하이퍼-스타 연결망 $HS(2n,n)$에 대한 삼진트리 임베딩

*김종석[O] **이형옥 *허영남
*순천대학교 컴퓨터과학과
**순천대학교 컴퓨터교육과
{*rockhee[O], **oklee, *hyn}@sunchon.ac.kr

Embedding between Interconnection Network Hyper-Star $HS(2n,n)$ and Ternary Tree

Jong-Seok Kim[0] Hyeong-Ok Lee Yeong-Nam Heo
Dept. of Computer Science, Sunchon National University
Dept. of Computer Education, Sunchon National University

요 약

최근에 하이퍼큐브의 망비용을 개선한 상호연결망 하이퍼-스타가 제안되었다. 본 논문에서는 삼진트리가 하이퍼-스타 연결망 $HS(2n,n)$에 연장율 1로 임베딩 가능함을 보인다.

1. 서 론

상호 연결망은 각 프로세서들을 노드로, 프로세서들 사이에 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프로 표현되는데, 지금까지 제안된 상호연결망은 노드 개수를 기준으로 분류하면 $k\times n$으로 표현되는 메쉬 부류, 2^n으로 표현되는 하이퍼큐브(hypercube) 부류, $n!$로 표현되는 스타(star) 그래프 부류로 나눌 수 있다. 상호 연결망을 평가하는 척도로는 분지수(degree), 연결도(connectivity), 대칭성(symmetric), 지름(diameter), 고장지름(fault diameter), 망비용(network cost), 확장성(scalability), 방송(broadcasting), 임베딩(embedding) 등이 있다[3,4].

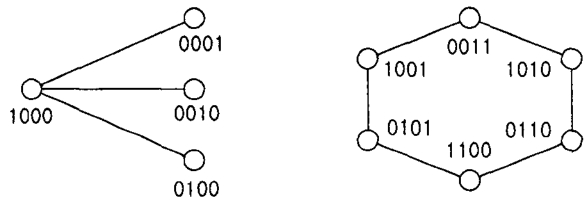
최근에 새로운 상호연결망으로 하이퍼-스타[2]가 제안되었다. 제안된 하이퍼-스타는 차원이 증가함에 따라 노드 개수가 조합(combination) 형태로 증가하는 새로운 형태의 상호연결망이다. 하이퍼-스타는 같은 노드수를 갖는 하이퍼큐브보다 망비용이 우수하고, 차원이 증가할 때 노드개수가 급격하게 증가하는 스타 그래프의 단점을 개선한 그래프이다.

다양한 연결망 구조에서 여러 가지 문제들을 풀기 위한 수많은 병렬 알고리즘들이 설계되고 있는데 이러한 알고리즘들을 원래와는 다른 연결망 구조에서 실행시킬 수 있는지는 병렬처리에서 중요한 문제이다. 이러한 방법 중에서 널리 쓰이는 것에 임베딩이 있다. 임베딩은 한 연결망의 프로세서와 통신링크를 다른 연결망의 프로세서와 통신링크들로 사상(mapping)시키는 방법으로 임베딩의 비용을 나타내는 척도는 연장율(dilation), 밀집율(congestion), 확장율(expansion) 등이 있다[1].

다음 장에서는 하이퍼-스타에 대하여 알아보고, 3장에서 삼진트리가 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$에 연장율 1로 임베딩 가능함을 보이고, 마지막으로 결론을 맺도록 하겠다.

2. 관련연구

하이퍼-스타 $HS(m,k)$는 $\binom{m}{k}$개의 노드로 구성된 연결망으로 각 노드는 m 개의 비트스트링 $b_1b_2...b_i...b_m$으로 표현되며, $|b_i=\text{"1"}|=k$ 이다. b_1과 b_i가 보수일 때 b_1과 b_i를 교환하는 치환을 σ_i라 하면, $v=\sigma_i(u)$인 두 노드 $u=b_1b_2...b_i...b_m$와 $v=b_ib_2...b_1...b_m$사이에 에지가 발생하며, u와 v를 연결하는 에지를 i-에지라고 한다. 하이퍼-스타는 매우 간단한 라우팅 알고리즘과 유용한 확장성을 가지고 있고, 이분할 연결망이며, 최대 고장 허용도를 가지고 있다[2]. 하이퍼-스타 $HS(m,k)$는 비정규형 연결망이므로 본 논문에서는 정규연결망인 $HS(2n,n)$와 삼진트리와의 임베딩을 분석하겠다. 그림 1은 $HS(4,1)$과 $HS(4,2)$를 나타낸다.



(a) $HS(4,1)$ (b) $HS(4,2)$

그림 1. $HS(4,1)$와 $HS(4,2)$

3. 임베딩

임베딩(embedding)은 어떤 연결망 G가 다른 연결망 H 구조에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해, 어떤 특정한 연결망을 다른 연결망에 사상하는 것이다. 임베딩의 비용을 나타내는 척도는 연장율, 밀집율, 확장율 등이 사용되고 있는데, 대표적인 척도는 연장율이다. 연결망 G의 에지 e의 연장율은 H에 사상된 에

지 e의 경로 $\rho(e)$의 길이를 나타낸다. 그러므로 연장율이 작을수록 효율적으로 임베딩이 가능하다.

$HS(2n,n)$ 연결망의 원시 노드를 u=0...01...1이라고 하고, 노드 u의 "0"과 "1"의 개수가 각각 n개이므로 $u=0^n1^n$으로 표시하겠다.

정의 1. $HS(2n,n)$ 그래프의 임의의 두 노드를 $u=0^n1^n$와 v라고 하자. 만약 두 노드 u와 v 사이의 거리가 m이면, 노드 u로부터 노드 v를 연결하는 경로 상에 존재하는 임의의 노드 v는 레벨 L_m에 위치한다.

$HS(2n,n)$ 연결망의 확장성에 대한 성질은 [2]에서 분석되었으며, 확장성에 의해 생성되는 과정을 그림으로 표현하면 그림 2와 같다.

그림 2에서 ①~⑧의 서브그래프가 위치한 곳을 1-d로 표시하고, 생성된 $HS(2n,n)$이 위치한 곳을 4-d로 표시하겠다. +1과 +0은 그래프의 확장성에 의해 상위 차원의 연결망을 생성할 때 생성된 연결망의 각 노드의 비트스트링에 추가되는 비트를 나타낸다.

1-d에 위치한 ③과 ④, ⑤와 ⑥의 서브연결망은 $(2n-2)$-차원에지로 연결되어 확장성에 의해 각각 정규 연결망인 $HS(2(n-1),n-1)$를 생성한다. 2-d의 연결망을 확장성에 의해 3-d의 연결망을 생성하면 생성된 연결망 $HS(2n-1,n-1)$와 $HS(2n-1,n)$는 각각 $(2n-1)$-차원에지에 의해 ②와 ④, ⑤와 ⑦의 서브연결망이 연결된 정규 연결망인 $HS(2(n-1),n-1)$를 포함하게 된다. 3-d의 연결망을 확장성에 의해 4-d의 연결망을 생성하면 생성된 연결망 $HS(2n,n)$은 $(2n)$-차원에지에 의해 ②와 ⑥, ③과 ⑦의 서브연결망이 연결된 정규 연결망인 $HS(2(n-1),n-1)$를 포함하게 된다. 이와 같은 확장성에 의해 $HS(2n,n)$ 연결망은 다음과 같은 성질을 가짐을 알 수 있다.

성질 1. $HS(2n,n)$ 연결망을 생성하는 하위 3차원 서브연결망들이 확장성에 의해 상위 차원의 연결망을 생성하면 생성된 상위 차원의 연결망은 2개의 정규 연결망 $HS(2(n-1),n-1)$를 포함한다.

정리 1. $HS(2n,n)$ 연결망은 세 개의 서브 연결망 $HS(2(n-1),n-1)$를 포함하고 있다.

증명. $HS(2n,n)$ 연결망을 확장성에 의한 수식으로 표현하겠다.

$$HS(2(n-1),n-1) = HS(2(n-1)-1,n-2) + HS(2(n-1)\ 1,n-1) \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
HS(2n,n) &= HS(2n-1,n-1) + HS(2n-1,n) \\
&= HS(2(n-1),n-2) + HS(2(n-1),n-1) \\
&\quad + HS(2(n-1),n-1) + HS(2(n-1),n) \\
&= 2HS(2(n-1),n-1) + HS(2(n-1),n-2) \\
&\quad + HS(2(n-1),n) \\
&= 2HS(2(n-1),n-1) + HS(2(n-1)-1,n-3) \\
&\quad + HS(2(n-1)-1,n-2) \\
&\quad + HS(2(n-1)-1,n-1) + HS(2(n-1)-1,n) \\
&= 3HS(2(n-1),n-1) + HS(2(n-1)-1,n-3) \\
&\quad + HS(2(n-1)-1,n)
\end{aligned}$$

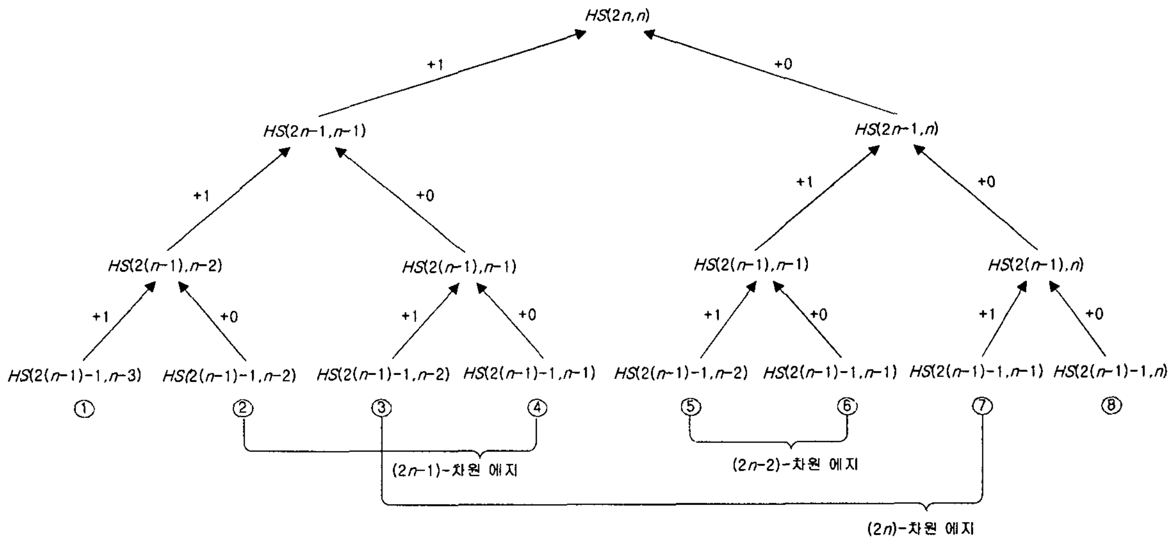


그림 2. 확장성에 의해 생성된 $HS(2n,n)$ 연결망

$= 3HS(2(n-1),n-1) + 2\times\binom{2n-3}{n-3}$이다.

이와 같이 수식으로 표현했을 때 $HS(2n,n)$ 연결망은 세 개의 서브 연결망 $HS(2(n-1),n-1)$를 포함하고 있다는 것을 알 수 있다. 그리고 성질 1에 의해 1-d에 위치한 서브연결망들이 차원이 증가할 때마다 두 개씩의 $HS(2n-1,n-1)$ 연결망을 생성한다는 것을 알 수 있다. $(2n-2)$-차원에지에 의해 ③과 ④, ⑤와 ⑥, $(2n-1)$-차원에지에 의해 ②와 ④, ⑤와 ⑦, $(2n)$-차원에지에 의해 ②와 ⑥, ③과 ⑦ 서브연결망들이 각각 $HS(2n-1,n-1)$ 연결망을 생성함을 알 수 있으므로 중복되지 않는 1-d의 서브연결망들이 생성하는 $HS(2n-1,n-1)$ 연결망은 3개임을 알 수 있다. 그러므로 수식과 성질 1에 의해 $HS(2n,n)$ 연결망은 세 개의 서브 연결망 $HS(2(n-1),n-1)$를 포함하고 있다.

보조정리 2. $HS(2n,n)$ 연결망의 root 노드 $u(=0^n1^n)$는 서브연결망 $HS(2(n-1)-1,n-3)$의 노드 $1^{n-3}0^n$가 확장되어 생성된다.

증명. 그림 1에서 +1과 +0은 연결망의 확장성에 의해 추가되는 비트를 나타낸다고 했으므로 $HS(2(n-1)-1,n-3)$의 노드 $1^{n-3}0^n$를 확장성에 의해 3번 확장하면 root 노드인 $u(=0^n1^n)$가 생성됨을 쉽게 알 수 있다.

$HS(2n,n)$ 연결망의 노드 $w(=1^n0^n)$도 서브연결망 $HS(2(n-1)-1,n)$의 노드 1^n0^{n-3}가 확장되어 생성된다는 것을 보조정리 2와 같은 방식으로 증명할 수 있다.

정리 3. $HS(2n,n)$ 연결망의 세 개의 $HS(2(n-1),n-1)$ 서브 연결망은 L_1부터 L_{2n-2}사이에 위치한다.

증명. $HS(2n,n)$의 지름은 $2n-1$이다[2]. 그러므로 $HS(2n,n)$ 연결망에는 레벨 $L_0\sim L_{2n-1}$이 존재함을 정의 1에 의해 알 수 있다. 레벨 L_0에는 원시 노드인 $u(=0^n1^n)$가 위치해 있고, 레벨 L_{2n-1}에는 노드 $w(=1^n0^n)$가 위치해 있다. 그러므로 두 노드를 제외한 모든 노드들은 레벨 $L_1\sim L_{2n-2}$에 위치해 있음을 쉽게 알 수 있다. 따라서 세 개의 $HS(2(n-1),n-1)$ 서브 연결망은 레벨 $L_1\sim L_{2n-2}$에 위치한다.

정리 4. $HS(2n,n)$ 연결망에는 두 개의 삼진트리가 존재한다($n\geq 3$).

증명. 정리 1과 정리 3에 의해 $HS(2n,n)$ 연결망에는 세 개의 $HS(2(n-1),n-1)$ 서브 연결망이 존재하고 세 개의 $HS(2(n-1),n-1)$ 서브 연결망은 레벨 $L_1\sim L_{2n-2}$에 위치해 있음을 알 수 있다. 레벨 L_0에는 $HS(2n,n)$ 연결망의 원시 노드인 $u(=0^n1^n)$가 위치해 있고, 레벨 L_1에는 세 개의 서브연결망 $HS(2(n-1),n-1)$의 원시 노드가 존재한다. 레벨 L_2에는 $HS(2(n-1),n-1)$의 세 개의 서브연결망 $HS(2(n-2),n-2)$의 원시 노드가 존재한다. $HS(2n,n)$ 연결망은 수식 $3HS(2(n-1),n-1)+2\times\binom{2n-3}{n-3}$로 표현되는 재귀적 구조를 가지고 있으므로 $u(=0^n1^n)$를 원시 노드로 하여 각 서브연결망의 원시 노드를 연결하는 삼진트리(레벨 $L_0\sim L_{n-2}$)를 포함하고 있다는 것을 알 수 있다. 또한 레벨 L_0와 L_{n-1}사이에 위치한 노드들로 구성된 서브연결망과 레벨 L_n과 L_{2n-1} 사이에 위치한 노드들로 구성된 서브연결망은 대칭[5]이므로 $w(=1^n0^n)$를 정점으로 하는 삼진트리(레벨 $L_{n+1}\sim L_{2n-1}$)가 존재함을 알 수 있다. 그러므로 $HS(2n,n)$ 연결망에는 두 개의 삼진트리가 존재한다.

이상의 정리에 의해 삼진트리가 하이퍼-스타 연결망 $HS(2n,n)$에 포함되어 있음을 알 수 있으므로 연장율 1로 임베딩 가능함을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 삼진트리가 상호 연결망으로 널리 알려진 하이퍼큐브의 망비용을 개선한 하이퍼-스타 연결망 $HS(2n,n)$에 연장율 1로 임베딩 가능함을 보였다.

이러한 결과는 삼진트리가 하이퍼-스타 연결망 $HS(2n,n)$의 서브연결망임을 보여주는 것으로, 삼진트리의 성질과 여러 가지 장점을 쉽게 하이퍼-스타 연결망 $HS(2n,n)$에 적용 가능하다는 것을 나타낸다.

참고문헌

[1] W.-K. Chiang and R.-J. Chen, "Topological properties of hierarchical cubic networks," Journal of systems Architecture, pp. 289-307, 1996.

[2] H.-O. Lee, J.-S. Kim, E. Oh, H.-S. Lim, "Hyper-Star Graph: A New Interconnection Network Improving the Network Cost of the Hypercube," Lecture Notes in Computer Science : EurAsia-ICT 2002, LNCS 2510, pp. 858-865, 2002.

[3] F. T. Leighton, Introduction to Parallel Algorithms and Architectures : Arrays, Hypercubes, Morgan Kaufmann Publishers, 1992.

[4] V. E. Mendia nad D. Sarkar, "Optimal Broadcasting on the Star Graph," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.3, No.4, pp. 389-396, 1992.

[5] 김종석, 이성재, 이형옥, 허영남, "상호연결망 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 노드대칭성," 한국정보과학회 추계학술발표논문집, 30권 2호, pp.373-375, 2004.