포화 구동기를 갖는 시간 지연 시스템의 제어기 설계

Robust stabilization of uncertain time-delay systems with saturating actuator

조현주*, 박주현**
H.J. Cho*, Ju H. Park**

Abstract - This paper focuses on the problem of asymptotic stabilization for uncertain time-delay systems with saturating actuator. We propose a state feedback controller which maximizes the delay bound for guaranteeing stability of the system. Then, based on the Lyapunov method, a delay-dependent stabilization criterion is devised by taking the relationship between the terms in the Leibniz-Newton formula into account. The criterion is represented in terms of LMIs, which can be solved by various efficient convex optimization algorithm. Numerical examples are given to illustrate our main method.

Key Words : uncertain time-delay system, delay-dependent criterion, Lyapunov method, linear matrix inequality,

1. 서 론

시간 지연은 시스템의 성능을 저하시키거나 시스템의 안정성까지도 보장하지 못하게 한다[1]. 그래서 시간 지연에 대한 안정성 및 안정화에 대한 연구는 지난 수십 년 동안 계속 되어 왔다. 최근에는 시스템의 안정성 문제를 해결하기 위해 리아프노프 이론과 선형 행렬 부등식 방법이 널리 이용되고 있다[2]-[6]. 특히 선형 행렬 부등식은 변수나 행렬의 조정 없이도 다양한 동적 시스템의 안정도를 판별하거나 안정화 하는 조건을 이끌어 낼 수 있다. 일반적으로 시간 지연에 대한 안정성 및 안정화 조건은 시간 지연 독립 조건과 시간 지연 종속 조건으로 나뉜다. 후자는 시간 지연의 크기에 대한 정보를 고려하므로 대개 전자 보다 나은 결과를 나타낸다.

시스템의 제어기 설계시, 실제 시스템에서 전력 공급 장치는 포화 구동기의 형태로 전원을 공급한다. 따라서 포화 구동기는 비선형의 특성을 가진다.

본 논문에서는 Wu[3]와 Su[4]가 제안한 보조정리를 이용하여 포화 구동기를 갖는 시간 지연 시스템의 점근 안정화를 위한 제어기 설계 방법을 제시한다. 시스템의 안정화 판별은 리아프노프 이론과 선형 행렬 부등식을 적용하여 시스템의 강인 안정성을 보장하는 시간 지연 종속 조건으로 충분조건을 제시하며 이는 선형 행렬 부등식으로 표현한다. 이 부등식을 만족하는 해가 제어기 변수가 되며 이 해는 최근 개발된 여러 최적화 알고리즘을 이용하여 쉽게 구할 수 있다.

본 논문에서 R^n은 n차원의 유클리드 공간, $R^{n\times m}$은 $n\times m$의 실계수 행렬의 집합, $(\cdot)^T$는 벡터 또는 행렬의 전치, $*$ 는 대칭부분, I는 적절한 차원의 단위행렬이며 $diag\{\cdots\}$은 대각화 행렬을 의미한다. 대칭행렬 X에 대하여 $X>0$ 또는 $X\geq 0$는 행렬 X가 양한정(positive definite) 혹은 준양한정(positive semi-definite)을 나타낸다.

저자 소개
* 趙 賢 珠 : 嶺南大學 電氣工學科 碩士課程
** 朴 柱 炫 : 嶺南大學 電氣工學科 助敎授 · 工博

2. 본 론

2.1 문제 제기

본 논문에서는 다음과 같은 포화 구동기를 갖는 시간 지연 시스템을 고려한다.

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=(A+\triangle A)x(t) \\ \qquad +(A_1+\triangle A_1)x(t-d)+Bsat[u(t)], \quad t>0, \\ x(t)=\phi(t), \qquad t\in[-d,0], \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $x(t)\in R^n$은 상태벡터, $u(t)\in R^m$은 제어기 입력, $A\in R^{n\times n}$, $A_1\in R^{n\times n}$, 그리고 $B\in R^{n\times m}$는 상수 행렬, $\phi(t)$는 $t\in[-d,0]$에서의 초기조건, $d>0$는 시간 지연 상수이다.

불확정성은 다음과 같이 가정한다.

$$[\triangle A(t) \quad \triangle A_1(t)]=DF(t)[E \quad E_1] \tag{2}$$

여기서 D, E, E_1은 상수행렬이고, $F(t)$는 다음의 성질을 만족한다.

$$F^T(t)F(t)\leq I, \quad \forall t.$$

시스템 (1)의 점근 안정성을 보장할 수 있도록 다음의 궤환 제어기를 설계하고자 한다.

$$u(t)=2Kx(t), \tag{3}$$

여기서 $K\in R^{m\times n}$는 조절 상수 행렬이고 시간 지연 d의

최대 허용 범위와 그 때의 K를 구하는 것이 본 논문의 목적이다.

다음의 보조정리는 본 논문에서 제안하는 정리를 증명할 때 사용된다.

보조정리 1

자유롭게 조정 가능한 행렬 Y, T를 라이프니츠-뉴턴 방정식으로부터 다음과 같은 관계로 나타낼 수 있다.

$$2(\xi^T(t)Y+\xi^T(t-d)T) \times\left(\xi(t)-\xi(t-d)-\int_{t-d}^{t}\dot{\xi}(s)ds\right)=0. \tag{4}$$

보조정리 2

$Q=Q^T, H\ E$ 그리고 $R=R^T>0$인 적절한 행렬이 주어졌을 때 $F^TF\le R$를 만족하는 모든 F에 대하여 $Q+HFE+E^TF^TH^T<0$과 $Q+\lambda HH^T+\lambda^{-1}E^TRE<0$을 만족하는 $\lambda>0$인 λ가 존재할 때 필요충분조건이다.

2.2 제어기 설계

시스템 (1)에 대한 점근안정성을 위한 조건을 리아프노프 방정식과 선형행렬 부등식을 이용하여 다음의 정리와 같이 제시한다.

정리 1

주어진 d와 δ에 대하여 양한정 행렬 $V=V^T>0$, $W=W^T>0$와 M, N, G 그리고 준양한정 행렬 $\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ * & \Sigma_{22}\end{bmatrix}\ge 0$이 존재할 때 다음의 식이 성립하면 시스템 (1)은 점근안정하다.

$$\Pi=\begin{bmatrix}\Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & (1+d\delta)B & G^T & (1+d\delta)D & VE^T\\ * & \Pi_{22} & \Pi_{23} & 0 & 0 & 0 & VE_1^T\\ * & * & \Pi_{33} & d\delta B & 0 & d\delta D & 0\\ * & * & * & -I & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & -I & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -I & 0\\ * & * & * & * & * & * & -I\end{bmatrix}<0 \tag{5}$$

$$\Gamma=\begin{bmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12} & M\\ * & \Sigma_{22} & N\\ * & * & V\end{bmatrix}\ge 0, \tag{6}$$

여기서

$$\Pi_{11}=(1+d\delta)VA^T+(1+d\delta)G^TB^T+(1+d\delta)AV+(1+d\delta)BG+W+M+M^T+d\delta^2V+2\delta V+d\Sigma_{11},$$

$$\Pi_{12}=(1+d\delta)A_1V-M+N^T+d\Sigma_{12},$$

$$\Pi_{13}=d\delta VA^T+d\delta G^TB^T,$$

$$\Pi_{22}=-W-N-N^T+d\Sigma_{22},$$

$$\Pi_{23}=d\delta VA_1^T,$$

$$\Pi_{33}=-d\delta^2V,$$

으로 정의된다.

이 때 제어기 입력은 $u(t)=2GV^{-1}x(t)$으로 설계된다.

증명

포화 구동기를 기하학적 측면에서 살펴보면 $[0,1]$에서 원점을 지나는 기울기 1의 직선과 $[1,\infty]$에서 이루는 기울기 0의 직선으로 이루어져 있으며 두 직선의 교차점에서 비선형의 특성을 나타낸다. 이러한 포화 구동기는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$sat[u(t)]-\frac{1}{2}u(t)=\frac{1}{2}\Delta s(t)u(t), \tag{7}$$

여기서 $\Delta s(t)$는 -1과 1사이의 실수값을 가진다.

다음의 상태천이를 제안한다.

$$\xi(t)=(1+\delta t)x(t),\quad t>0$$

여기서 $0<\delta\le 1$이고, 위의 식으로 치환한 시스템 (1)의 폐루프 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t)&=\delta x(t)+(1+\delta t)\dot{x}(t)\\ &=\delta x(t)+(A+DF(t)E+BK+B\Delta s(t)K)\xi(t)\\ &\quad+(A_1+DF(t)E_1)\xi(t-d)\end{aligned}$$

이 식의 안정도를 판별하기 위하여 리아프노프 방정식을 다음과 같이 정의한다.

$$V(x_t)=V_1+V_2+V_3,$$

여기서

$$V_1=\xi^T(t)P\xi(t),$$

$$V_2=\int_{t-d}^{t}\xi^T(s)Q\xi(s)ds,$$

$$V_3=\int_{-d}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\xi}^T(s)P\dot{\xi}(s)dsd\theta,$$

$x_t=x(t+s),\ s\in[-\max d,0]$이다.

이 리아프노프 방정식을 시간에 관하여 미분하면,

$$\begin{aligned}\dot{V}_1&=\dot{\xi}^T(t)P\xi(t)+\xi^T(t)P\dot{\xi}(t)\\ &=\delta x^T(t)P\xi(t)+\delta\xi^T(t)Px(t)\\ &\quad+\xi^T(t)(A+DF(t)E+BK+B\Delta s(t)K)^TP\xi(t)\\ &\quad+\xi^T(t)P(A+DF(t)E+BK+B\Delta s(t)K)\xi(t)\\ &\quad+\xi^T(t)P(A_1+DF(t)E_1)\xi(t-d)\\ &\quad+\xi^T(t-d)(A_1+DF(t)E_1)^TP\xi(t)\end{aligned}$$

$$\dot{V}_2=\xi^T(t)Q\xi(t)-\xi^T(t-d)Q\xi(t-d),$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_3&=d\dot{\xi}^T(t)P\dot{\xi}(t)-\int_{t-d}^{t}\dot{\xi}^T(s)P\dot{\xi}(s)ds\\ &=d\delta^2x^T(t)Px(t)+d\delta x^T(t)P((A+DF(t)E+BK\\ &\quad+B\Delta s(t)K)\xi(t)+(A_1+DF(t)E_1)\xi(t-d))\\ &\quad+d\delta((A+DF(t)E+BK+B\Delta s(t)K)\xi(t)\\ &\quad+(A_1+DF(t)E_1)\xi(t-d))^TPx(t)\\ &\quad+d((A+DF(t)E+BK+B\Delta s(t)K)\xi(t)\\ &\quad+(A_1+DF(t)E_1)\xi(t-d))^TP((A+DF(t)E+BK\\ &\quad+B\Delta s(t)K)\xi(t)+(A_1+DF(t)E_1)\xi(t-d))\\ &\quad-\int_{t-d}^{t}\dot{\xi}^T(s)P\dot{\xi}(s)ds,\end{aligned}$$

준양한정 행렬 $X=\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12}\\ * & X_{22}\end{bmatrix}\ge 0$에 대해서 다음이

성립한다.

$$d\zeta^T(t)X\zeta(t) - \int_{t-d}^{t} \zeta^T(t)X\zeta(t)ds = 0, \tag{8}$$

여기서 $\zeta(t) = [\, \xi^T(t) \quad \xi^T(t-d)\,]^T$이다.

또한 $x(t) = \frac{1}{1+\delta t}\,\xi(t) \le \xi(t)$이 성립한다.

위 식과 보조정리 1, 식 (8), 그리고 여수 정리를 사용하여 $\dot{V}$를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\dot{V} \le \zeta^T(t)\Pi_1\zeta(t) - \int_{t-d}^{t} \eta^T(t,s)\Gamma_1\eta(t,s)ds, \tag{9}$$

여기서

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} \Pi_{(1,1)} & \Pi_{(1,2)} & \Pi_{(1,3)} \\ * & \Pi_{(2,2)} & \Pi_{(2,3)} \\ * & * & \Pi_{(3,3)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1+d\delta)PB \\ 0 \\ d\delta PB \end{bmatrix} \Delta s(t)[K \;\; 0 \;\; 0] + \begin{bmatrix} K^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta s^T(t)[(1+d\delta)B^TP \;\; 0 \;\; d\delta B^TP] + \begin{bmatrix} (1+d\delta)PD \\ 0 \\ d\delta PD \end{bmatrix} F(t)[E \;\; E_1 \;\; 0] + \begin{bmatrix} E \\ E_1 \\ 0 \end{bmatrix} F^T(t)[(1+d\delta)D^TP \;\; 0 \;\; d\delta D^TP],$$

$$\Pi_{(1,1)} = 2\delta P + (1+d\delta)PA + (1+d\delta)A^TP + (1+d\delta)PBK + (1+d\delta)K^TB^TP + Q + Y + Y^T + d\delta^2P + dX_{11},$$

$$\Pi_{(1,2)} = (1+d\delta)PA_1 - Y + T^T + dX_{12},$$

$$\Pi_{(1,3)} = d\delta A^TP + d\delta K^TB^TP,$$

$$\Pi_{(2,2)} = -Q - T - T + dX_{22},$$

$$\Pi_{(2,3)} = d\delta A_1^TP,$$

$$\Pi_{(3,3)} = -d\delta^2P,$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & Y \\ * & X_{22} & T \\ * & * & P \end{bmatrix},$$

$\eta(t,s) = [\,\xi^T(t) \quad \xi^T(t-d) \quad \dot{\xi}^T(s)\,]^T$이다.

이 때 $\Pi_1 < 0$, $\Gamma_1 \ge 0$이면 $\dot{V} < 0$이다.

Π_1에 보조정리 2를 차례로 두 번 적용하고, 여수 정리를 사용한 후, $diag\{P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, I, I, I, I\}$를 양측에 곱하고, 같은 방식으로 Γ_1에 $diag\{P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}\}$을 양측에 곱한다. 또 $V = P^{-1}$, $G = KP^{-1}$, $W = P^{-1}QP^{-1}$, $M = P^{-1}YP^{-1}$, $N = P^{-1}TP^{-1}$, $\Sigma_{11} = P^{-1}X_{11}P^{-1}$, $\Sigma_{12} = P^{-1}X_{12}P^{-1}$, $\Sigma_{22} = P^{-1}X_{22}P^{-1}$로 정의하고 식을 정리하면, 정리 1의 (5), (6)식을 얻는다. ■

참조 1

정리 1에서의 선형 행렬 부등식은 최근에 개발된 여러 최적화 알고리즘을 사용하여 쉽게 구할 수 있다. 본 논문에서는 Matlab사의 LMI Control Toolbox를 사용한다.

2.3 수치 예제

앞 절에서 제시한 결과의 유용성을 보이기 위하여 다음의 예제를 고려하자.

예제 1

시스템 (1)에 대하여 고려한다.

여기서 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -0.8 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

이고, 불확정성 행렬은 다음과 같은 성질을 만족한다.

$$\| \Delta A(t) \| \le 0.2, \quad \| \Delta A_1(t) \| \le 0.2, \qquad \forall t$$

정리 1에서 제시한 선형 행렬 부등식에 적용하여 해를 구하면 표 1의 결과를 얻는다. 이 때 $\delta = 1$로 정한다. 1에 따르면 다른 논문에 비해 d값의 범위가 커짐을 알 수 있다.

	Su *et al.*[5],[6]	Ours
d	0.2841	0.4455

표 1. 시간 지연의 최대 허용 범위

3. 결 론

본 논문에서는 포화 구동기를 갖는 시간 지연 시스템에서 시간 지연의 최대 허용 범위 내에서 점근 안정성을 보장하는 제어기를 설계하였다. 본 연구에서는 리아프노프 방정식을 이용하여 제어기 설계를 제안하였다. 수치예제는 본 논문의 결과가 기존의 결과보다 향상되었음을 보여준다.

참 고 문 헌

[1] J. Hale and S.M. Verduyn Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1993.

[2] S. Boyd, L.E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, Philadelphia, PA:SIAM, 1994.

[3] M. Wu, Y. He, J.-H She, and G.-P Liu, "Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems", Automatica, Vol. 40, pp. 1435-1439, 2004.

[4] N.-J. Su, H.-Y Su, and J. Chu, "Delay dependent robust H_∞ control for uncertain time-delay systems", IEE Proceeding on Control Theory Applications, Vol. 150, no. 5, pp. 489-492, 2003.

[5] H. Su, and J. Chu, "stabilization of class of uncertain time-delay systems containing saturating actuators", Intrenational Journal of System Science, Vol. 30, no. 11, pp. 1193-1203, 1999

[6] H.-Y Su, F. Liu, and J. Chu, "Robust stabilization of uncertain time-delay systems containing saturating actuators", IEE Proceeding on Control Theory Applications, Vol. 148, no. 4, pp. 323-328, 2001.