코어를 포함한 주조에 대한 기하학적 접근

박 용 희°, 배 상 원, 안 희 갑, 좌 경 룡

한국과학기술원 전자전산학과 전산학전공

{yhpark,swbae,heekap,kychwa}@jupiter.kaist.ac.kr

Casting an Object with a Core

Yong-Hee Park°, Sang Won Bae, Hee-Kap Ahn, Kyung-Yong Chwa

Division of Computer Science, Department of Electrical Engineering and Computer Science

Korea Advanced Institute of Science and Technology

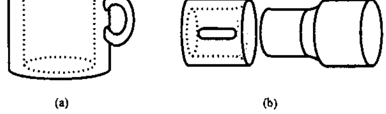
요 약

본 논문에서는 코어를 이용한 주조에 대한 계산 기하학 문제를 다룬다. 주조는 녹인 물질을 주형 안에 주입해서 응고시킨 후 주형을 제거하는 방법으로, 주물은 주형의 내부 공동의 모양을 갖게 된다. 코어는 두 개의 주형으로는 만들 수 없는 물체를 주조하기 위한 부속물로서, 두 개의 주요 주형이 제거되는 방향과는 다른 방향으로 제거된다. 따라서 코어를 사용하면 두 개의 주형으로는 제작할 수 없는 물체를 주조로 만들 수 있게 된다. 본 논문에서는 어떤 물체가 주어졌을 때, 코어를 사용하는 주조로 만들 수 있는지를 증명할 수 있는 필요충분 조건을 제시한다. 또한, 다면체의 물체를 테스트하는 $O(n^3 \log n)$ 의 알고리즘과, 동일한 시간안에 주형의 형태를 만들어낼 수 있는 알고리즘을 제시한다.

1 서론

주조(casting)는 기계 공업 발전의 기반이 되는 산업기계 부품의 제작은 물론 소비재의 제조에도 폭넓게 쓰이고 있으며, 계산기하학을 통해 주조 과정에서 발생하는 문제들을 풀기 위한 여러가지 알고리즘들이 제안되어왔다.

주조는 녹인 물질을 주형 사이에 주입해서 응고시킨 후 주형을 제거하는 제조방법으로, 응고된 물질은 주형 내부 공동(cavity)의 모양을 갖는다. 가장 단순한 형태인, 두 개의 주형으로 이루어진 주조에 대한 연구는, 이차원과 모래주조를 포함하는 삼차원의 일부 케이스에 대해서 이루어졌다. 두 개



그 림 1: (a) 머그컵은 두 개의 주형으로는 주조가 불가능하다. (b) 코어를 추가하면, 머그컵의 주조가 가능하다.

의 주형을 갖는 주조는 비용과 시간의 측면에서 매우 유리하지만, 머그컵 그림 1 (a)과 같은 상당히 단순한 물체도 주조할 수 없다는 맹점을 가지고 있다. 이 때, 제 3의 주형, 즉 코어를 그림 1 (b)와 같이 추가하면 주조의 방법으로 머그컵을 제조할 수 있게 된다. 이와 같이 코어의 이용은 주조로 제작할 수 있는 물체의 범위를 넓힐 수 있다. 코어의 이용은 실제 주조제작에서 이미 널리 쓰이고 있어 이에 대한 이론적인 연구도 요구되고 있다. Chen과 Chou, 그리고 Woo [3]는 주물을 포함하는 볼록 다면체로부터 원래의 주물을 제외한 후 얻어지는 구성물을 "포켓"이라 정의하고, 이를 이용한 휴리스틱 알고리즘을 제안하였다. 제거 방향 중에서 완전히 보이는 포켓의 개수를 최대화하는 방향을 찾는 방식으로, 주조 가능한 방향이 있는 경우에도 이를 찾지 못하는 단점이 있다. 이 방법에 기초하여 Hui [4]가 지수 시간을 갖는 알고리즘을 제안하였지만, 이 방법 역시 언제나 답을 내지는 못한다.

본 논문에서는 세 개의 주형을 갖는 주조를 다룬다. 두 개의 주요주형은 서로 반대의 방향으로 제거되고, 세 번째 주형인 코어는 주요 주형이 제거되는 방향과는 다른 제 3의 방향으로 제거된다. 우리는 다면체를 포함하는 일반적인 삼차원 물체에 대해서 그 물체가 세 개의 주형으로 주조 가능한지 여부를 결정할 수 있는 필요충분한 성질을 제시한다. 또한, 삼차원 다면체에 대해, 주조가능한지 여부를 테스트하고, $O(n^3)$의 복잡도를 갖는 주형을 출력할 수 있는 $O(n^3 \log n)$의

알고리즘을 제시한다.

2 본론

본론에 앞서 앞으로 이용할 몇 가지 기호와 용어를 정의한다. 만들고자 하는 주물을 Q라 하고, 주물을 충분히 포함하는 상자를 B라 한다. 전체 주형을 이루는 세 개의 주형을 각각 C_r, C_b, C_c로 놓고, 각 주형이 분리되는 세 방향을 각각 $\vec{d}_m$, $-\vec{d}_m$, 그리고 $\vec{d}_c$라 놓는다. 여기서, C_c가 코어에 해당한다.

$\vec{d}$ 방향에서의 *그림자 부피*란, $B \setminus int(Q)$에 속하는 점들 가운데서 $\vec{d}$방향으로의 무한대의 지점으로부터 오는 빛이 Q에 가려 비추어지지 않는 모든 점들의 집합을 말한다. $\vec{d}$ 방향에서의 *그림자 표면*은 $\vec{d}$ 방향에서의 그림자 부피가 Q의 표면과 닿는 부분을 말한다. $\vec{d}_m$, $-\vec{d}_m$, $\vec{d}_c$방향에서의 그림자 부피를 각각, $\mathcal{V}_r$, $\mathcal{V}_b$, $\mathcal{V}_c$로 놓고, 각 방향에서의 그림자 표면을 각각 $\mathcal{S}_r$, $\mathcal{S}_b$, $\mathcal{S}_c$로 놓는다. 만약 Q가 어떤 방향 $\vec{d}$에 대해서 그 방향의 모든 선과 연결된 하나의 부분에서 만나면 Q를 $\vec{d}$ 방향으로 monotone하다고 한다. 만약 점 p에서 시작하는 $\vec{d}$의 방향으로 빛이, 점의 집합 S과 하나의 연결된 선으로 만나는 경우에, p가 $\vec{d}$의 방향으로 점의 집합 S에 관해 ray-monotone하다고 한다. 각 주형이 각각 $\vec{d}_m$, $-\vec{d}_m$, 그리고 $\vec{d}_c$의 방향으로 다른 주형이나 주물과의 충돌없이 어떤 순서로도 제거될 수 있는 경우에 대해 주물 Q가 *주조가능*하다고 한다. 즉, Q가 주조가능하다는 것은 각 주형을 임의의 순서로 직선이동을 통해 제거할 수 있음을 의미한다.

2.1 주조가능한 물체의 특성

주어진 물체 Q가 주어진 방향 $\vec{d}_m$, $\vec{d}_c$에 대해 주조 가능한지를 아래와 같이 테스트한다.

이 문제를 풀기 위해서는 먼저 주조가능한 물체의 특성은 무엇인지를 알아야한다. 물체가 주조 가능하기 위해서는 C_r과 C_b에 포함될 수 없는 부분이 모두 코어 부분에 포함되어야 한다. 위와 아래의 방향으로의 빛으로부터 생성되는 그림자 부피의 교집합을 $\mathcal{V}_M$이라 두면, 이것은 반드시 코어에 포함되어야 한다. 어떤 부피 $\mathcal{V}$를 코어의 방향으로 직선이동시키면서 만나는 상자안의 모든 점들과 $\mathcal{V}$자체를 합쳐 $\mathcal{V}^*$라고 하자. $\mathcal{V}_M$이 코어의 방향으로 물체나 다른 주형과의 충돌없이 빠져나가기 위해서는 $\mathcal{V}_M^*$ 역시 코어에 포함되어야 한다. 또한 물체와 $\mathcal{V}_M$을 제외한 나머지 부분들이 적어도 하나의 제거방향으로는 제거될 수 있어야 한다. 이와 같은 조건을 모두 만족하면 항상 주조 가능함을 보일 수 있다. 물체와 $\mathcal{V}_M^*$을 합집합하여 새로운 물체로 두고, 이 물체에 대해 같은 방법으로 그림자 부피를 구한 후 그것을 $\mathcal{V}_o$라 하면, 위의 조건 하에서 $\mathcal{V}_o^*$ 역시 항상 코어의 방향으로 제거될 수 있음을 알 수 있다. 즉, $\mathcal{V}_M^*$과 $\mathcal{V}_o^*$의 합집합이 코어에 포함된다. 따라서 다음과 같은 결론을 유추할 수 있다.

정 리 1. *주어진 코어의 제거방향* $\vec{d}_c$*에 대해,* Q*가 주조가능하기 위한 필요충분 조건은* $\mathcal{V}_M^*$ *이* $\vec{d}_c$*에 대해 ray-monotone이고* $B \setminus (Q \cup \mathcal{V}_M^*)$ *이* $\{\vec{d}_m, -\vec{d}_m, \vec{d}_c\}$*에 대해 ray-monotone한 것이다.*

위의 정리를 이용하면, 물체가 주조가능할 때에는 항상 $\mathcal{V}_M^*$와 $\mathcal{V}_o^*$의 합집합이 항상 코어의 방향으로 제거될 수 있음을 알 수 있다. 이 합집합을 $\mathcal{V}^*$라 하자.

또 다른 중요한 성질은 다음의 보조 정리가 설명하고 있다.

보조정리 2. $\mathcal{V}^*$*이* $\vec{d}_c$*의 방향으로 ray-monotone하면,* $Q \cup \mathcal{V}^*$*이* $\vec{d}_m$*-monotone 하다.*

위의 보조 정리를 통해 우리는 물체와 $\mathcal{V}^*$의 합집합을 새로운 물체로 생각할 때, 이 물체가 항상 반대방향으로 제거되는 두 개의 주형을 갖는 주조의 방법으로 만들어짐을 알 수 있다.

반대방향으로 제거되는 두 개의 주형에 관한 논문을 통해 우리는 다음의 사실을 알 수 있다.

보조정리 3 (Ahn et. al. [2]). *Q가 두 개의 주형으로 주조가능하기 위한 필요충분 조건은 Q가 수직으로 monotone한 것이다.*

위의 두 보조 정리를 이용하여 우리는 다음과 같이 결론을 내릴 수 있다.

정 리 4. *주어진 코어의 제거방향* $\vec{d}_c$*에 대해,* Q*가 주조가능하기 위한 필요충분 조건은* $\mathcal{V}^*$*가* $\vec{d}_c$ *방향으로 ray-monotone한 것이다.*

이와 같은 특성을 이용하여, 물체가 주조가능한지 여부를 테스트하는 알고리즘을 설계한다.

2.2 주조가능 여부를 테스트하고 주형을 결정하는 알고리즘

이번 장에서는 주어진 주조 방향에 대해 원하는 다면체가 주조가능한지 여부를 테스트하는 $O(n^3 \log n)$의 알고리즘을 제안한다. 전체 알고리즘의 구조는 다음과 같다.

1. $\mathcal{S}_M \cap \mathcal{S}_c$이 $\emptyset$ 인지 여부를 테스트한다. 만약 교집합이 공집합이 아니면, 교집합에 속하는 부분은 어느 주형에도 속할 수 없으므로, 주조불가능하다.

2. $\mathcal{V}^*$를 구성하고 그것이 $\vec{d}_c$ 에 대해서 ray-monotone한지를 테스트한다.

3. 위의 두 단계의 테스트를 통과하면 이 다면체는 주조가능한 것이므로, 이 다면체에 대한 주형을 구성한다.

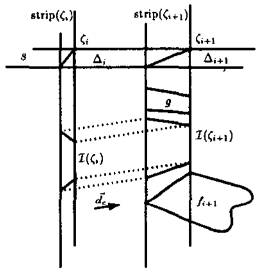
2.2.1 $\mathcal{S}_M \cap \mathcal{S}_c$가 공집합인지 여부의 테스트

보조정리 5. $\mathcal{S}_M \cap \mathcal{S}_c = \emptyset$*이면,* $\mathcal{V}_M$*에 속하는 모든 부피들이* $\vec{d}_c$*의 방향으로 ray-monotone하고,* $p \in \mathcal{V}$*인 모든 점에 대해, 그 점에서* $\vec{d}_c$*방향으로의 빛들은* $\mathcal{V}$*의 수직이고, 원래의 물체의 면이 아닌 면을 통과한다.*

S_c를 $O(n^2 \log n)$의 시간복잡도안에 계산한 후, S_M과의 교집합이 공집합인지 여부를 물체의 각 평면에 대해 plane sweep을 이용하여 역시 같은 시간복잡도 안에 계산해 낼 수 있다. 따라서 첫번째 과정의 시간복잡도는 $O(n^2 \log n)$이다.

2.2.2 $\mathcal{V}^*$가 monotone한지 여부의 테스트

물체의 위에서 보았을 때의 visibility map과 아래에서 보았을 때의 visibility map을 구하고, plane sweep을 통하여 두 개의 map을 합친다. 이 과정에 $O(n^2 \log n)$의 시간복잡도가 소요된다. 이렇게 구한 하나의 map에서 각 구역은 원래 물체에서 그에 해당하는 면과 대응된다. 이 때 코어의 제거방향에 수직인 평면들로 물체의 상의 모든 점들을 나누면, 물체의 상이 $O(n^2)$의 점을 갖고, 수직인 평면들은 많아도 $O(n)$개의 물체의 변과 만나게 되므로, $O(n^3)$의 교점들이 생성되고 이것은 역시 $O(n^3)$의 시간복잡도 안에 구할 수 있다. 수직인 평면으로 나뉜 하나의 판들은 그 안에 점을 포함하지 않으며, $O(n)$개의 변을 포함한다. 각 판에 대해 귀납적 방법으로 $\mathcal{V}^*$를 구하게 된다.

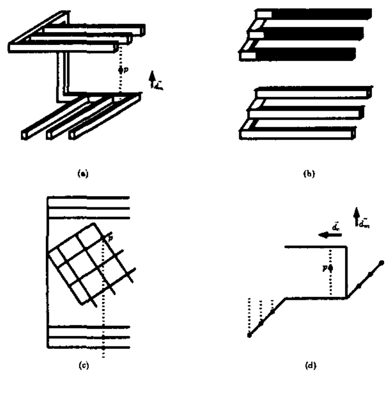


그 림 2: i+1번째 사다리꼴 구간의 생성

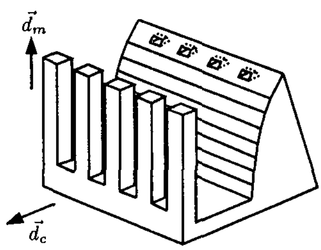
그림 2 는 i번째 판에서의 사다리꼴 구간을 이용하여 i+1번째 구간에서의 사다리꼴 구간을 결정하는 것을 보여준다. 하나의 판에 대해서 사다리꼴 구간을 결정하는데 $O(n \log n)$의 시간이 소요되므로 전체 시간복잡도는 $O(n^3 \log n)$이다.

2.2.3 주형의 구성

테스트를 통과한 다음에는 $\mathcal{V}_M$의 아랫쪽 표면과 선분의 구간과 표시된 면을 이용하여 $\mathcal{V}^*$를 구할 수 있다. $\mathcal{V}_*$이 코어에 포함되어야 한다는 사실을 이용하여 코어와 물체를 제외한 나머지 부분을 두 개의 반대방향으로 제거되는 주형으로 나누면 된다. 이것은 물체와 코어의 합집합을 새로운 물체로 보고, 반대방향으로 제거되는 두 개의 주형을 만드는 것과 같고, $\mathcal{V}^*$이 n^3의 복잡도를 가지므로 $O(n^3 \log n)$의 시간복잡도 안에 모든 주형을 만들어낼 수 있다. 그림 3 은 $\mathcal{V}^*$의 공간 복잡도가 n^3인 경우를 보여주고 있다. 그러나, $\mathcal{V}^*$는 코어의 부분집합이므로 반드시 n^3의 복잡도를 가진다고 할 수는 없다. 그림 4 [1]을 통해서 코어가 적어도 $\Omega(n^2)$의 공간복잡도를 가짐을 알 수 있다.



그 림 3: (a) $\mathcal{V}_M$의 그림자 부피안에 포함되는 점 p (b) 두 계단형의 수평의 다리들 (c) 위에서 본 그림 (d) 아랫쪽 바운드를 옆에서 본 그림



그 림 4: 코어가 $\Omega(n^2)$의 공간복잡도를 갖는 예

3 결론

앞에서 우리는 어떠한 물체가 세 개의 주형을 이용하여 주조가능한지를 테스트하기 위한 특징을 설명하였다. 또한, 어떤 3차원의 다면체에 대해서도 주조가능한지 여부를 테스트할 수 있으며, 주조가능한 물체에 대해 주형의 모양도 만들어낼 수 있는 $O(n^3 \log n)$의 알고리즘을 제안하였다.

참 고 문 헌

[1] H.K. Ahn, S.W. Cheng, and O. Cheong. Casting with skewed ejection direction. In *Proc. 9th Annu. International Symp. on Algorithms and Computation,*, volume 1533 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 139–148. Springer-Verlag, 1998.

[2] H.K. Ahn, M. de Berg, P. Bose, S.W. Cheng, D. Halperin, J. Matoušek, and O. Schwarzkopf. Separating an object from its cast. *Computer-Aided Design*, 34:547–559, 2002.

[3] L.L. Chen, S.Y. Chou, and T.C. Woo. Parting directions for mould and die design. *Computer-Aided Design*, 25:762–768, 1993.

[4] K. Hui. Geometric aspects of mouldability of parts. *Computer Aided Design*, 29(3):197–208, 1997.