

# 정규화된 등가음원법을 이용한 음장의 재구성

전인열, 이정권

한국과학기술원 기계공학과 소음 및 진동제어 연구센터

## On the Reconstruction of the Sound Field Using the Regularized Equivalent Source Method

In-Youl Jeon and Jeong-Guon Ih

NoVIC, Dept. of Mechanical Eng., KAIST, Science Town, Daejeon 305-701, Korea

Email: nosori@aclab.kaist.ac.kr, J.G.Ih@kaist.ac.kr

### 요약

본 연구에서는 복잡한 형상을 가진 음원으로부터 방사하는 음장을 등가음원법 (equivalent source method)을 이용하여 재구성한다. 일반적인 등가음원법의 기본 원리는 진동하는 물체의 표면 또는 내부에 등가음원을 분포시켜서 등가음원의 강도를 계산하는 방법이다. 각 등가음원의 강도는 음원의 경계 조건이나 측정된 음장 음압을 통해서 구할 수가 있으며 사용된 등가음원의 차수, 개수 그리고 위치 등은 고려되어야 할 중요한 변수들이다. 기존의 HELS (Helmholtz equation least square) 방법은 한 곳의 위치에 다양한 차수로 이루어진 등가음원을 사용하여 각 차수의 계수를 구하는 방법으로써 구형에 가까운 음원에 대해서 좋은 결과를 보이나 음장의 결과가 최대 차수의 선택에 따라서 큰 오차를 유발하는 문제점이 있다. 따라서 정규화 기법을 사용하여 음장을 재구성하기 위해 필요한 등가음원의 최적 차수를 구하고, 음원 내부에 최적 차수로 이루어진 등가음원을 여러 개의 점에 위치시켜서 재구성 정확도를 향상시켰다. 정규화된 등가음원법의 타당성 검증은 위하여 표면 일부가 진동하는 구에 대한 수치 해석 및 청소기 모델에 대한 음장 재구성 실험을 수행하였다.

### 1. 서론

각종 기계류, 전자제품 등의 진동 소음원으로부터 음장으로 전파하는 소음의 재구성을 위하여 경계요소법 (boundary element method; BEM)에 기초한 근접장 음향 홀로그래피 (nearfield acoustical holography; NAH)와 같은 간접적인 음원 규명 방법이 개발되었다.[1] 이 방법은 좌표계에 제한을 받지 않기 때문에 복잡한 형상의 소음원

에 대해서 적용이 가능하지만 음원의 경계요소 모델링 작업과 수치 해석이 필요하다는 단점이 있다.

이러한 경계요소 모델링 작업 및 수치 해석 없이 소음원의 방사 및 산란을 해석하기 위하여 Koopman 등은 음파의 중첩 원리를 이용하여 저차의 간단한 단극 및 쌍극 등가음원들로 복잡한 실제 음원을 묘사하였다.[2] 그 후에 등가음원법은 내부 문제[3] 및 외부 문제[4]에 각각 효율적으로 적용이 되었다. 특히 비행기 엔진[5]과 같은 아주 복잡한 물체에도 적용이 되었으며 구형과 함수를 이용하여 고차의 등가음원을 표현하였다.[6] 그리고 음장 측정 음압과 한 점에서 다양한 차수로 이루어진 구형 기저함수 (spherical basis function)를 이용한 HELS 방법[7]이 개발되었다.

본 연구에서는 HELS 방법에서 사용된 구형 기저함수들 중 선형의존 항들을 제거하여서 랭크 부족 현상을 극복하고, 등가음원을 여러 곳에 위치시켜서 등가음원법을 일반화한다. 이 때 각 등가음원의 최대 차수의 선택에 따라서 해의 안정성이 크게 영향을 받기 때문에 불필요한 고차항의 영향을 억제하는 반복적 정규화 기법 (iterative regularization technique)[8]을 사용하도록 한다. 또한 정규화 기법 적용 시 최적의 해를 구하기 위하여 GCV (generalized cross validation) 함수[9]를 이용한다. 이러한 정규화된 등가음원법의 타당성 검증은 위하여 엄밀해 (analytical solution)가 존재하는 구에 대한 수치해석과 가정용 청소기에 대해서 음장 재구성 실험을 수행한다.

### 2. 등가음원법을 이용한 음장 재구성

#### 2.1 등가음원법의 기본 이론

구형좌표계에서 음장을 지배하는 Helmholtz 파동 방정식의 기본해인 구형 직교 기저함수  $\psi$  를 이용하면 원점에 대한 임의의 위치  $\mathbf{r}_m$  에서의 음압은 다음과 같이 나타낼 수 있다.[7]

$$p_f(\mathbf{r}_m, \omega) = \sum_{j=1}^{J_1} C_j \psi_j(\mathbf{r}_m, \omega) \quad (1)$$

$$= \sum_{n=0}^N \sum_{l=-n}^n C_{n,l} h_n(kr_m) Y_n^l(\theta, \phi).$$

여기서,  $k$  는 파수(wave number),  $h_n$  과  $Y_n^l$  은 각각 제 1 종  $n$  차 구형 Hankel 함수와 그에 대응하는 구형 harmonics 를 의미한다. 또한  $N$  은 사용된 기저함수의 차수이며 확장항(expansion term)의 개수는  $J_1 = (N+1)^2$  이다.

위 식을 기반으로 하여  $M$  개의 음장 음압과 기저함수와의 관계는 다음과 같이 행렬식으로 표현할 수가 있다.

$$\{p_f\}_{M \times 1} = [\Psi]_{M \times J_1} \{C\}_{J_1 \times 1}. \quad (2)$$

위 식에서 과결정 시스템을 위해서는 확장항의 개수  $J_1$  보다 많은 점에서 음압이 필요하며, 실제 측정된 음압  $\{\tilde{p}_f\}$  와 식 (2)에서 근사적으로 표현한 음압을 일치시키면 기저함수의 계수  $\{C\}$  를 결정할 수가 있다. 여기서 결정된 계수를 이용하면 임의의 위치에 대한 음압은 다시 식 (1)을 이용하여 예측할 수가 있다. 이러한 방법을 HELS 방법이라고 부르며 개념적으로 등가음원법의 일종으로 한 점에서 다수 차수의 등가 음원을 이용하는 방법이다.

식 (2)에서 측정 위치가 서로 겹치지 않으면 기저함수의 직교성으로 기저함수 행렬을 구성하는 행벡터들은 모두 선형독립적인 관계를 가지게 된다. 그러나 열벡터들은 구형 harmonics 의 특성에 의해서  $l = \pm n$  과  $l \geq 2$  에 해당되는 항들은 모두 선형의존적인 관계를 갖는다. 따라서 이러한 선형의존 항들은 기저함수 행렬의 역행렬 계산시에 랭크 부족현상을 유발시켜서 해를 불안정하게 만든다.[10] 이를 해결하기 위하여 선형의존 항들을 적절하게 제거하면 식(1)은 다음과 같이 수정할 수가 있다.

$$p_f(\mathbf{r}_m, \omega) = \sum_{j=1}^{J_1} C_j \psi_j(\mathbf{r}_m, \omega) \quad (3)$$

$$= \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^L C_{n,l} h_n(kr_m) Y_n^l(\theta, \phi).$$

여기서,  $n=0$  일 경우  $L=0$  이며  $n \geq 1$  일 경우  $L=1$  이다. 또한 총 확장항의 개수는  $J_2 = (2N+1)$  로써 식(1)에서

사용된 확장항의 개수  $J_1$  보다 항상 같거나 작으며 결과적으로 동일한 차수  $N$  의 등가음원을 묘사하기 위해서 보다 적은 수의 확장항이 필요하다는 것을 의미한다. 마찬가지로  $M$  개의 음압에 대해서 식 (3)을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\{p_f\}_{M \times 1} = [\Psi]_{M \times J_2} \{C\}_{J_2 \times 1}. \quad (4)$$

위 식은 한 점에서 다수 차수로 묘사되는 등가 음원과 다수의 음장 음압에 대한 표현식이며, 다수 점의 등가 음원에 대해서는 다음과 같이 일반화 할 수 있다.

$$\{p_f\}_{M \times 1} = \sum_{j=1}^{J_2} [\Psi_j]_{M \times N_{eq}} \{C_j\}_{N_{eq} \times 1} \quad (5)$$

$$= [\Phi]_{M \times J} \{D\}_{J \times 1}.$$

여기서,  $N_{eq}$  는 등가음원의 개수,  $[\Psi_j]$  는 동일한 차수로 이루어진 기저함수 행렬, 그리고  $[\Phi]$  는 전체 기저함수 행렬이다. 위 식에서 전체 확장항의 수는  $J = N_{eq} \times J_2$  이며 만약  $J_2 = 1$  일 경우 기저함수 행렬은 단극 음원으로 구성이 된다. 마찬가지로 과결정 시스템을 구성하기 위해서는 음장점의 개수  $M$  이 전체 확장항의 개수  $J$  보다 많아야 한다.

## 2.2 정규화된 등가음원법

일반적으로 기저함수 행렬은 약조건 (ill-conditioned) 상태이다. 만약 측정 음압에 잡음이 포함이 되어있으면 재구성 과정에서 잡음의 효과가 과도하게 증폭되어서 해가 불안정하게 된다. 따라서 확장항의 개수를 적절하게 선택하는 것이 무엇보다 중요하다. 기존의 HELS 방법에서는 음장 음압의 예측에서 발생하는 오차를 최소화 하기 위한 부가조건으로 다음과 같이  $M_2$  개의 오차 확인 지점에서의 음압을 이용하는 최소자승오차 (least-square error) 방법을 이용하여 최적의 확장항 수를 결정하였다.

$$\min_{J \leq M_2} \| \hat{p}_{f_1}(J) - \tilde{p}_{f_1} \|_2. \quad (6)$$

여기서  $\|\cdot\|_2$  는 L2-norm 을 의미하며,  $\hat{p}_{f_1}(J)$  는  $J$  개의 확장항을 가지고 예측한 음압, 그리고  $\tilde{p}_{f_1}$  는 오차 확인 지점에서의 음압을 나타낸다. 하지만 위 식을 실제 적용하기 위해서는 추가적으로 오차 확인 지점에서의 음압

측정이 이루어져야 하기 때문에 비효율적이다. 본 연구에서는 특이치 분리 기법 (singular value decomposition; SVD) 및 반복적 정규화 기법을 사용하여 다음과 같이 정규화된 계수를 구하였다.

$$\{D_i^{reg}\}_{J \times 1} = [W_\circ]_{J \times J} [F_i]_{J \times J} [\Lambda_\circ]_{J \times M}^{-1} [U_\circ]_{M \times M}^H \{\tilde{P}\}_{M \times 1} \quad (7)$$

$$= [\Phi_R]^+ \{\tilde{P}\}_{M \times 1}.$$

여기서, 위 첨자  $H$ 는 행렬의 Hermitian 연산자이며  $[U_\circ]$ 와  $[W_\circ]$ 는 각각 기저함수 행렬  $[\Phi]$ 의 좌, 우측 특이치 행렬,  $[\Lambda_\circ]$ 는 특이치 행렬, 그리고  $[\Phi_R]$ 은 정규화된 기저함수 행렬을 나타낸다. 또한  $[F_i]$ 는  $i$ 번째 반복 단계에서의 파동 벡터 필터 행렬을 나타내며 반복적 정규화 기법에서는 다음과 같이 정의 된다.

$$[F_i] = \text{diag}(1 - (1 - \beta \lambda_i)^{i+1}). \quad (8)$$

여기서,  $\beta$ 는 수렴을 위한 매개 변수이며 최적의 반복 횟수 (iteration step)는 다음과 같은 GCV 함수  $J(i)$ 이 최소가 될 때의 값으로 결정이 된다.

$$J(i) = \frac{\| \{\tilde{P}_i\} - [\Phi] \{D_i^{reg}\} \|_2^2}{\text{tr}([I] - [\Phi][\Phi_R]^+)^2}. \quad (9)$$

여기서, 'tr'은 행렬의 trace를 의미하며,  $[I]$ 는 랭크가  $M$ 인 단위행렬을 나타낸다. 이러한 정규화 기법을 이용하면 부가적 오차 확인을 위한 음압이 필요가 없게 되므로 재구성 효율을 증가시킬 수가 있다.

### 3. 음장 재구성 결과

#### 3.1 구 모델에 대한 수치해석

반경이  $a$ 인 구의 표면 중 일부가 속도  $v_s$ 로 진동 할 때 위치가  $(r, \theta)$ 인 지점에서의 음압은 이론적으로 다음과 같이 정의된다.[11]

$$p(r, \theta) = \frac{i \rho_0 c v_s}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (P_{n-1}(\cos \theta_0) - P_{n+1}(\cos \theta_0)) \times \frac{h_n(kr)}{h'_n(ka)} P_n(\cos \theta) \right]. \quad (10)$$

여기서,  $\rho_0$ 는 공기의 밀도,  $c$ 는 음속을 나타낸다. 그리고

$P_n$ 은  $n$ 차 Legendre 다항식을 나타내고  $h'_n$ 은  $n$ 차 구형 Hankel 함수의 1차 미분을 의미한다.

만약 구가  $|\theta_0| \leq 40^\circ$ 인 부분에서 균일하게  $v_s = 0.01$ 의 속도로 진동한다면 식(10)을 이용하여  $r = 1.05a$ 에서 균일하게 분포하는 100개의 음압을 계산 할 수가 있다. 이렇게 계산된 음압은 재구성 과정에서 입력 데이터로 사용이 되며, 음압 측정 시 흔히 발생하는 잡음의 영향을 고려하기 위해서 신호대잡음비 (signal-to-noise ratio)가 20 dB인 Gaussian 랜덤 잡음을 포함시켰다. 또한 등가음원의 위치는 HELS 방법에 대해서는 원점으로 설정하였으며 다수의 등가음원법을 적용하기 위해서 구 내부  $r = 0.3a$ 인 위치에 균일하게 8개를 분포시켰다. 정규화 기법의 타당성을 검증하기 위하여 최소자승오차 방법을 이용한 결과와 비교하도록 한다.

그림 1은 무차원 파수가  $ka = 1$ 일 경우 재구성된 표면 음압을 보여주고 있으며 식 (10)을 이용하여 계산한 이론 값과 재구성 결과가 잘 일치한다는 것을 알 수 있다. 여기서 최소자승오차 방법에 의해서 최적의 확장항의 수는 각각  $J_1 = 16$ ,  $J_2 = 6$ 으로 계산이 되었다. 따라서 등가 음원의 차수가 약  $N = 3$ 인 경우에 표면 일부가 진동하는 구의 방사 음장을 정확하게 묘사할 수 있다는 것을 알 수 있다. 하지만 HELS 방법 적용 시 등가음원법과 비교해서 해의 안정성이 확장항의 개수에 매우 민감하므로  $\theta = 0^\circ$  근처에서 정확도가 상대적으로 낮다는 것을 알 수 있다.

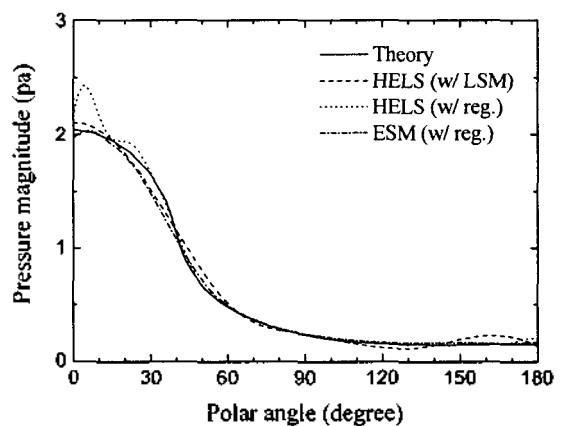


그림 1.  $ka=1$ 일 때 재구성된 구 표면 음압의 분포 비교.

### 3.2 청소기 모델에 대한 적용

청소기로부터 방사하는 음장을 등가음원법을 이용하여 재구성하였다. 그림 2는 절점 수가 170 개인 청소기의 경계 모델과 소음원을 둘러싸는 측정점의 위치를 보여주고 있다. 본 연구에서는 직육면체 면에 등간격으로 배치된 352 개의 측정 후보군을 선정하여 이중 음원과 음장점 사이의 상관성이 높은 점의 위치를 유효독립기법 (effective independence method; Efi)을 이용하여 총 100 개를 선택하였다.[1] 나머지 252 개의 점들은 등가음원법을 이용하여 재구성하며 실제 측정된 음압과 비교하였다. 총 60 개의 등가음원을 청소기 내부에 임의로 위치 시켰을 경우 청소기 배출구 부근에서 재구성된 음압은 그림 3과 같으며 측정 음압과 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 전체적으로 재구성 오차는 주파수 120 Hz와 240 Hz에서 각각 23%와 27%였다.

### 4. 결론

본 연구에서는 HELS 방법에 기초한 일반적인 등가음원법을 사용하여 음장을 재구성 하였으며 정확도 향상을 위하여 정규화 기법을 사용하였다. 결과적으로 최소자승오차 방법을 이용한 부가적인 오차 확인을 이용하지 않고 등가음원의 적절한 차수를 결정할 수 있었다. 따라서 정규화된 등가음원법을 이용하면 상대적으로 적은 수의 음압으로부터 추가적으로 원하는 만큼의 음압을 예측 할 수 있고 음향 플로그래피 적용에 있어서 좀더 효과적일 것으로 기대된다.

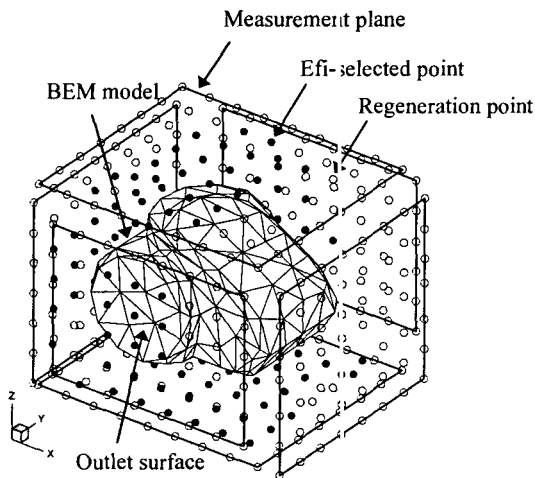


그림 2. 청소기 모델의 형상과 측정점의 위치.

### 감사의 글

본 연구는 BK21 과 NRL 과제에서 일부 재정 지원을 받았습니니다.

### 참고 문헌

1. B.-K. Kim and J.-G. Ih, "On the reconstruction of the vibro-acoustic field over the surface enclosing an interior space using the boundary element method," *J. Acoust. Soc. Am.* **100**, 3003-3016 (1996).
2. G. H. Koopmann, L. Song, and J. B. Fahline, "A method for computing acoustic fields based on the principle of wave superposition," *J. Acoust. Soc. Am.* **86**, 2433-2438 (1989).
3. M. E. Johnson, S. J. Elliott, K.-H. Baek, and J. Garcia-Bonito, "An equivalent source technique for calculating the sound field inside an enclosure containing scattering objects," *J. Acoust. Soc. Am.* **104**, 1221-1231 (1998).
4. M. Ochmann, "The source simulation technique for acoustic radiation problems," *Acustica* **81**, 512-527 (1995).
5. F. Holste, "An equivalent source method for calculation of the sound radiated from aircraft engines," *J. Sound Vib.* **203**, 667-695 (1997).
6. M. Ochmann, "The full-field equations for acoustic radiation and scattering," *J. Acoust. Soc. Am.* **105**, 2574-2584 (1999).
7. S. F. Wu, "On reconstruction of acoustic pressure fields using the Helmholtz equation least-squares method," *J. Acoust. Soc. Am.* **107**, 2511-2522 (2000).
8. B.-K. Kim and J.-G. Ih, "Design of an optimal wave-vector filter for enhancing the resolution of reconstructed source field by NAH," *J. Acoust. Soc. Am.* **107**, 3289-3297 (2000).
9. P. A. Nelson and S. H. Yoon, "Estimation of acoustic source strength by inverse methods: Part i, conditioning of the inverse problem," *J. Sound Vib.* **233**, 643-668 (2000).
10. P. C. Hansen, *Rank-Deficient and Discrete Ill-posed Problems* (SIAM, Philadelphia, PA, 1998).
11. P. M. Morse and K. U. Ingard, *Theoretical Acoustics* (Princeton University Press, NJ, 1986).

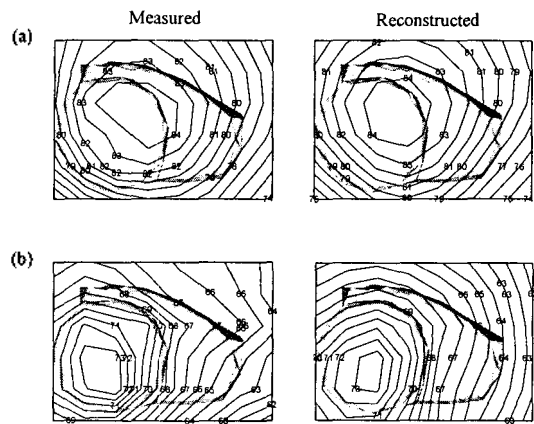


그림 3. 청소기 배출구 부근에서의 음압 분포도 (단위: dB).  
(a) 120 Hz; (b) 240 Hz.