한국지하수토양환경학회 춘계학술발표회
2004년 4월 16~17일 국립환경연구원

유선 시뮬레이션 기법과 준해석해를 이용한 용질 거동 분석

정대인, 최종근, 박광원

서울대학교 지구환경시스템공학부
(e-mail : jdi@geofluid.snu.ac.kr)

<요 약 문>

Streamline simulation researches have been extensively accomplished due to the swiftness of computation and the reduction of numerical dispersion. In this study, we developed a streamline simulation model using a semianalytical solution of 1D transport equation. To validate accuracy of the developed model, we compared simulation results of contaminant transport, which were acquired by streamline simulation models using an analytical solution, a numerical solution, and a semianalytical solution. The developed model using the semianalytical solution matched well with the model using an analytical solution. However, streamline simulation model using a numerical solution showed numerical dispersion. For an advection-dominant flow, there was little difference in the simulation results between the developed model and the analytical model, but the differences between the analytical model and the numerical model were cleary shown. From the comparison of computing time we know that the streamline simulation using the semianalytical solution is 2-60 times as fast as the streamline simulation using the numerical solution.

Key word : streamline simulation, semianalytical solution, advection, computing time

1. 서 론

최근 지하수 자원의 활용 증가와 함께 여러 가지 오염원들로 인한 지하수의 오염에 대한 관심이 고조되고 있다. 지하수 내의 용질 거동 모델은 이송, 분산, 흡착, 분해 등의 현상을 고려하여 개발되어 왔다. 이러한 현상들은 포함하는 용질 거동의 지배방정식의 해석해는 가장 단순한 형태의 경계 및 초기조건에 대해서만 존재한다. 이러한 한계로 인하여 대부분의 용질 거동 모델은 수치해석 방법을 이용하여 개발되어 왔다.

용질 거동을 모사하는 수치해석 모델은 일반적으로 오일러리안 모델, 라그랑지안 모델, 그리고 이 두 모델의 혼합 모델로 나눌 수 있다. 유한차분법과 유한요소법과 같은 오일러리안 모델은 고정된 격자 시스템에서 용질 거동 방정식의 해를 구한다. 이러한 방법들은 용질과 지하수 및 매질 사이의 반응을 쉽게 모델에 결합시킬 수 있는 장점이 있지만 이송이 지배적인 유동에서 수치분산의 문제가 발생하는 단점이 있다. 입자추적법과 같은 라그랑지안 모델은 지하수와 함께 이동하는 입자나 유체 요소를 이용하

여 용질 거동을 모사한다. 이 방법은 수치분산을 감소시킬 수 있는 장점이 있지만 용질 거동 모사의 정확성이 입자 개수에 민감하기 때문에 계산 시간이 많이 소요되는 단점이 있다.

최근 수년간 유선 시뮬레이션(streamline simulation) 기법은 저류층 내 유체 거동을 모사하거나 오염물의 이동을 예측하기 위하여 널리 사용되어 왔다(Datta-Gupta and King, 1995; Thiele et al., 1996; Crane and Blunt, 1999). 유선 시뮬레이션 기법은 연산 효율이 기존의 유한차분모델에 비해서 10-1000배 뛰어나기 때문에 수백만 격자를 가지는 3차원 저류층 모델의 개발을 가능하게 하였다(Batychy et al., 1997; King and Datta-Gupta, 1998). Crane과 Blunt(1999)는 다공질 매질에서의 물질이동 모사에 유선 시뮬레이션 기법을 적용하여 유선 시뮬레이션 기법의 신속함과 효율성을 제시하였으며 기존의 모델에 의한 모사 결과와 비교하여 유선 시뮬레이션의 정확성을 검증하였다. Jang 등(2002)은 유선을 따라 발생하는 이송과 분산의 상대적 비율로 정의되는 이송-분산비(advection-dispersion ratio)를 도입하여 분산을 고려한 모델을 개발하였다.

유선 시뮬레이션의 기본 개념은 다차원의 유체 유동을 유선상의 1차원 유동의 집합으로 분해하여 해석하는 것이다. 주어진 시스템에서의 압력장을 구하고 구한 압력장에서 Darcy 방정식을 이용하여 속도장을 구하여 유선 궤적을 추적한다. 좌표 변환을 통하여 각 유선상에서 1차원 이동 문제의 해를 구하고 이를 원래 유동 영역으로 역매핑함으로써 구하고자 하는 특성값을 얻게 된다. 기존의 유선 시뮬레이션 연구에서는 유선상에서 1차원 이동 문제의 해를 구하기 위하여 해석해를 사용하거나 해석해가 존재하지 않는 경우에는 수치해를 사용하였다. 해석해의 경우에는 아주 단순한 경계 조건의 경우에만 존재하는 단점이 있으며 수치해의 경우에는 많은 계산 시간을 요구하고 수치분산이 발생하는 단점을 가지고 있다. 본 연구에서는 준해석해를 이용하여 유선 시뮬레이션 모델을 개발하였으며 이를 해석해와 수치해를 이용한 모델과 비교 분석하였다.

2. 본 론

1) 유선 시뮬레이션의 배경 이론

① 유선입자추적(Streamline tracing)

Pollock(1988)의 방법을 이용하여 주어진 시스템에서의 유선입자의 경로를 추적하였다. 먼저 주어진 시스템에서 압력장을 구하고 구한 압력장에 대해 Darcy 방정식을 적용하면 속도장을 구할 수 있다. 각 격자 경계에서의 속도 성분을 알고 격자내에서는 속도 성분이 선형적으로 변한다고 가정하면 격자 내 임의의 지점 x에서의 속도는 식(1)과 같다.

$$v_x = v_{x,0} + m_x(x - x_0) \tag{1}$$

여기서, x_0는 좌표의 원점, $v_{x,0}$는 x_0에서의 속도이다. 속도의 변화량 m_x를 식(2)와 같이 정의하면 입자의 격자 내 상주시간(residence time)은 식(3)과 같이 구해진다. 마찬가지 방법으로 y 방향으로의 상주시간을 식 (4)와 같이 구할 수 있다.

$$m_x = \frac{v_{x,\Delta x} - v_{x_0}}{\Delta x} \tag{2}$$

$$\Delta t_{e,x} = \frac{1}{m_x} \ln\left[\frac{V_{x,0} + m_x(x_e - x_0)}{V_{x,0} + m_x(x_i - x_0)}\right] \tag{3}$$

$$\Delta t_{e,y} = \frac{1}{m_y} \ln\left[\frac{V_{y,0} + m_y(y_e - y_0)}{V_{y,0} + m_y(y_i - y_0)}\right] \tag{4}$$

여기서, $v_{x,\Delta x}$는 $x_0 + \Delta x$에서의 속도, x_e, y_e는 출구 지점의 위치, x_i, y_i는 입구 지점의 위치를 나타낸다. (3), (4)로부터 구한 값 중 최소값이 입자가 격자에 머문 상주시간이 되고 그 입자는 상주시간이 결정된 방향으로 빠져나가게 되며 빠져나간 위치는 식 (5), (6)으로 얻어진다.

$$x_e = \frac{1}{m_x}[\, V_{x,i} \exp(m_x \Delta t_e) - V_{x,0}] \tag{5}$$

$$y_e = \frac{1}{m_y}[\, V_{y,i} \exp(m_y \Delta t_e) - V_{y,0}] \tag{6}$$

② 좌표 변환(Coordinate transformation)

유선입자추적을 하고 나면 각 유선에 대해서 1차원의 이동 방정식을 풀어야 한다. 이를 위하여 원좌표계로부터 시간과 유선상의 영역으로 좌표 변환이 이루어지는데 이때 TOF(Time Of Flight)의 개념이 이용된다. TOF는 식 (7)과 같이 정의되며 이는 유선이 임의의 격자에까지 도달하는데 걸리는 총시간을 의미하며, 유선이 지나온 모든 격자의 상주시간을 합하여 그 값을 얻는다.

$$\tau = \int_0^s \frac{1}{v}\, d\xi = \sum_{i=1}^{N_b} \Delta t_{ei} \tag{7}$$

③ 좌표 변환된 이송-분산 방정식의 1차원 해

위에서 정의한 TOF의 개념을 이용하여 좌표 변화된 1차원 이동 방정식의 해를 구하게 된다. 일반적으로 1차원 해는 해석해, 수치해, 준해석해 등을 이용하게 된다. 본 연구에서는 Wang 등(1999)이 제시한 준해석해를 이용하여 모델을 개발하였다. 식 (8)은 경계에서의 오염물의 농도가 일정한 연속 오염원인 경우에 이송, 분산, 분해를 고려한 경우의 준해석해이다.

$$C_m(t) = C_0 \frac{k_\tau^{\,m}}{k^m}\left[1 - \exp(-kt)\sum_{j=1}^{m} \frac{(kt)^{j-1}}{(j-1)!}\right] \tag{8}$$

1형 경계 조건: $C_0(t) = C_0$

여기서, $k_\tau = \frac{1}{\Delta\tau}$이며, $k = k_\tau + \mu$, 그리고 μ는 분해상수이다.

위와 같은 경계 조건에서 해석해는 다음과 같다.

$$\frac{C(x,t)}{C_0} = \frac{1}{2}\left[erfc\left(\frac{\tau - t}{2\sqrt{t / Pe_m}}\right) + \exp\left(Pe_m \tau\right) erfc\left(\frac{\tau + t}{2\sqrt{t / Pe_m}}\right)\right] \tag{9}$$

④ 1차원 해의 역매핑과 농도 계산

유선을 따라 지배방정식의 해를 해석해 또는 준해석해 형태로 구하게 되면 유선을 따라 오염물의 농

도를 알 수 있다. 이제 유선을 따라 계산된 오염물의 농도를 통하여 균일한 격자로 나눈 대수층 전체의 오염운 전파 양상을 파악해야 한다. 즉, 1차원 해를 3차원 대수층 각 격자에 대입하여야 하며 이를 역매핑이라 한다.

한 격자의 농도를 알기 위해서는 그 격자를 지나는 모든 유선의 농도를 격자에 역매핑하게 된다. 격자를 지나는 모든 유선의 농도를 식 (10)과 같이 가중 평균하여 격자 전체의 농도를 결정한다.

$$C = \frac{\sum_{i=0}^{N} q_i \Delta\tau_i C_i(\tau)}{\sum_{i=0}^{N} q_i \Delta\tau_i} \tag{10}$$

여기서, N은 격자를 지나는 유선 수, q_i는 i번째 유선의 유량, $\Delta\tau_i$는 i번째 유선이 해당격자를 지날 때 상주시간, 그리고 $C_i(\tau)$는 i번째 유선이 격자를 통과하는 중심점에서의 농도이다.

2) 결과

준해석해를 이용한 유선 시뮬레이션의 정확성을 검증하기 위하여 해석해, 수치해, 준해석해를 이용한 유선 시뮬레이션 결과들을 비교하였다. 세 가지 경우의 시뮬레이션 결과를 비교하기 위해서 용질 거동의 경계 조건은 1형의 경계 조건을 사용하였으며 20×20 격자 시스템에서 (17, 17) 격자에서 용질 도달 곡선을 구하였다. 그림 1과 2에서 알 수 있듯이 준해석해를 이용한 경우와 해석해를 이용한 경우는 동일한 시뮬레이션 결과를 보였고 수치해를 이용한 경우에는 수치분산의 영향으로 인해 용질 도달 곡선이 상당한 오차를 보였다.

그림 3의 용질 도달 곡선은 용질의 평균 이동 속도가 그림 4의 경우보다 6배 정도 빠른 경우를 나타낸다. 그림에서 알 수 있듯이 수치해를 이용한 경우의 용질 도달 곡선이 다른 두 경우에 비하여 상당한 오차를 나타냄을 알 수 있다. 그림 4는 분산이 지배적인 경우로, 세 가지 모두 유사한 시뮬레이션 결과를 나타내었다. 이송이 지배적인 경우에는 수치해의 수치분산 오차로 인하여 용질 도달 곡선에서 분산 현상이 더 강하게 나타난다. 분산이 지배적인 경우에는 용질 이동에 나타나는 실제 분산현상으로 인하여 수치분산으로 인한 오차가 상대적으로 작게 나타난다. 그림 5는 격자 시스템의 크기에 따른 준해석해와 수치해를 이용한 유선 시뮬레이션을 수행하는데 걸린 시간을 나타낸다. 그림 5에서 알 수 있듯이 준해석해를 이용하여 유선 시뮬레이션을 수행할 경우 시스템의 크기가 커질수록 수치해를 이용하는 경우보다 2-60 배 좋은 계산 효율을 얻을 수 있음을 알 수 있다.

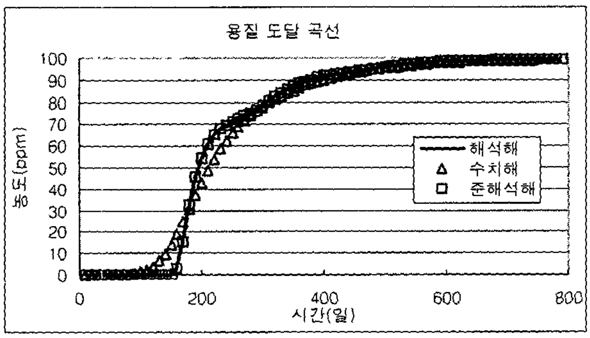

그림 1. 해석해, 수치해, 준해석해를 이용한 유선 시뮬레이션 결과 비교 (균질 매질).

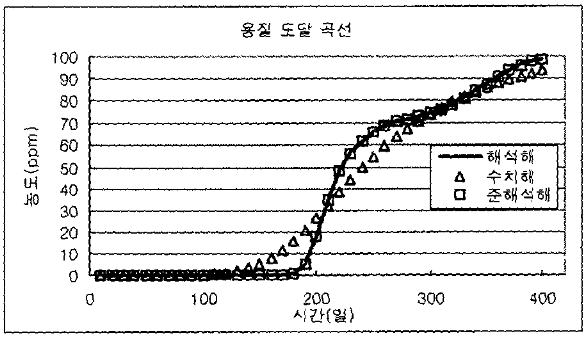

그림 2. 해석해, 수치해, 준해석해를 이용한 유선 시뮬레이션 결과 비교 (불균질한 매질).

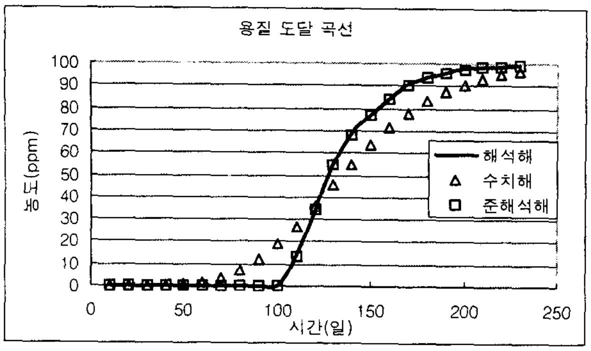

그림 3. 이송이 지배적인 유동에서 해석해, 수치해, 준해석해를 이용한 유선 시뮬레이션 결과 비교

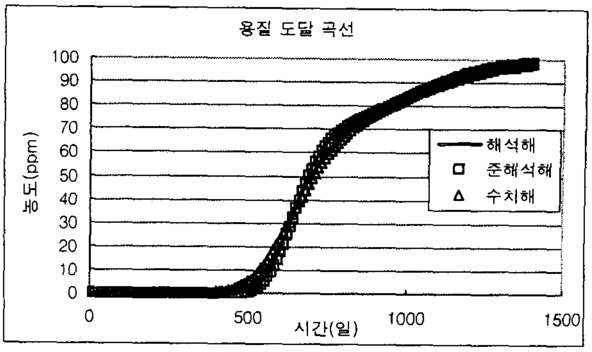

그림 4. 분산이 지배적인 유동에서 해석해, 수치해, 준해석해를 이용한 유선 시뮬레이션 결과 비교

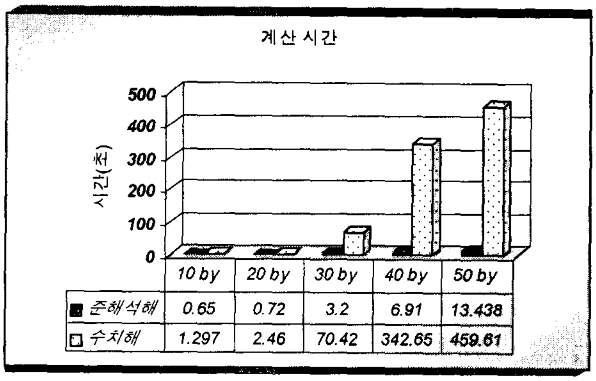

그림 5. 수치해와 준해석해를 이용한 유선 시뮬레이션 수행 시간 비교(시뮬레이션 시간=100일)

3. 결 론

1. 준해석해를 유선 시뮬레이션에 이용할 경우 수치 분산의 문제가 발생하지 않았으며, 해석해를 구하기 어려운 경우에도 유선 시뮬레이션을 효과적으로 적용할 수 있다.
2. 이송이 지배적인 유동에서 수치해를 이용한 유선 시뮬레이션은 상당한 수치 분산을 발생시켰으며 이는 용질 도달 곡선의 오차로 나타났다.
3. 준해석해를 이용한 유선 시뮬레이션은 수치해를 이용하는 경우에 비해서 2-60 배 빠른 계산 효율을 보였다.

사 사

본 연구는 21세기 프론티어 연구개발사업인 수자원의 지속적 확보기술개발 사업단의 연구비 지원(3-2-1)에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

1. Batycky, R.P., Blunt, M.J., and Thiele, M.R., 1997, "A 3D Field Scale Streamline-Based Simulator",

SPE Reservoir Engineering, Vol. 12, pp. 246-254.

2. Crane, M.J. and Blunt, M.J., 1999, "Streamline-Based Simulation of Solute Transport", Water Resources Research, Vol. 35, No. 10, pp. 3061-3077.
3. Jang, M., Lee, J., Choe, J. and Kang, J.M., 2002, "Modeling of Solute Transport in a Single Fracture Using Streamline Simulation and Experimental Validation", Journal of Hydrology, Vol. 261, Issues 1-4, pp. 74-85.
4. King, M.J. and Datta-Gupta, A. 1998, "Streamline Simulation: A Current Perspective", In Situ, Vol. 22, No. 1, pp. 91-117.
5. Pollock, D.W., 1988, "Semi-analytical Computation of Pathlines for Finite-Difference Models", Ground Water, Vol. 26, No. 6, pp. 743-750.
6. Thiele, M.R., Batycky, R.P., Blunt, M.J., and Orr, FM. Jr., 1996, "Simulating Flow in Heterogeneous Media Using Streamtubes and Streamlines", SPE Reservoir Engineering, Vol. 10, pp. 5-12.
7. Wang, G.T., Li, B.Q., and Chen, S., 1999, "A Semianalytical Method for solving Equations Describing the Transport of Contaminants in Two-Dimensional Homogeneous Porous Media", Mathematical and Computer Modeling, Vol. 30, pp. 63-74.