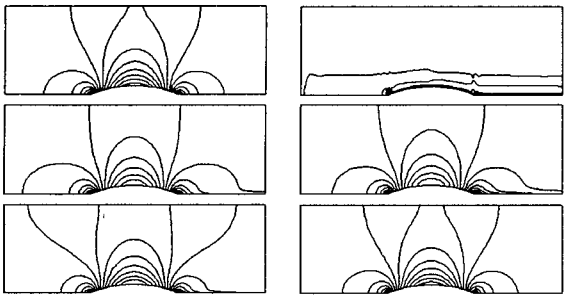

Fig. 1 Primitive variable contours at $M=10^{-5}$(a) Local preconditioner(left) : p(top), u(middle), T(bottom) (b) Global preconditioner(right) : ρ(top), u(middle), p(bottom)

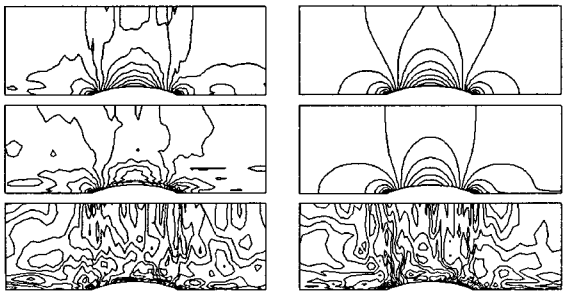

Fig. 2 Primitive variable contours of the local preconditioner at $M=10^{-7}$ (a) without pressure correction(left) (b) with pressure correction(right) : p(top), u(middle), T(bottom)

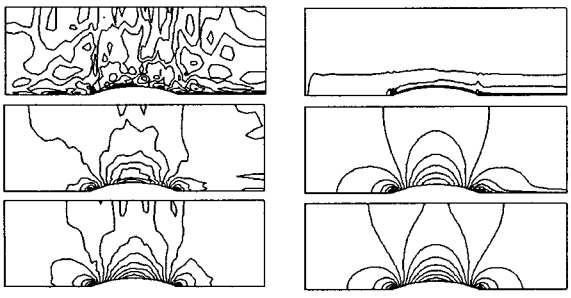

Fig. 3 Primitive variable contours of the global preconditioner at $M=10^{-7}$ (a) without pressure correction(left) (b) with pressure correction(right) : ρ(top), u(middle), p(bottom)

가 10^{-7}에서 10^{-9} 사이의 영역에 대해 수치해석을 수행하고 결과를 논했다. Fig. 4와 Fig. 5는 압

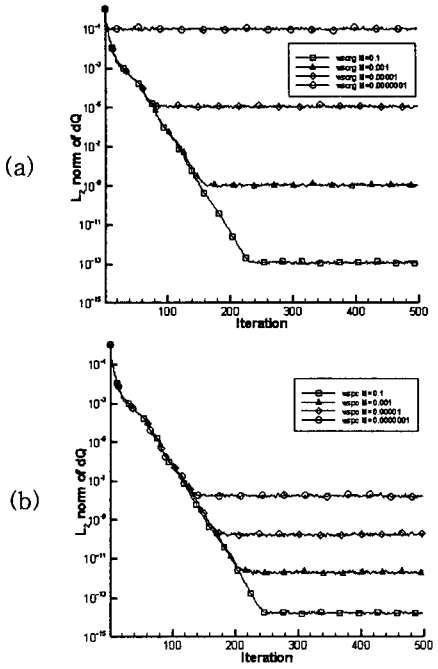

Fig. 4 Convergence histories of the local preconditioner at each Mach number (a) without pressure correction (b) with pressure correction

력보정 전후의 local preconditioner와 global preconditioner의 수렴곡선을 보여준다.

6.2.2 WSBR preconditioner

Fig. 6에서 Fig. 8까지는 WSBR preconditioner의 결과인데 Fig. 6의 (a)에서 알 수 있듯이 유동의 수치해의 등선도는 local preconditioner의 결과와 거의 같다. Fig. 7의 수렴곡선을 살펴보면 global preconditioner와 유사한데 이러한 Mach number independent의 특성은 앞서 설명했듯이 압력항의 무차원화 변수와 운동방정식에서의 압력항의 보정이 큰 역할을 한다. Fig. 6 (b)에서 등온선의 파편화 원인을 찾기 위해 Fig. 8과 같이 각 유동변수들의 수렴성을 검산한 결과 압력과 속도의 norm이 10^{-15} 부근까지 수렴하는 반면, 온도는 압력보정전의 전체수렴 곡선과 같이 계단화되어 마하수 10^{-7}에서는 수렴하지 않는다.[11]

본문에서는 생략했지만 압력계수선도는 세 종류의 preconditioner 모두 마하수가 10^{-7}인 경우를 제외하고 비점성 bump 유동과 같은 간단한 유동장에서 거

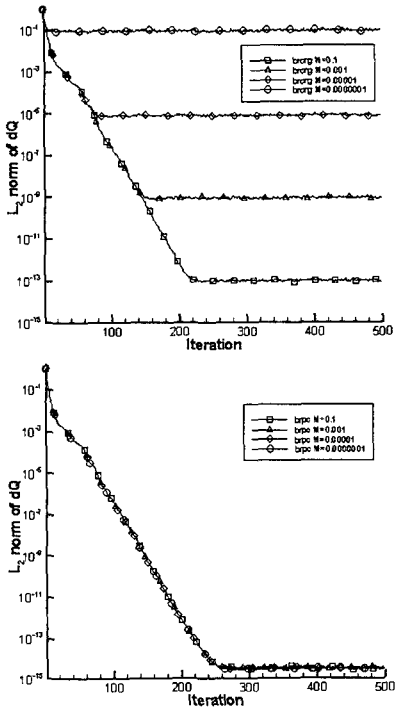

Fig. 5 Convergence histories of the global preconditioner at each Mach number (a) without pressure correction (b) with pressure correction

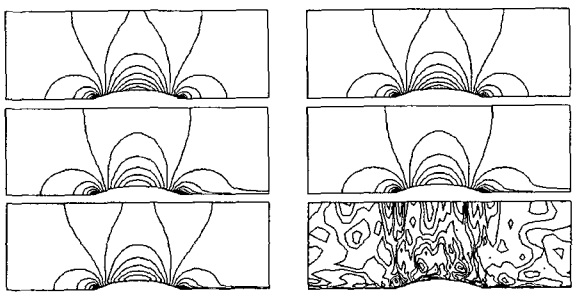

Fig. 6 Primitive variable contours of the WSBR preconditioner (a) $M=10^{-5}$(left), (b) $M=10^{-7}$(right) : p(top), u(middle), T(bottom)

의 동일하게 나타난다. 마하수 10^{-7}에서의 압력계수선도는 Fig. 6의 (b)처럼 등압선이 잘 해상됨에도 불구하고 약간의 문제가 발생하는데 압력계수의 정의에 따라 게이지 압력보다는 압력 항 자체를 사용하기 때문에 나타나는 유효숫자 손실의 효과로 보인다.

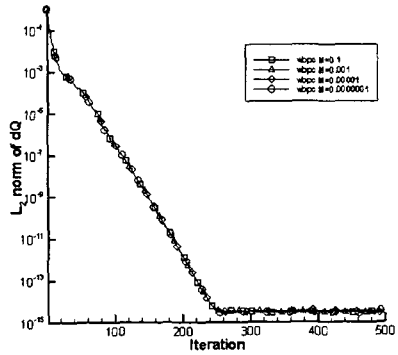

Fig. 7 Convergence histories of the WSBR preconditioner at each Mach number with pressure correction

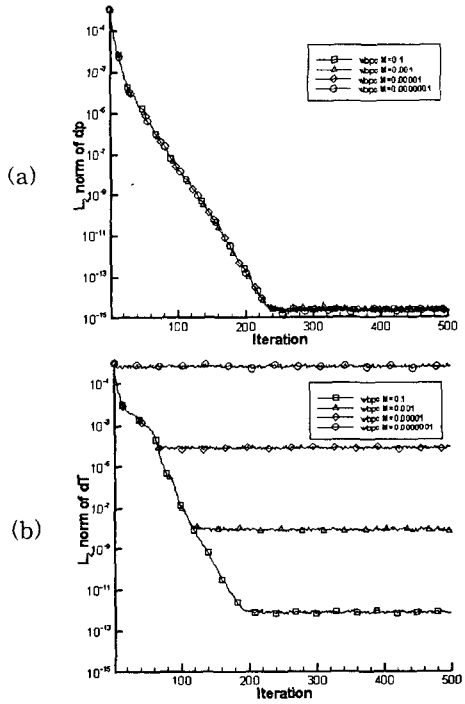

Fig. 8 Convergence histories of the WSBR preconditioner at each Mach number according to each primitive variable (a) p, (b) T

7. 결 론

지금까지 Weiss and Smith의 local preconditioner와 Briley의 global preconditioner를 살펴보고, 전자를 기본으로 후자의 개념을 이용한 두 종류의

preconditioner의 특징을 포함하는 WSBR preconditioner 구성하여 비점성 bump 유동에서 결과를 평가하였다. WSBR preconditioner는 local preconditioner의 유동해의 등선도 특징과 global preconditioner의 Mach number independent 수렴특성을 동시에 가지고 있다. 마하수가 10^{-7}이하에서는 온도항의 norm이 더 이상 수렴하지 않는데 에너지 방정식에서 총엔탈피, 총에너지의 상대적 표현과 유효숫자 손실에 대한 연구가 필요하다. 본 연구는 비점성 bump유동에만 한정되어 있고 점성유동에서의 수렴특성에 대한 연구는 차후에 이루어 질 것이다.

참고 문헌

[1] Christopher L. Reed and Dale A. Anderson, "Application of Low Speed Preconditioning to the Compressible Navier-Stokes equations," *AIAA conference*, (1997)

[2] Choi, Y,-H. and Merkle, C.L., "The Application of Preconditioning in Viscous Flows," *Journal of Computational Physics*, Vol.105 No.1, (1993), p.207-223.

[3] Weiss, J.M. and Smith W.A., "Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Flows," *AIAA Journal*, Vol.33 No.11, (1995), p.2050-2057.

[4] Turkel, E., "Review of Preconditioning Methods for Fluid Dynamics," *NASA Contractor Report* 189712, Sept. (1002).

[5] W.R. Briley, L.K. Taylor, D.L. Whitfield, "High-Resolution Viscous Flow Simulations at Arbitrary Mach Number," *Journal of Computational Physics*, Vol.184, (2003), p.79-105..

[6] B. Yildirim and P. Cinnella, "On the Validation of a Global Preconditioner for the Euler Equations," *AIAA paper* 2004-740, Jan.(2004).

[7] Guillard, H. and Viozat, C., "On the Behaviour of Upwind Schemes in the Low Mach Number Limit," *Computers & Fluids*, Vol.28 No.1, (1999), p.63-86.

[8] S.H. Park and J.H. Kwon, "A Preconditioned HLLE Method for Flows at All Mach Numbers," *AIAA paper* 2004-2709, Jan (2004).

[9] 성춘호, 권장혁, 최윤호, 이승수,"저마하수 예조건화 기법을 위한 다중격자 DADI 기법," *한국전산유체공학회 추계학술대회*, 10월 (2001),, p.20-30.

[10] Turkel, E., "Preconditioning Techniques in Computational Fluid Dynamics," *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol.31, (1999), p.385-416

[11] 이상현, "저속 압축성 유동장 해석을 위한 예조건화 방법론 연구Ⅱ-온도장 계산성능 개선," *한국항공우주공학회지*, 제29권 제8호, 12월 (2001), p.26-36.

[12] R. Klein, "Semi-implicit Extension of a Godunov-type Scheme based on Low Mach Number Asymptotics I: One-dimensional flow," *Journal of Computational Physics*, Vol.121, (1995), p.213-237.

[13] C.-D., Munz, S. Roller, R. Klein, K.J. Geratz, "The extension of incompressible Flow Solvers to the Weakly Compressible Regime," *Computers & Fluids*, Vol.32, (2003), p.173-196.

[14] John C. Tannehill, Dale A. Anderson and Richard H. Pletcher, "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer," *Taylor&Francis*, 2nd ed. (1997).

[15] Venkateswaran, S., Li, D. and Merkle, C.L., "Influence of Stagnation Regions on Preconditioned Solutions at Low Speeds," *AIAA paper* 2003-0435, Jan. (2003)

[16] Pulliam, T.H. and Chaussee, D.S., "A Diagonal Form of and Implicit Approximate-Factorization Algorithm," *Journal of Computational Physics*, Vol.39, (1981), p.347-363.

[17] Ni, R.-H., "A Multiple-grid Scheme for Solving the Euler equations," *AIAA Journal*, Vol.2 No.11, (1982), p.1565-1571.

[18] Jespersen, D., Pulliam, T. and Buning, P., "Recent Enhancements to OVERFLOW," *AIAA Paper* 97-0644, Jan. (1997).

[19] Turkel, E., Radespiel, R. and Kroll, N., "Assessment of Preconditioning Methods for Multidimensional Aerodynamics," *Computers & Fluids*, Vol.25 No.6, (1997), p.613-634.