

# 능동 소음 제어 시스템의 2차 경로 비선형 특성을 보상하기 위한 적응 비선형 Filtered-X Least Mean Square (FX-LMS) 알고리즘

## A Nonlinear Filtered-X LMS Algorithm for the Nonlinear Compensation of the Secondary Path in Active Noise Control

정인석\*, 김덕호\*\*, 남상원\*\*\*  
(I.S. Jeong, D.H. Kim, S.W. Nam)

**Abstract** - In active noise control (ANC) systems, the convergence behavior of the conventional Filtered-X Least Mean Square (FXLMS) algorithm may be affected by nonlinear distortions in the secondary path (e.g., in the power amplifiers, loudspeakers, transducers, etc.), which may lead to degradation of the error-reduction performance of the ANC systems. In this paper, a stable FXLMS algorithm with fast convergence is proposed to compensate for undesirable nonlinear distortions in the secondary-path of ANC systems by employing the Volterra filtering approach. In particular, the proposed approach is based on the utilization of the conventional P-th order inverse approach to nonlinearity compensation in the secondary path of ANC systems. Finally, the simulation results showed that the proposed approach yields a better convergence behavior in the nonlinear ANC systems than the conventional FXLMS.

**Key Words** : ANC, FXLMS, Nonlinear Secondary path, Adaptive Volterra filtering.

### 1. 서론

능동소음제어(Active Noise Control: ANC)는 그동안 적응 필터링의 응용 분야 중 하나로 활발히 연구되어 왔다[1,2,4]. 구체적으로 그림 1과 같은 Filtered-X LMS (FXLMS) 적응 알고리즘이 능동소음제어를 위해 널리 사용되어왔다[4,6]. 이 알고리즘은 능동소음제어 시스템에 적용하기 위해 LMS 알고리즘을 변형한 형태인데, 2차 경로 상에 위치한 소자 특성들이 원하지 않은 특성을 보일 때 이를 보상하기 위해 2차 경로와 동일한 전달함수의 필터를 이용하여 참조 신호를 미리 필터링한다[1,3,4,5,6]. 그러나, 2차 경로에서 발생하는 어느 정도 이상의 비선형 특성(예:  $\sigma^2=4.0$  [6])은 전체 ANC 시스템의 성능을 감소시킬 수 있다. 예를 들어, 어느 수준 이상의 비선형 특성은 잔여 오차를 증가시키고, LMS 알고리즘을 발산하게 한다[5,6,7,8]. 일반적으로, 2차 경로는 DAC, smoothing filter, 전력 증폭기, loudspeaker, 음향경로(즉, loudspeaker로부터 오차 감지 마이크로폰까지의), 오차 감지 마이크로폰, pre-amplifier, anti-aliasing filter, 그리고 ADC로 구성된다. 특히, 2차 경로에서의 주요 비선형 왜곡 요인은 신호 converter (ADC 및 DAC), 전력 증폭기, 그리고 transducer (speakers 및 actuators) 등이다[4]-[7]. 이러한 비선형 특성은 digital 전기 신호를 analog 전기 신호 또는 기

계적인 신호로 비선형적으로 변환시키게 되어, ANC시스템의 잔여 오차를 증가시켜서 적응 알고리즘의 수렴 성능을 감소시키고, 적응 제어를 불안정한 상태로 만들 수 있으며, 극단적인 경우 전체 ANC시스템을 발산하게 한다[5,6]. 이러한 이유로, ANC 시스템의 안정화를 위해 2차 경로의 정확한 추정과 2차 경로의 비선형 특성 보상이 요구되었다[2,4,5,6].

본 논문에서는 2차 경로의 비선형성이 존재하더라도 ANC 시스템이 여전히 좋은 소음제어 특성과 안정성을 보이도록, 3차 Volterra 필터링과 p차 역 시스템을 적용한 비선형 FX-LMS 알고리즘을 제안한다. 이 접근 방법은 기존의 2차 경로가 선형인 경우 FX-LMS의 유도 조건, 즉, 그림 1에서 두 선형 시스템  $W(z)$ 와  $S(z)$ 사이의 순서를 교환하여도 그 전체 입출력은 동일해야 하는 조건[1]을 2차 경로가 비선형 특성을 갖는 경우, 일반적으로 두 시스템간의 교환성은 성립할 수 없으며, 2차 경로 전단에 임의의 비선형 시스템을 배열하여 두 비선형 시스템이 서로 바뀌어도 전체 입출력이 동일하다는 조건을 만족시켜야 한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되었다. 2절에서는 Volterra 급수를 이용한 모델링, 비선형 소자를 포함하는 2차 경로의 식별을 서술하였다. 3절에서는 p차 역 필터 계수의 추정을 통한 제안한 비선형 FX-LMS 알고리즘을 유도한다. 4절에서는 제안한 비선형 FX-LMS와 기존의 FX-LMS간의 성능 비교를 위한 모의실험 결과를 보여준다

### 저자소개

- \* 鄭仁錫 : 漢陽大學 電子通信電波 工學科 碩士課程
- \*\* 金德昊 : 漢陽大學 電子通信電波 工學科 碩士課程
- \*\*\* 南尚沅 : 漢陽大學 電子通信電波 工學科 正教授·工博

### 2. 3차 볼테라 필터를 사용한 2차 경로 식별

#### 2.1. 적응 볼테라 필터링

Volterra 급수는 메모리를 가진 Taylor 급수의 확장된 형

대이다. 특히, 2차 경로 식별의 3차 Volterra 급수 표현은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_1(i)x(n-i) + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1-i} h_2(i,j)x(n-i)x(n-j) + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1-i} \sum_{k=j}^{N-1-i-j} h_3(i,j,k)x(n-i)x(n-j)x(n-k) \quad (1)$$

여기서,  $h_1(i)$ ,  $h_2(i,j)$ , 그리고  $h_3(i,j,k)$ 은 각각 1차, 2차, 그리고 3차 Volterra 커널(kernel)이고, 2차 및 3차 비선형 커널들(즉,  $h_2(i,j)$ 와  $h_3(i,j,k)$ )은 대칭적이라고 가정한다. 특히, 볼테라 시스템의 출력은 시스템 커널들 관점에서 선형이므로, 기존의 선형 필터 이론이 비선형 시스템 분석에 적용될 수 있다[2,11]. 따라서, 입·출력 관계는 다음의 벡터형식으로 간단히 표현할 수 있다.

$$y(n) = \mathbf{h}_v^T \mathbf{x}_v(n) \quad (2)$$

여기서,  $\mathbf{h}_v$ 는 선형, 2차, 그리고 3차 볼테라 커널들로 구성된 Volterra 커널 벡터이고,  $\mathbf{x}_v(n)$ 는 입력의 선형, 2차, 그리고 3차 비선형 조합으로 구성된 Volterra 입력벡터이다.

## 2.2. 2차 경로 식별

실제적인 ANC 시스템을 구동하기 전에 2차 경로에 대한 식별이 먼저 시행되어야 하며, 이때 추정된 2차 경로의 임펄스 응답 함수로 입력 신호를 필터링(즉, filtered-X 알고리즘)하게 된다. 또한, 추정된 비선형 2차 경로와 2차 경로의 선형 부분에 대한 선형 역 필터(linear inverse filter) (즉,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ 과  $S_1^{-1}$ )는 3장에서 다룬 두 비선형 시스템이 교환법칙이 성립하기 위해 필요한 부분이다 ((16) 참조).

## 3. 비선형 FX-LMS 알고리즘의 유도

### 3.1. 선형 FX-LMS 알고리즘

그림 1에서 시간  $n$ 에서의 적응 필터  $W(z)$ 의 계수 와 source 입력 신호를 각각 벡터 형태로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{w}(n) = [w_0 \ w_1 \ w_2 \ \dots \ w_{N-1}]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{x}(n) = [x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{N-1}]^T \quad (4)$$

특히,  $N$ 은 적응 필터  $\mathbf{w}(n)$ 의 차수이다. 입력 신호가 적응 필터와 2차 경로를 통과한 출력은 다음과 같다.

$$\hat{d}(n) = s(n) * \{\mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)\} \quad (5)$$

여기서,  $s(n)$ 은 2차 경로의 임펄스 응답이고  $*$ 는 선형 컨볼루션을 의미한다. 따라서 잔여 출력 오차 신호는 다음과 같이 표현된다.

$$e(n) = d(n) - \hat{d}(n) = d(n) - s(n) * \{\mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)\} \quad (6)$$

특히, ANC 시스템에서의 적응 필터링의 목적은 순간적인 제공오차  $\xi(n) = e^2(n)$ 을 최소화하는 것이다. 이를 위해 널리 사용되는 방법은 다음의 LMS 알고리즘이다.

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \frac{\mu}{2} \nabla \xi \quad (7)$$

(7)에서  $\nabla \xi(n)$ 는 시간  $n$ 에서 순간적인 평균제공오차(MSE)의 gradient 값이며 다음과 같이 표현된다[1,4,5].

$$\nabla \xi(n) = 2\{\nabla e(n)\}e(n) \quad (8)$$

(6) 으로부터 잔여 출력 오차 신호의 gradient 값을 유도할 수 있다. 즉,

$$\nabla e(n) = \frac{\partial e(n)}{\partial \mathbf{w}(n)} = -s(n) * \mathbf{x}(n) \quad (9)$$

여기서, 주의할 것은  $s(n)$ 은 상수 값을 나타내고,  $\mathbf{x}(n)$ 은 벡터를 나타낸다. (7)-(9)를 이용하면 선형 FX-LMS 알고리즘의 계수 갱신 식은 다음과 같다.

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu e(n)\{s(n) * \mathbf{x}(n)\} \quad (10)$$

### 3.2. 비선형 FX-LMS 알고리즘

우선, 비선형 FX-LMS 알고리즘을 유도하기 위해서는 수학적으로 두 시스템  $\mathbf{W}$ 와  $\mathbf{S}$ 간의 교환법칙이 성립해야 한다 [1]. 즉, 그림 1에서 두 비선형 시스템의 순서에 상관없이 전체 시스템  $\mathbf{Q}$ 는 동일한 출력을 보여야 한다. 이를 가능하게 하기 위해서는 앞단의 시스템  $\mathbf{W}$ 를 뒷단의 시스템  $\mathbf{S}$ 의  $p$ 차 역 시스템으로 구현하면 된다[2].

두 비선형 시스템  $\mathbf{W}$ 와  $\mathbf{S}$ 간의 교환법칙이 성립하기 위해서는 입·출력 관계는 다음과 같아야 한다.

$$Q[x(n)] = d(n) + \sum_{i=p+1}^{\infty} Q_i[x(n)] \quad (11)$$

(11)에서,  $d(n) = \mathbf{p}^T(n)\mathbf{x}(n)$ 이며, 두 Volterra 시스템  $\mathbf{W}$ 와  $\mathbf{S}$ 의 입·출력 관계는 각각 다음과 같다.

$$y(n) = \sum_{p=1}^{\infty} W_p[x(n)] \quad (12)$$

$$\hat{d}(n) = S[y(n)] = \sum_{m=1}^{\infty} S_m[y(n)] \quad (13)$$

Volterra 연산자  $Q_i$ 을  $S_m$ 와  $W_p$ 에 관하여 유도하기 위해서 (11)-(13)에  $x(n)$ 을  $cx(n)$ 으로 대체하면 다음 식을 얻을 수 있다[2].

$$\hat{d}(n) = Q[cx(n)] = \sum_{i=1}^{\infty} c^i Q_i[x(n)] \quad (14)$$

$$\hat{d} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p_1=1}^{\infty} \dots \sum_{p_m=1}^{\infty} c^{p_1+\dots+p_m} S_m\{y_{p_1}, \dots, y_{p_m}\} \quad (15)$$

(14)와 (15)에서  $c$ 의 같은 급수에 대한 계수를 구하면 Volterra 연산자  $Q_i$ 은  $S_m$ 과  $W_p$ 에 관하여 표현된다. 식(11)과 같은 결과를 보이기 위해  $W_p$ 를 구하면(즉,  $Q_i[x]=d(n)$ ,  $Q_2[x]=0$ ,  $Q_3[x]=0$ 이 되도록), 다음과 같이 2차 경로 시스템  $\mathbf{S}$ 에 대한 역 비선형 시스템  $\mathbf{W}$ 의 1, 2, 3차 Volterra 커널  $W_1, W_2, W_3$ 을 구할 수 있다[2].

$$W_1 = S_1^{-1}, \quad W_2 = -S_1^{-1}S_2W_1, \quad W_3 = -S_1^{-1}\{S_2[W_1+W_2] - S_2W_1 - S_2W_2 + S_3W_1\} \quad (16)$$

즉, (16)을 만족하는 역 시스템  $\mathbf{W}$ 를 설계하면 두 비선형 시스템의 순서에 상관없이 전체 시스템  $\mathbf{Q}$ 의 입·출력관계는 1차 경로의 입·출력관계와 동일하게 된다. 따라서, 기존의 선형 ANC 시스템에서의 FX-LMS 알고리즘과 동일한 형태를 갖는, 비선형 FX-LMS 알고리즘을 유도할 수 있고, ANC 시스템의 2차 경로 비선형 특성 보상에 적용할 수 있다. 즉, 식

(10)과 유사한 방법으로, 2차 경로가 비선형인 경우에도  $W$ 의 계수 갱신 식을 구할 수 있다.

$$w_1(n+1) = w_1(n) + \mu e(n) \{s_v^T(n)x_v(n)\} \quad (17)$$

식(17)에서  $s_v^T(n)$ 는 비선형 2차 경로에 대한 볼테라 커널 벡터를 나타내고,  $x_v(n)$ 는 입력 신호의 비선형 조합인 볼테라 입력 벡터를 나타낸다.

#### 4. 모의실험

본 논문에서 제안한 비선형 FX-LMS 알고리즘의 성능을 검증하기 위해, 2차 경로  $S(z)$ 에서 발생하는 비선형 시스템 모델을 다음과 같이 적용하였다[9].

$$\hat{d}(n) = 1.01333y(n) - 0.01333y^3(n) \quad (18)$$

위 비선형 모델은 digital to analog converter (DAC)에서 발생하는 비선형성을 나타내는 모델로서, 1차 경로를 지나는 소음 신호를 제거하기 위해서, 2차 경로에서 전기적인 신호를 음향적인 신호로 변환할 때 DAC를 지나면서 비선형성이 발생하게 된다[6,7]. 성능 평가 척도로 다음과 같은 정규화된 평균 자승 오차 (NMSE)를 이용하였다[5].

$$NMSE = 10 \log_{10} \frac{E\{e^2[n]\}}{\sigma_d^2} \quad (19)$$

(19)에서,  $\sigma_d^2$ 은 1차 경로를 통과한 참조 신호  $d(n)$ 의 분산 (variance)을 나타낸다. 또한, 입력 신호  $x(n)$ 은 균일하게 분포(uniformly distributed)된 랜덤 신호를 사용하였고,  $v(n)$ 는 가우시안 잡음이고 측정 시 발생하는 오차 신호를 나타낸다. 시뮬레이션 결과인 그림 5에서는 i) 선형 FX-LMS의 경우는 SNR=60dB를 가정하여 실험하였고, ii) 비선형 FX-LMS의 경우는 SNR=60, 30, 20dB의 세 가지 경우를 고려하였다. 2차 경로의 비선형성이 존재하는 상황에서 선형 FX-LMS는 큰 bias가 걸려 약 -15dB까지 밖에 수렴하지 못했다. 그러나, 제안된 비선형 FX-LMS는 여러 경우의 출력 잡음 존재 하에서도 선형 FX-LMS 보다 좋은 수렴 성능을 보여주고 있다. 그림 6은 SNR=60 dB의 상황에서 선형 FX-LMS와 제안된 비선형 FX-LMS 사이의 잔여 오차(residual error)를 보여주고 있다. 여기서도, 비선형 FX-LMS는 2차 경로의 비선형성을 보상하여 효과적으로 참조 신호(1차 경로  $P(z)$ 를 통과한 신호)를 제거하는 것을 확인할 수 있다.

#### 5. 결론

ANC 시스템에서 비선형 2차 경로에 의해 발생하는 약한 비선형의 경우에도 ANC 시스템의 수렴 성능과 안정성에 영향을 준다. 따라서, 본 논문에서는 적용 3차 Volterra 필터와 p차 역 볼테라 필터링을 사용하여 2차 경로에서 존재하는 비선형 특성을 적용적으로 보상하기 위한 비선형 FX-LMS 알고리즘을 제시하였다. 모의실험 결과, 제안된 비선형 FX-LMS 알고리즘이 일반적인 FX-LMS 알고리즘보다 높은 오차 감소 성능과 높은 안정성을 보임을 확인하였다.

**Acknowledgement:** This study was supported by a grant of the Korea Health 21 R & D Project, Ministry of Health & Welfare, Republic of Korea (02-PJ3-PG6 -EV08-0001).

#### 참고 문헌

- [1] S.M. Kuo and D.R. Morgan, *Active Noise Control Systems: Algorithms and DSP Implementations*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1996.
- [2] M. Schetzen, *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1980.
- [3] E. Bjarnason, "Analysis of the filtered-X LMS algorithm," *IEEE Trans. Speech and Audio Processing*, vol. 3, no. 6, pp. 504-514, Nov. 1995.
- [4] L. Tan and J. Jiang, "Adaptive Volterra filters for active control of nonlinear noise processes," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, no. 8, pp. 1667-1676, Aug. 2001.
- [5] V. Debrunner and D. Zhou, "Active noise control with weak nonlinearities in the secondary path," *Proc. of MWSCAS'02*, Tulsa, OK, Aug. 2002.
- [6] M.H. Costa, J.C.M. Bermudez, and N.J. Bershad, "Statistical analysis of the filtered-X LMS algorithm in systems with a nonlinear secondary path," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 50, no.6, pp. 1327-1342, Jun. 2002.
- [7] O. Agazzi and D.G. Messerschmitt, "Nonlinear echo cancellation of data signals," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 30, no.11, pp. 1327-1342, Nov. 1982.

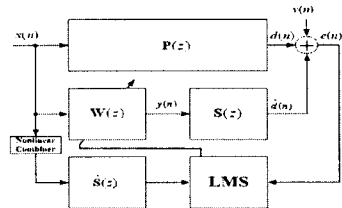


그림 2. 능동 소음 제어 시스템을 위한 비선형 FXLMS 알고리즘

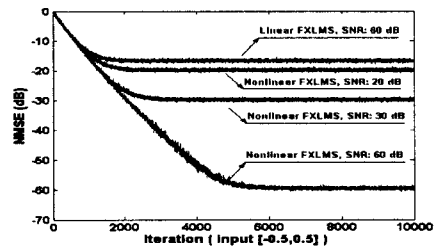


그림 3. 기존 FX-LMS와 제안한 비선형 FX-LMS의 NMSE 특성 비교.

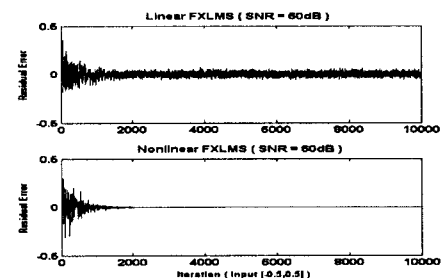


그림 4. 기존 선형 FXLMS와 제안한 비선형 FXLMS의 잔여 오차 비교.