

전력조류방정식과 자코비안 행렬의 성질에 대하여

(Some Properties on Jacobian Matrix)

이 상 중*, 양 성 덕

(Sang-Joong Lee : 서울산업대학교 전기공학과, Seong-Deog Yang : 고려대학교 수학과)

Abstract

Though the reference angle has been specified conventionally on the slack bus, it can be specified on any bus in the system without changing power flow solutions. This paper describes that the loss sensitivity of the slack bus can be obtained through an angle reference transposition. A concept of two reference buses, consisting of "power slack bus"

1. 서 론

아래의 전력조류 방정식에서 모선 k에 주어지는 위상각 항을 살펴보자.

$$P_k = V_k \sum V_m (G \cos \theta_{km} + B \sin \theta_{km})$$

$$Q_k = V_k \sum V_m (G \sin \theta_{km} - B \cos \theta_{km}) \quad (1)$$

여기서 θ_{km} 은 모선 k와 인근모선 m의 위상차를 나타내고 있다. 식 (1)은 조류계산에서 모선 위상각에 대하여 실제로 필요한 것은 위상각 크기 자체가 아니라, 모선 상호간의 상대적 위상차임을 설명하고 있다. 따라서, 위상각 기준모선의 위치를 지정하는 문제는 전압의 크기 자체가 지정되는 slack 모선의 위치와는 별개의 문제이다. 기준 위상각은 시스템 내의 어떤 모선에든 지정될 수 있으며 위상각 기준모선이 바뀌어도 조류계산 결과 각 모선의 P, Q, V 값 및 모선간의 위상차 $\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$ 은 변하지 않는다. 각 모선 위상각의 크기가 달라지지만 조류계산에 있어 아무런 의미가 없다.

2. 본 론

2.1. 위상각 기준모선의 이동이 Jacobian 행렬에 미치는 영향

그림 1은 간단한 3모선 계통으로서 모선 1,2에 연결된 두 대의 발전기가 각각 4-j5, 4-j10의 어드미턴스를 통하여 3번 모선의 부하에 1.7+j0.7 pu의 전력을 공급하고 있다. 1번 모선

에 $V_1=1.01$ 을 지정하고 2번 모선의 전압과 발전량을 $V_2=1.02$ 및 $P_2=1.1$ pu로 일정하다고 가정한다.

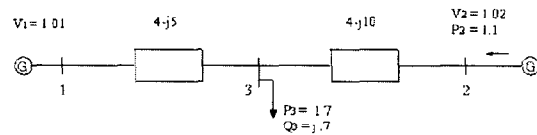


그림 1. 3모선 계통
Fig 1. Single line diagram of a three-bus system

그림 1의 3모선 계통의 조류계산을 위한 편차방정식의 일반형은 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \\ \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial P_1}{\partial V_1} & \frac{\partial P_1}{\partial V_2} & \frac{\partial P_1}{\partial V_3} \\ \frac{\partial P_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial P_2}{\partial V_1} & \frac{\partial P_2}{\partial V_2} & \frac{\partial P_2}{\partial V_3} \\ \frac{\partial P_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_3}{\partial \theta_3} & \frac{\partial P_3}{\partial V_1} & \frac{\partial P_3}{\partial V_2} & \frac{\partial P_3}{\partial V_3} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Q_1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial Q_1}{\partial V_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial V_2} & \frac{\partial Q_1}{\partial V_3} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial Q_2}{\partial V_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial V_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial V_3} \\ \frac{\partial Q_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Q_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Q_3}{\partial \theta_3} & \frac{\partial Q_3}{\partial V_1} & \frac{\partial Q_3}{\partial V_2} & \frac{\partial Q_3}{\partial V_3} \end{bmatrix}$$

단,

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \quad (2)$$

위 식에서 주어진 J 와 같이 모든 모선의 P , Q , V , θ 항을 포함하는 Jacobian 행렬을 본 논문에서는 full-Jacobian 이라 정의한다. 위상각 기준모선의 이동은 Jacobian 행렬의 구조를 변화시킨다. $\theta_1=0$ 와 같이, 관례대로 슬랙모선으로 지정된 발전모선을 위상각 기준모선으로 지정할 경우, 그림 1의 3모선 계통의 편차방정식과 Jacobian 행렬 J_1 은 아래와 같은 구조를 가지게 된다.

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix} = J_1 \begin{bmatrix} \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix} \quad \text{단, } J_1 = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{26} \\ a_{32} & a_{33} & a_{36} \\ a_{62} & a_{63} & a_{66} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$\theta_2=0$ 으로 2번 모선을 위상각 기준으로 지정할 경우,

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix} = J_2 \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_3 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix} \quad \text{단, } J_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{16} \\ a_{31} & a_{33} & a_{36} \\ a_{61} & a_{63} & a_{66} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$\theta_3=0$ 으로 3번 모선을 위상각 기준으로 지정할 경우,

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix} = J_3 \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix} \quad \text{단, } J_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \quad (5)$$

위상각 기준모선의 이동이 Jacobian 행렬을 변화시키지만 조류계산 결과에는 아무런 영향을 미치지 않는다.

2.2. 위상각 기준모선의 이동을 이용한 슬랙모선의 손실감도 유도

등중분 연료비에 의하여 그림 1의 3모선 계통의 최소연료비를 구하기 위한 최적 발전력 분담을 구하는 수식은 다음과 같다.[1]

$$\frac{df_1}{dP_{G1}}(PF_1) = \frac{df_2}{dP_{G2}}(PF_2) = \mu$$

$$PF_i = 1 / (1 - \frac{\partial P_{loss}}{\partial P_{Gi}}) \quad (6)$$

단, f_1 과 f_2 는 발전력 P_{G1} 및 P_{G2} 의 함수로 표시된 발전기 1 및 2의 연료비, P_{loss} 는 송전손실, PF_1 및 PF_2 는 발전기 1 및 2의 penalty 계수를 나타낸다. 상기 수식의 해를 구하자면 발전기 출력에 대한 계통손실감도 즉, $\partial P_{loss} / \partial P_{Gi}$ 를 우선 구해야 한다. 다음 식은 조류계산의 Jacobian 행렬을 이용하여 계통의 손실감도를 구하는 일반식이다.[2].

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P_{loss}}{\partial P_1} \\ \frac{\partial P_{loss}}{\partial P_2} \\ \frac{\partial P_{loss}}{\partial P_3} \\ \frac{\partial P_{loss}}{\partial Q_1} \\ \frac{\partial P_{loss}}{\partial Q_2} \\ \frac{\partial P_{loss}}{\partial Q_3} \end{bmatrix} = J^T \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{loss}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial P_{loss}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial P_{loss}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial P_{loss}}{\partial V_1} \\ \frac{\partial P_{loss}}{\partial V_2} \\ \frac{\partial P_{loss}}{\partial V_3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서 J^T 는 $[J^T]^{-1}$ 를 의미하며 특이행렬이 된다.[Appendix] (6)의 ELD 해를 구하자면 1,2번 발전기 모선의 계통손실감도를 우선 구해야 한다. $\theta_3=0$ 으로 3 번 모선을 위상각 기준모선으로 지정하면, 아래와 같이 1,2번 모선의 손실감도를 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P_{loss}}{\partial P_1} \\ \frac{\partial P_{loss}}{\partial P_2} \\ \frac{\partial P_{loss}}{\partial Q_3} \end{bmatrix} = J_3^{T^{-1}} \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{loss}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial P_{loss}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial P_{loss}}{\partial V_3} \end{bmatrix}$$

$$\text{단, } J_3^{T^{-1}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{61} \\ a_{12} & a_{22} & a_{62} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix}^{-1} \quad (8)$$

2.3. 새로운 '기준모선'의 개념

관례상 슬랙모선에 전압과 위상각 기준이 지정되어왔으나, 기존의 슬랙모선 개념을 좀 더 상세히 보완해 보고자 아래의 '두가지 기준모선'을 언급해 본다. 전력계통의 조류계산에 있어서 아래와 같은 두 가지의 기준모선을 설정할 수 있다.

- 1) 전력 슬랙모선(power slack bus): 일정한 크기의 전압이 지정되어 계통손실을 담당하는 모선
- 2) 위상각 기준모선(angle reference bus): 전 모선전압 위상각의 기준이 지정되는 모선, 전력 슬랙모선의 위치와는 별도로 시스템 내의 어떠한 모선에든지 지정이 가능하다.

3. 결론

위상각 기준은 시스템 중의 어떤 모선에라도 지정이 가능함을 이용하여 슬랙모선을 포함한 전 발전기 모선의 손실감도를 구하는 기법을 소개하였다. 전력계통의 조류계산에 있어서 두가지 기준모선을 정의하는 개념을 언급하였다.

참고 문헌

- [1] H.H.Happ, "Optimal Power Dispatch -A Comprehensive Survey", IEEE Transaction on PAS, vol.96, No.3, 1977, pp 841-854
 [2] H.H.Happ, "Pieswise Methods and Applications to Power Systems", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1980. pp293-297

Appendix

n -모선 시스템에서 θ_i 를 모선 i 의 위상각이라 할 때 $\phi_i = \theta_i - \theta_{i+1}$ (단, $i=1,2,\dots,n-1$) 라 정의하면 (1)식의 θ_{km} 은,

$$\theta_{km} = \begin{cases} \varphi_k + \varphi_{k+1} + \dots + \varphi_{m-1} & \text{if } k < m \\ 0 & \text{if } k = m \\ -(\varphi_m + \varphi_{m+1} + \dots + \varphi_{k-1}) & \text{if } k > m \end{cases} \quad (A1)$$

가 되고

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial P_k}{\partial \theta_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial P_k}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial P_k}{\partial \varphi_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial \theta_i} \right) = 0 \quad (A2)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_i} = 0 \quad (A3)$$

즉, (A2), (A3)가 0 이 되므로 (7)에서와 같은 full-Jacobian J^T 은 특이행렬이 된다.