

퍼지논리제어기의 절대 안정성 해석

A Study on Absolute Stability for Fuzzy Logic Controller

최병재, 류석환

대구대학교 전자정보공학부

Byung-Jae Choi and Seog-Hwan Yoo

School of Electronic Engineering, Daegu University

E-mail : bjchoi@daegu.ac.kr

요 약

퍼지논리제어기는 제어 대상 플랜트에 관한 완전한 정보를 필요로하지 않으면서도 우수한 제어 성능을 발휘하는 비선형 제어기이다. 그러나 퍼지논리제어기는 많은 장점에도 불구하고 엄격한 수학적 해석을 요구하는 안정성 분석의 관점에서는 다소의 문제점을 가지고 있다. 본 논문에서는 퍼지논리제어기를 가지는 전체 폐루프 시스템을 섭동의 성분을 가지는 Lur'e 시스템으로 변형하고, 이를 통하여 퍼지논리제어기의 절대 안정성을 입증하고자 한다. 여기서는 이미 기존의 논문에서 제시한 간단구조 퍼지논리제어기를 대상으로 절대 안정성 해석을 제시한다.

1. 서론

기존의 고전 제어 알고리즘에 퍼지논리를 접목시키는 퍼지논리제어는 제어 알고리즘 자체가 가진 여러 가지 장점들로 인하여 산업현장에서 성공적으로 적용되고 있다. 특히 제어대상 시스템의 복잡성이 증가하고, 지능화에 대한 요구가 늘어나면서 퍼지논리제어기에 관한 관심이 증대되고 있는 실정이다.

그러나 퍼지논리제어기는 조정 변수의 수가 많다는 점과 안정성 분석의 명확성 부족 등의 문제점도 가지고 있다.

여기서 조정 변수로는 멤버십 함수, 스케일링 변수, 그리고 제어 규칙 등을 들 수 있으며, 이들의 수는 "If... Then..." 형태의 제어규칙 설정에서 전건부 변수의 수 증가에 따라서 거의 기하급수적으로 증가하는 현상을 보인다. 이를 해결 혹은 완화하기 위한 연구결과도 많이 발표되었다.

제어 시스템의 안정성 분석은 제어 대상 시스템의 엄격한 수학적 모델을 필요로 한다. 그러나 퍼지논리제어기는 제어 대상 시스템의 모델 없이

도 원하는 성능의 제어 기능을 발휘할 수가 있다. 이러한 상충되는 특징으로 인하여 퍼지논리제어기의 안정성 분석은 결코 간단한 문제가 아니다.

본 논문에서는 먼저 임의의 비선형 제어 대상 시스템을 어떤 동작점 근처에서 Taylor 급수로 전개하고, 퍼지논리제어기로는 전건부 변수의 수를 줄인 단순구조형을 사용한다. 이 때 전체 시스템은 궤환 부분에 모든 비선형 성분을 가지는 Lur'e 시스템으로 변환됨을 보인다. 아울러 단순구조 퍼지논리제어기의 전역적 섹터 조건을 유도하고, 이를 통하여 전체 시스템의 절대 안전성을 증명한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제2장에서는 제어대상 시스템의 정의 및 단순구조 퍼지논리제어기에 관하여 개략적으로 기술하고, 제3장에서는 본 논문의 핵심인 단순구조 퍼지논리제어기에 의한 절대 안정성 분석을 유도한다. 그리고 제4장에서 결과 토의 및 추후 과제를 제시한다.

2. 단순구조 퍼지논리제어기

제어 대상 플랜트는 다음과 같이 정의되는 n -차 시스템이라고 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u) \\ y &= x \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\ &= (x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})^T, \end{aligned}$$

여기서, $F(x, u)$ 는 제어 대상 플랜트의 동력학 그리고 미지의 외란 등을 나타내며, 부분적으로만 알려진 어떤 연속함수이다. 그리고

$x(t) \in R^n$ 는 플랜트의 상태 벡터이고, $u(t) \in R$ 와 $y(t) \in R$ 는 각각 플랜트의 입력과 출력이다.

제어 목적은 플랜트의 출력 $y(t)$ 가 기준 입력 신호인 $x_d(t)$ 를 추종하는 것이다.

$e(t)$ 는 다음과 같이 정의되는 추종 오차 벡터이다.

$$\begin{aligned} e(t) &= x(t) - x_d(t) \\ &= [e(t), \dot{e}(t), \dots, e^{(n-1)}(t)]^T \end{aligned} \quad (2)$$

퍼지 제어 규칙의 전건부 변수로 오차와 오차의 변화를 사용하고, 후건부 변수로 제어 입력을 사용하는 PD-형 퍼지논리제어기의 제어 규칙 형태는 다음과 같다.

R_{old}^i : If e is LE_i and \dot{e} is LDE_j ,
Then u is LU_{ij}

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, M, \\ j &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

여기서 LE , LDE , 그리고 LU 는 각각 e , \dot{e} , 그리고 u 에 의해 취해지는 언어 값이다. 그리고 전체 제어 규칙의 수는 $M \times N$ 이다.

제어 대상 플랜트가 최소 위상 특성을 나타내는 경우에 PD-형 퍼지논리제어기가 가지는 제어 규칙을 살펴보자. 이 때, 제어 규칙은 2-차원의 규칙표로 나타낼 수 있으며, 다음과 같이 모든 규칙표는 UNLP(Upper Negative Lower Positive) 혹은 UPLN(Upper Positive Lower Negative)의 특성을 보인다.

즉, 제어 대상 플랜트가 최소 위상 특성을 가질 경우에 PD-형 퍼지논리제어기의 제어 규칙표는 다음과 같은 특징을 나타낸다: 1) 주 대각선을 중심으로 제로 밴드가 형성된다. 2) 주 대각선을 중심으로 위에서는 음의 제어 입력 신호가 유도되고, 아래에서는 양의 제어 입력 신호가 유도된다. 그리고 이것은 오차 벡터의 정의에 따라서 바뀔 수 있다. 3) 제어 입력 신호의 절대 크

기는 주 대각선으로부터의 거리에 비례한다.

이러한 특징으로부터 제로 밴드의 중심을 지나가는 직선은 다음과 같이 스위칭 직선으로 정의할 수 있다.

$$s_i: \dot{e} + \lambda e = 0, \quad (3)$$

여기서 $\lambda > 0$ 는 오차와 오차의 변화에서 정의되는 대집합과 관련있는 스케일링 변수로부터 결정되는 설계 변수이다.

제어 입력 신호는 $s_i > 0$ 에서 음의 부호를, 그리고 $s_i < 0$ 에서는 양의 부호를 가진다. 그리고 그 절대 크기는 직선 $s_i = 0$ 로부터의 거리에 비례하므로, 제어 입력 신호는 다음과 같이 요약할 수 있다.

$$u \propto -d_s \quad (4)$$

여기서, d_s 는 다음과 같이 정의되는 부호를 가지는 거리라는 하나의 새로운 변수이다.

$$\begin{aligned} d_s &= \text{sgn}(s_i) \cdot \frac{|\dot{e} + \lambda e|}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \\ &= \frac{\dot{e} + \lambda e}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \end{aligned} \quad (5)$$

이제 퍼지논리제어기를 위한 제어 규칙의 형태는 관계식 (4)로부터 전건부 변수로 d_s 만을 사용하는 간단한 형태로 바뀔 수 있다.

R_{new}^k : If d_s is LDL_k Then u is LU_k ,

여기서 LDL_k 는 k -번째 제어 규칙에서 d_s 를 위한 언어 값이다. 이를 사용한 제어 규칙표는 [표 1]과 같이 요약된다.

d_s	LDL_{-2}	LDL_{-1}	LDL_0	LDL_1	LDL_2
u	LU_2	LU_1	LU_0	LU_{-1}	LU_{-2}

[표 1] 단순구조 퍼지논리제어기의 제어 규칙표

[표 1]에서 아래 첨자로 사용한 -2, -1, 0, 1, 그리고 2는 각각 퍼지 언어 값인 Negative Big (NB), Negative Small (NS), ZeRo (ZR), Positive Small (PS), 그리고 Positive Big (PB)을 의미한다. [표 1]에서 알 수 있듯이 간단 구조 퍼지논리제어기에서는 제어 규칙의 수가 대폭 축소되었음을 알 수 있다. 따라서 정밀 제어를 위한 제어 규칙의 조정 및 제어 규칙의 수를 쉽게 늘릴 수 있는 등의 장점이 있다.

위에서 설계한 단순 구조 퍼지논리제어기는 전 건부의 변수로 오차와 오차의 변화를 사용하는 PI-형 혹은 PD-형의 경우를 살펴보았다. 그러나 일반적인 퍼지논리제어기는 전건부의 입력 변수로 제어 대상 시스템의 전체 상태 변수의 수인 n 개 모두를 사용한다. 이 경우에도 제어 대상 플랜트가 최소 위상의 특성을 가지면 제어 규칙표는 스쿼대칭의 특징을 보이게 된다. 단지 여기서는 스위칭 직선이 다음과 같이 정의되는 스위칭 초평면으로 바뀌게 된다.

$$S_i: e^{(n-1)} + \lambda_{n-1}e^{(n-2)} + \dots + \lambda_2\dot{e} + \lambda_1e = 0 \quad (6)$$

그리고 d_s 는 다음과 같이 스위칭 초평면으로부터의 부호를 가지는 거리인 D_s 로 일반화된다.

$$D_s = \frac{e^{(n-1)} + \lambda_{n-1}e^{(n-2)} + \dots + \lambda_2\dot{e} + \lambda_1e}{\sqrt{1 + \lambda_{n-1}^2 + \dots + \lambda_2^2 + \lambda_1^2}} \quad (7)$$

위의 식으로부터 하나의 입력 변수인 D_s 는 오차와 오차의 변화에 대한 정보는 물론 나머지 모든 상태 변수의 정보를 포함하고 있음을 알 수 있다.

3. 절대 안정성 분석

이제 퍼지논리제어기의 비선형 특성을 사용하여 단순 구조 퍼지논리제어기의 안정성을 분석한다. 먼저 주어진 플랜트 (1)을 (x_0, u_0) 에 대하여 테일러 급수로 확장하면 다음과 같이 요약된다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + g(x, u), \\ y &= x, \end{aligned} \quad (8)$$

여기서

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)},$$

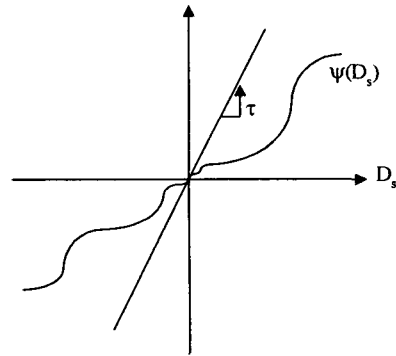
$$B = \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)}$$

그리고 $g(x, u)$ 는 x 와 u 에서의 고차항을 나타내며, 불확실성과 외란 등을 포함한다.

주어진 [표 1]의 제어 규칙표로부터 간단 구조 퍼지논리제어기의 출력은 제로에 대하여 대칭이고, 선형 이득으로 제한된다는 사실을 알 수 있으며, 이로부터 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$u = -\psi(D_s). \quad (9)$$

여기서 $\psi(D_s)$ 는 [그림 1]과 같이 표현된다.



[그림 1] $\psi(D_s)$ 의 동작

$\psi(\cdot)$ 는 섹터 $[0, \tau]$ 에 소속하는 임의의 시불변 비선형 함수이므로 다음의 관계가 성립한다.

$$\psi(D_s)[\psi(D_s) - \tau D_s] \leq 0. \quad (10)$$

여기서 τ 는 임의의 양의 상수이다.

$x_d = 0$ 일 때, D_s 는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} D_s &= \frac{e^{(n-1)} + \lambda_{n-1}e^{(n-2)} + \dots + \lambda_2\dot{e} + \lambda_1e}{\sqrt{1 + \lambda_{n-1}^2 + \dots + \lambda_2^2 + \lambda_1^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}} (x^{(n-1)} + \lambda_{n-1}x^{(n-2)} + \dots + \lambda_2\dot{x} + \lambda_1x) \\ &= C_d x, \end{aligned} \quad (11)$$

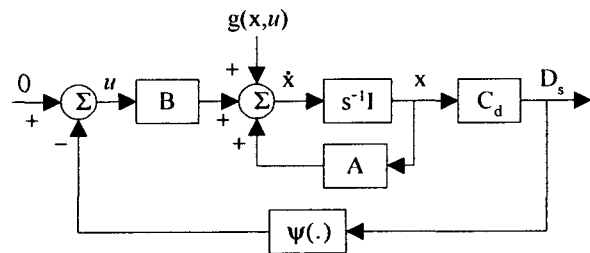
여기서

$$C_d = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n],$$

$$\lambda_n = 1.$$

이 때, 단순 구조 퍼지논리제어기는 다음과 같이 요약되고, [그림 2]로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + g(x, u) \\ u &= -\psi(D_s) \\ D_s &= C_d x \end{aligned} \quad (12)$$



[그림 2] 전체 시스템의 블록도

이 때, 간단 구조 퍼지논리제어기의 절대 안정성은 다음과 같이 유도된다.

(22)

식 (12)에서 A 는 Hurwitz, (A, B, C_d) 는 $G(s) = C_d(sI - A)^{-1}B$ 의 minimal realization, 그리고 플랜트의 비선형 성분 $g(x, u)$ 가 다음과 같이 제한된다고 할 때,

$$\|g(x, u)\|_2 \leq \nu \|x\|_2 \leq \frac{\epsilon_g}{2\|P\|_{i2} + 2\eta\tau^2\|C_d\|_2^2} \|x\|_2 \quad (13)$$

$$\|P\|_{i2} = [\lambda_{\max}(P^*P)]^{1/2}, \nu > 0, \epsilon_g > 0, \quad (14)$$

다음의 관계식을 만족하는 $\eta \geq 0$ 가 A 의 고유치로 $-\frac{1}{\eta}$ 을 가지지 않는다면 전체 시스템은 절대적으로 안정하다.

$$\text{Re}[1 + (1 + j\eta\omega)\tau G(j\omega)] > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (15)$$

여기서

$$G(j\omega) = \text{Re}[G(j\omega)] + j \text{Im}[G(j\omega)]. \quad (16)$$

이것은 다음과 같이 Lur'e-형 Lyapunov 함수로부터 증명된다.

$$V_s = x^T P x + 2\eta \int_0^{D_s} \psi(\sigma) \tau d\sigma \quad (17)$$

시스템의 궤적을 따라서 V_s 를 미분하고, 다음의 섹터 조건을 대입하면,

$$-2\psi(D_s)[\psi(D_s) - \tau D_s] \geq 0. \quad (18)$$

이제 V_s 은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} V_s \leq & x^T (PA + A^T P)x \\ & - 2x^T (PB - \eta\tau A^T C_d^T - \tau C_d^T) \psi \\ & - (2 + 2\eta\tau C_d B) \psi^2 + 2x^T P g \\ & + 2\eta\tau \psi C_d g. \end{aligned} \quad (19)$$

η 는 다음의 식을 만족하도록 선택한다.

$$2(1 + \eta\tau C_d B) = w^2. \quad (20)$$

주어진 조건 (19)로부터 다음의 관계식들을 만족하는 양한정 대칭 행렬 P 와 P_0 , 벡터 L , 그리고 임의의 양의 상수 ϵ_p 가 존재한다.

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= -L^T L - \epsilon_p P \\ PB &= \tau C_d^T + \eta\tau A^T C_d^T - wL^T \\ \epsilon_p P &= \epsilon_p P_0 + \epsilon_g I. \end{aligned} \quad (21)$$

그러므로,

$$\begin{aligned} V_s \leq & -\epsilon_p x^T P x - [Lx - w\psi]^T [Lx - w\psi] \\ & + 2\|x\|_2 \|P\|_{i2} \|g\|_2 + 2\eta\tau^2 \|C_d\|_2^2 \|x\|_2 \|g\|_2. \end{aligned}$$

이러한 결과를 종합하면 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} V_s &\leq -x^T (\epsilon_p P - \epsilon_g I)x \\ &\leq -\epsilon_p x^T P_0 x, \end{aligned} \quad (23)$$

□

4. 결론

지금까지 단순구조 퍼지논리제어기의 설계에 관한 설명, 그리고 Lur'e 시스템으로의 변환을 통한 절대 안정성 입증에 관하여 기술하였다. 이를 통하여 퍼지논리제어기의 설계 단순화는 물론 전체 시스템의 안정성을 수학적으로 증명하였다.

추후과제로는 이러한 제안의 유용성 입증을 위하여 로봇 매니플레이터 등의 실제적인 시스템에 관한 응용 등을 고려할 수 있다.

5. 참고문헌

- [1] D. Driankov, H. Hellendoorn, and M. Rainfrank, *An Introduction to Fuzzy Control*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993.
- [2] K. L. Tang and R. J. Mulholland, "Comparing fuzzy logic with classical controller design," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. 17, no. 6, pp. 1085-1087, 1987.
- [3] B.-J. Choi, S.-W. Kwak, and B. K. Kim, "Design and Stability Analysis of a Single-input Fuzzy Logic Controller," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.(B)*, vol. 30, no. 2, pp. 303-309, 2000.
- [4] K. S. Ray and D. D. Majumder, "Application of Circle Criteria for Stability Analysis of Linear SISO and MIMO Systems Associated with Fuzzy Logic Controller," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. 14, no. 2, pp. 345-349, 1984.
- [5] C.-C. Fuh and P.-C. Tung, "Robust Stability Analysis of Fuzzy Control Systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 88, pp. 289-298, 1997.
- [6] H.-X. Li and H. B. Gatland, "Conventional Fuzzy Control and Its Enhancement," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.(B)*, vol. 26, no. 5, pp. 791-797, 1996.
- [7] J. J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, New Jersey, 1991.