이론적 일계자기회귀각란에 의한 공정조절모형에 관한연구

A Study on Process Adjust Model by First-order Autoregressed Disturbance with Theory

정 해 운 *

Dept. of Industrial System Management, Osan college
Hae-Woon Jung

Abstract

EPC seeks to minimize variability by transferring the output variable to a related process input(controllable) variable. In the case of product controi, a very reasonable objective is to try to minimize the variance of the output deviations from the target or set point. We consider an alternative EPC model with first-order autoregressive disturbance.

1 서론

제안된 대안의 EPC모형설계는 깔때기 실험을 기초로 하였다. 깔때기 실험에서 t번째 떨어진 공깃돌은 t-1번째까지 조절된 값과 확률오차의의 합으로 나타난다. 깔때기 실험의 법칙2) 에서 공깃돌이 한쪽방향으로 계속 t번 떨어질 때, n_t 는 일계자기회귀모형에 따른다고 가정한다. 가정의 타당성으로 품질특성은 자동상관관계가 있으며 ACF가 일계자기회귀모형에 따라야 한다. 제안된 대안의 u_t모형은 n_t 가 AR(1) 모형에 따를 때 설계된 공정조절모형을 MMSE컨트롤러와 동일한 값이 되도록 이론적인 수리를 확립하였다.. 설계된 u_t는 ϕ와 θ , 품질특성이 맞물려 공정조절 하는 역할을 한다. 제안된 EPC모형의 구축은 제안된 대안으로 설계된 u_t 를 기초로 한다. 제안된 EPC모형은 공정조절을 하여 변동을 감소시키는 역할이 우수하며, 쉽고 간편하다.

* 오산대학 산업시스템경영과

2. 깔때기실험에 의한 공정조절모형 기초

깔때기실험 규칙1은 깔때기가 목표에 맞도록 왼쪽에 고정되어있다. 목표와 공깃돌의 차이는 제로이며, 확률분포는 다음과 같다[3][4].

$Y_t = e_t$ t = 1, 2, 3.....n (1)

e_t는 오차로서 분산이 σ_e^2인 독립확률 변수이며, Y_t는 공깃돌의 위치이다. 깔때기실험 규칙2는 데드-비트(dead-beat)관리로 나타낸다. 만약확률오차가 없다면 t+1번 째 공깃돌이 떨어지는 공깃돌은 목표에 맞도록 조절된다. 확률오차가 있을 때 데드-비트정책의 효과는 비교적 상세하게 나타난다. 다음의 공정모형은 목표와 t번 째 떨어지는 공깃돌을 목표에 맞도록 하는 공정조절과 오차의 함수로 나타내면 다음과 같다.

$Y_t = u_{t-1} + e_t$ (2)

e_t는 독립확률변수이며, u_{t-1}은 t-1에서 t번째의 공깃돌이 떨어질 때까지 조절된 깔때기의 위치이다. 규칙2에서 깔때기의 위치는 t+1번째 떨어질 깔때기를 위하여 다음과 같이 조절된다.

$u_t = u_{t-1} - Y_t$ (3)

Box와 Jenkins(1976), MacGregor(1988)는 식(3)을 관리엔지니어의 기술로서 단순한 통합 컨트롤러(integral controller)로 나타내었다[1][2].

식(3)은 식(2) 로부터 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$Y_t = u_{t-1} - u_t$ (4)

$= Y_t - e_t - (Y_{t-1} - e_{t-1})$

식(2)에서 공정조절모형은 다음과 같다.

$u_{t-1} = Y_t - e_t$ (5)

식(4)와 식(5)를 정리하면 다음과 같다.

$u_t = -e_t$ (6)

식(4)에 식(6)을 대입하면 다음과 같다.

$Y_t = e_t - e_{t-1}$ (7)

식(7)에서 분산은 $2\sigma_e^2$을 갖는다.

그러므로 식(7)은 목표에서 왼쪽으로 고정되어있는 깔때기 실험규칙1의 2배의 분산을 갖는다.

3. 평균이 이동하는 경우 공정조절

평균이 이동하는 경우 공정조절모형의 절차를 확립하기 위하여 다음과 같은 가정을 세운다.

첫째; 연속공정산업에서 공정평균은 상수가 아니다.

둘째; 많은 각란이 존재한다.

공정산업에서 실제적인 공정모형은 다음과 같다.

$Y_t = u_{t-1} + n_t + e_t$ (8)

Y_t ;품질특성

u_t ;공정조절의 효과

n_t ;각란의 효과

e_t ;오차

식(8)에서 각란의 효과는 일계자기회귀모형에 따른다고 가정하고 다음과 같이 나타낸다.

$$n_t = \phi n_{t-1} + a_t \tag{9}$$

여기서 a_t는 백색잡음이다. ϕ는 자기회귀계수이며 범위는 $-1 \le \phi \le 1$이다. 많은 공정에서 품질특성의 평균은 높은 상관관계가 있을 때, ϕ가 1에 접근한다.

깔때기실험규칙1은 공정조절을 필요로 하지 않는다. 목표와 공깃돌의 차이에 대한 분산은 다음과 같다.

$$Var(Y_t) = \sigma_n^2 + \sigma_e^2$$

$$= \frac{1}{(1-\phi^2)}\sigma_a^2 + \sigma_e^2 \tag{10}$$

깔때기실험규칙2의 공정조절은 식(3)에 기초한다. 평균이 이동 할 때 공정조절모형은 식 (8)에 식(3)을 대입하면 $Y_t = u_t + Y_t + n_t + e_t$로서 공정조절모형은 다음과 같이 나타낸다.

$$u_t = -n_t - e_t$$
$$u_{t-1} = -n_{t-1} - e_{t-1} \tag{11}$$

공정모형 식(8)에 (11)식을 대입하면 다음과 같다.

$$Y_t = -n_t - e_{t-1} + n_t + e_t$$

$$Y_t = n_t - n_{t-1} + e_t - e_{t-1} \tag{12}$$

이러한 체계에서 Y_t의 분산은 다음과 같다.

$$Var(Y_t) = \frac{2\sigma_a^2}{1+\phi} + 2\sigma_a^2 \tag{13}$$

깔때기실험규칙1과2의 두 분산의 비율은 다음과 같다.

$$\frac{Var(Y)_{규칙2}}{Var(Y)_{규칙1}} = 2(1-\phi) + 2\phi\left(\frac{\sigma_e^2}{\sigma_y^2}\right) \tag{14}$$

σ_y^2은 규칙1의 분산이다. 이 수행의 비율은 ϕ 와 $\frac{\sigma_e^2}{\sigma_y^2}$의 값에 따라 자동상관관계의 정도를 확인해야한다. 평균이 상수 일 때, 식(14)의 두 분산의 비는 $\frac{\sigma_e^2}{\sigma_y^2} = 1$ 이고 평균이 자동상관관계가 없는 $\phi = 0$인 실험에서는 목표로 공기돌이 떨어질 때 식(3)으로 조절되며, 분산 비는 2가 된다. 각란의 이동은 ϕ 값의 1에 접근 되도록 하며 공정분산을 더 크게 한다. 이때, 규칙2의 조절을 위하여 ϕ값은 역으로 되도록 한다. 엔지니어는 식(3)의 통합컨트롤러를 사용하면서 1보다 적은 게인(gain)과 필터 값 을 사용한다.

4. MMSE(minimum mean squared error)

컨트롤(control)에 의한 모수추정

Box와 Jenkins(1976)는 목표와 품질특성의 차이에서 평균제곱오차(minimum mean squared error)를 최소화하기 위하여, 모든 측정 시점 t에서 공정조절이 이루어지도록 목표와 t+1측정시

점의 품질특성과 차이를 예측 하였다.[1][2]

$$u_{t}= \hat{Y}_{t+1/t} \quad (15)$$

Box와 Jenkins(1976)는 Y_{t+1} 의 예측 $\hat{Y}_{t+1}$을 필터 또는 가중함수(weight function)로 나타내었다[1]. 평균이 이동하는 공정모형 식(8)은 각란모형의 식(9)가 들어가게 된다. 공정조절모형의 식(8)에 각란 모형의식(9)를 대입하면 다음과 같다.

$$Y_t = u_{t-1} + \phi n_{t-1} + a_t + e_t \quad (16)$$

공정모형 식(8) 로부터 t-1 시점의 각란모형은 다음과 같다.

$$n_{t-1} = Y_{t-1} - u_{t-2} - e_{t-1} \quad (17)$$

식(17)을 식(16)에 대입하면 다음과 같다.

$$Y_t = u_{t-1} + \phi Y_{t-1} + \phi u_{t-2} - \phi u_{t-2} - \phi e_{t-1} + a_t + e_t \quad (18)$$

식(18)로 부터 u_{t-1}은 다음과 같다.

$$u_{t-1} = \phi u_{t-2} - \phi Y_{t-1} + Y_t + \phi e_{t-1} - a_t - e_t \quad (19)$$

그러므로 u_t는 다음과 같다.

$$u_t = \phi u_{t-1} - \phi Y_t + [\, Y_{t+1} + \phi e_t - a_{t+1} - e_{t+1}] \quad (20)$$

MacGregor가 설계한 MMSE컨트롤러는 다음과 같다.

$$u_t = \phi u_{t-1} - (\phi - \theta) Y_t \quad (21)$$

식(20)과 식(21)이 같아지게 하기 위하여 식(20)은 [ ] 부분이 MMSE 컨트롤러를 만족하도록 하는 θY_t가 되어 다음과 같이 나타낸다.

$$Y_{t+1} + \phi e_t - a_{t+1} - e_{t+1} = \theta Y_t \quad (22)$$

식(20)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_t = \phi u_{t-1} - \phi Y_t + \theta Y_t \quad (23)$$

여기에서 ϕ는 자기회귀계수이고, θ는 품질특성의 전체의 확률분산 $Var(Y_t) = \sigma_n^2 + \sigma_e^2$ 나타낸다.

일계자기회귀이동평균ARMA(1.1) 모형에서 이동평균모수이며 영역은 $0 \le \theta \le 1$이다.

Mcgregor(1990)는 ϕ값에 따른 $\frac{\sigma_e^2}{\sigma_y^2}$의 값을 깔때기 실험에서 표로 만고, $Var(Y_t)$를 $\sigma_e^2(\frac{\phi}{\theta})$ 로 나타내었으며, 이를 위하여 깔때기실험규칙 1과2의 분산 비를 비교하였다[5]. 그러므로 θ, $\frac{\sigma_e^2}{\sigma_y^2}$, 는 다음 식을 풀어서 구할 수 있다.

$$\frac{(1-\theta^2)}{\theta} = [\frac{(1-\phi^2)}{\phi}]\,(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_e^2} + 2\phi\,) \quad (24)$$

고도의 평균이동 즉 $\phi = 1$일 때 식(21)의 MMSE 컨트롤러는 식(3)의 깔때기실험에서 사용한 통합컨트롤러와 통합게인 $(\phi - \theta)$가 1보다 적다는 것을 제외하면 비슷하다.

5.결론

본 연구에서 설계한 EPC모형은 평균이 이동할 때(Drifting mean) 사용한다. 공정조절모형 u_t

는 n_t가 AR(1) 모형에 따른다고 가정하고, 산업표준이 되는 MMSE 컨트롤러 와 동등한 값을 갖도록 이론적으로 입증되어 공정조절을 하는 역할을 한다. 이론적으로 확립된 공정조절모형은 SPC/EPC통합모형시스템에서 적용 할 경우 가피원인을 탐지하는 능력이 산업표준에 맞으면서도 정확하게 공정조절능력을 수행하는 역할을 한다.

참고 문헌

[1] Anderson O. D., (1976). *Time Series and Forecasting*, Butterworth, London.
[2] Box, G. E. P. and Jenkins, G. M.(1976). *Time Series Analysis, Forecasting, and Control*. Holden-Day, San Francisco, CA.

[3] MacGregor, J. F.(1990). "A Different View of the Funnel Experiment". Journal of Quality Technology 22, pp.255259.

[4] MacGregor. j. f. A Different Wiew of the Funnel Experiment vol. 22.No. 4. October 1990. ,J, Q. T
[5] Montgomery, D. C., Johnson, L. A. and Mardiner, J. S.(1990), *Forecasting and Time Series*, 2nd ed., McGraw-Hill, NY.