

# Window 함수를 이용한 FIR 디지털필터에 관한 연구

구본석\* · 배상범\* · 김남호\*

\* 부경대학교 공과대학 제어계측공학과

## A Study on FIR Digital Filter using Window Function

Bon-Seuk Ku\* · Sang-Bum Bae\* · Nam-Ho Kim\*

\* Dept. of Control and Instrumentation Eng., Pukyong National Univ.

E-mail : ku1999@lycos.co.kr

### 요 약

현대산업사회의 발전에 따라 신호처리 분야에서 디지털필터의 사용이 급격히 증가하고 있으며, 이러한 디지털필터에는 일반적으로 IIR과 FIR 필터가 있다. 그리고, FIR 디지털필터는 구현이 용이하고 선형위상특성을 나타내며, 설계에 있어서 통과대역의 차단주파수 부근에서 깃스 현상에 의해 발생하는 리플을 완화하기 위해 window 함수를 사용한다. 본 논문에서는 새로운 window 함수를 설계하여 기존의 Hanning, Hamming, Blackman window와 비교하였으며, 판단기준으로 peak side-lobe와 천이특성 등을 사용하였다.

### ABSTRACT

The use of digital filters in the signal processing field is increasing rapidly with development of the modern industrial society, and generally digital filter is classified into IIR (infinite impulse response) filters and FIR (finite impulse response) filters. The FIR digital filter has the phase linearity and the easiness of creation. In the design of the FIR digital filter, the window function is used to alleviate ripples caused by Gibbs Phenomenon around the cut-off frequency of the passband. In this paper, we designed a new window function and compared with existing Hanning, Hamming and Blackman window functions. And we used peak side-lobe and transient characteristics as standard of judgement.

### 키워드

FIR, Hanning, Hamming, Blackman, Gibbs

### 1. 서 론

현대산업사회의 발전에 따라 신호처리 분야에서 디지털필터의 사용이 급격히 증가하고 있다. 그리고 디지털필터는 아날로그필터와 같이 주어진 입력신호를 희망하는 신호로 변환하는 디지털 시스템이며, 이러한 디지털필터에는 IIR (infinite impulse response function)과 FIR (finite impulse response function) 디지털필터가 있다[1].

IIR 디지털필터는 정확성에 있어서 우수하나 계산이 복잡하고 위상변화가 생기며 구현이 용이하지 않다. 그리고, FIR 디지털필터는 IIR 디지털필터에 비하여 다소 부정확하나 선형위상특성을 가지며 구현이 쉽다는 장점을 가지고 있다[2]. 이러한

FIR 디지털필터 설계에 있어서 통과대역의 차단주파수 부근에서 깃스(gibbs) 현상에 의해 발생하는 리플을 완화하기 위해 window 함수를 사용한다.

따라서, 본 논문에서는 새로운 window 함수를 설계하였으며, 제안된 window의 타당성을 입증하기 위해 기존의 Hanning, Hamming, Blackman window 함수를 사용한 디지털필터와 비교하였다. 그리고, 판단기준으로서 peak side-lobe와 천이특성 등을 비교하였다.

### II. 디지털필터

선형시불변시스템에서 입력신호  $x(n) = 0$

( $n < n_0$ ) 일 때, 출력신호  $y(n) = 0$  ( $n < n_0$ ) 이면 초기조건이 만족되며, 이러한 초기조건을 만족하는 이산시스템의 입력이 단위임펄스  $\delta(n)$  일 때, 출력신호  $y(n)$  을  $h(n)$  으로 표시하고 이를 임펄스응답(impulse response)이라 한다.

선형시불변시스템에 이산신호  $x(n)$  을 입력했을 때의 출력신호  $y(n)$  은 식 (1)과 같다.

$$y(n) = S[x(n)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)S[\delta(n-k)] \quad (1)$$

그리고,  $n = k$ 에서 단위임펄스가 가해질 때의 임펄스응답을  $h_k(n)$  으로 표현하면 식 (1)은 식 (2)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n) \end{aligned} \quad (2)$$

선형시불변시스템의 출력은 시스템의 입력과 임펄스응답의 컨벌루션으로 구할 수 있으며, 이 관계는 임펄스응답이 시스템의 모든 특성을 내포하고 있음을 의미하고 있다.

그리고, 선형시불변시스템에서 1차원 디지털필터의 선형 차분방정식은 식 (3)과 같다. 이러한 시스템은 과거의 출력이 현재의 출력에 영향을 미치지 않으므로 IIR 시스템이라 한다.

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k) \quad (3)$$

위의 식 (3)은  $N=0$ 일 때, 다음 식 (4)와 같이 된다. 이와같은 시스템은 현재의 출력이 현재 및 과거의 입력에 따라 결정되며, 과거의 출력에는 영향을 받지 않으므로, FIR 시스템이라 한다.

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k) \quad (4)$$

FIR 디지털필터의 임펄스응답은 필터의 계수와 동일하며, 이러한 임펄스응답을 구하는 방법으로는 푸리에급수에 의한 방법과 window 함수에 의한 방법이 있다. 푸리에급수에 의한 방법은 천이 영역에서 깃스현상에 의해 큰 리플이 발생하고 저지대역의 감쇠량을 크게 할 수 없다. 또한, 차수의 증가할 경우, 이상적인 필터특성에 접근하지만, 주파수 특성상 유한한 차수를 갖는 전달함수의 근사식을 사용하므로 깃스현상은 큰 변화가 없다.

### III. Window 함수의 설계

푸리에급수에 의해 발생한 깃스현상은 window

함수를 사용하여 완화할 수 있으며, 차수가  $M$ 인 1차원 window 함수  $W(\omega)$ 는 식 (5)와 같이  $\omega$ 에 대한 실함수로 된다.

$$W(\omega) = \sum_{k=0}^M w_k e^{j\omega k} \quad (5)$$

주파수영역에서  $W(\omega)$ 와  $H(e^{j\omega})$ 의 컨벌루션은 각각의  $h_k$ 에 대응되는  $w_k$ 의 곱과 같으며,  $H(z)$ 는 식 (6)과 같다.

$$H(z) = \sum_{k=0}^M (w_k h_k) z^{-k} \quad (6)$$

그리고, 2차원 window 함수의 전달함수는 식 (7)과 같다.

$$H(z_k, z_r) = \sum_{k=0}^M (w_k h_k) z^{-k} \sum_{r=0}^N (w_r h_r) z^{-r} \quad (7)$$

위의 식 (7)에서  $w_k$ 와  $w_r$ 이 환상대칭이라면 2차원 window 함수  $w_{kr}(m, n)$ 는 식 (8)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} w_{kr}(m, n) &= w_k(n) \Big|_{n=\sqrt{m^2+n^2}} \\ &= w_k(\sqrt{m^2+n^2}) \end{aligned} \quad (8)$$

이러한 window 함수를 이용한 기존의 FIR 디지털필터에는 Hanning, Hamming, Blackman 등이 있다. 다음의 식 (9)는 Hanning window이며, 식 (10)은 Hamming window이고, 식 (11)은 Blackman window이다.

$$\begin{aligned} w_h(n) &= 0.5[1 + \cos(2\pi n/M)] \\ &, \quad (-M/2 \leq n \leq M/2) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} w_m(n) &= 0.54 + 0.46 \cos(2\pi n/M) \\ &, \quad (-M/2 \leq n \leq M/2) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} w_b(n) &= 0.42 + 0.5 \cos(2\pi n/M) \\ &\quad + 0.08 \cos(4\pi n/M) \\ &, \quad (-M/2 \leq n \leq M/2) \end{aligned} \quad (11)$$

그리고, 본 논문에서 제시한 새로운 window 함수는 식 (12)와 같으며, 그림 1은 이러한 window 함수의 모양을 나타내고 있다.

$$w_{new}(n) = Re \left[ \frac{\csc h(4.4)}{\csc h \left\{ 4.4 \sqrt{1 - \left( \frac{2|n|}{1-M} \right)^{1.98}} \right\}} \right], \quad (-M/2 \leq n \leq M/2) \quad (12)$$

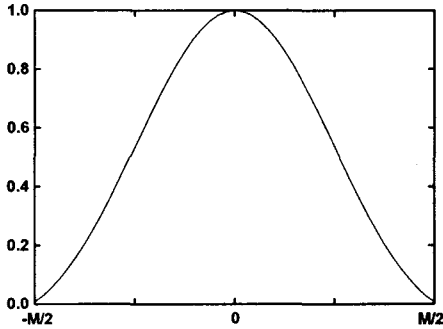


그림 1. 새로운 window 함수

#### IV. 시뮬레이션 및 결과

본 논문에서는 새로운 window 함수를 이용한 디지털필터를 설계하였으며, 제안된 window의 타당성을 입증하기 위해 기존의 Hanning, Hamming, Blackman window 함수를 사용한 디지털 필터와 비교하였다. 그리고, 판단기준으로서 peak side-lobe와 천이특성 등을 비교하였다.

제안된 새로운 window 함수를 이용한 디지털 필터의 특성을 분석하기 위해 다음의 그림 2와 같은 저역필터에 window 모델을 적용하였다. 그림 2는 샘플링 주파수를 1로 하고, 차단주파수  $\omega_c = 0.2$ 로 설정하였다. 그리고,  $\delta$ 는 깁스현상에 의해 나타나는 리플의 크기이며 통과영역과 차단영역의 값이 거의 일치하므로 같게 취하였다. 그리고 peak side-lobe를  $ps$  [dB]로 나타냈으며, 천이영역은  $\Delta F$ 로 나타내고 -3 [dB]인 주파수에서  $ps'$ 가 되는 주파수까지의 값이다.

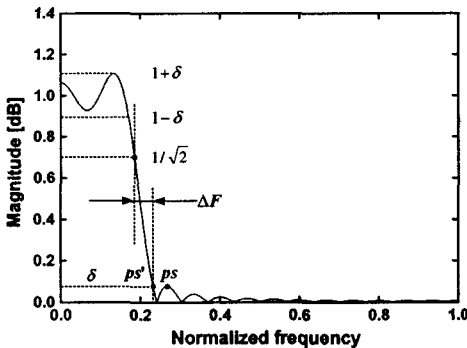


그림 2. 일반적인 저역통과 필터

다음의 그림 3은 식 (9)에서 식 (12)와 같은 Hanning, Hamming, Blackman 그리고 새로운 window 함수의 모양을 나타낸 것이다.

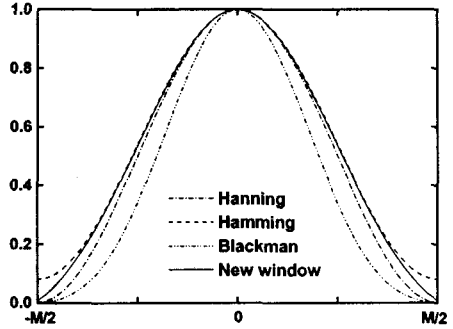


그림 3. 각 window 함수의 비교

그림 3과 같은 window 함수들의 특성을 비교하기 위하여, 정규화된 차단주파수  $\omega_c = 0.2$ 이고, 차수  $M = 48$ 인 저역통과필터의 특성을 시뮬레이션 하였으며, 그림 4와 같다.

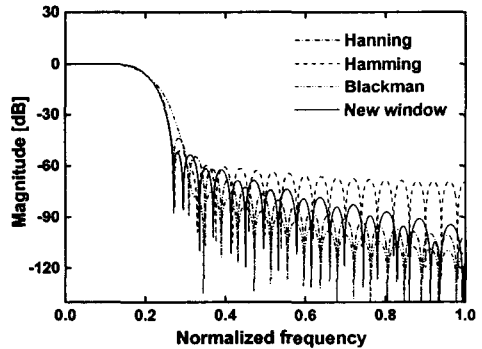


그림 4. 그림 3의 window 함수를 사용한 저역통과필터

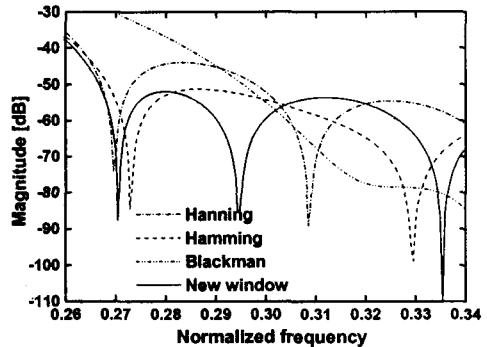


그림 5. 그림 4의 peak side-lobe

또한, 그림 5는 window 함수들의 peak side-lobe 특성을 분석하기 위해 그림 4의 일부분을 확대한 그림이다.

그림 4와 그림 5로부터 기존의 window 함수들 중에서 Hanning window는  $\Delta F$  특성이 우수하였으며, Blackman window는  $ps$  특성은 가장 우수한 반면  $\Delta F$ 에서 가장 큰 값을 나타내었다. 그리고, Hamming window는 기존의 window 함수들 중  $ps$ 와  $\Delta F$ 를 고려할 때 우수 특성을 가지고 있으나, 본 논문에서 제시한 새로운 window 함수 모델의 경우, Hamming window보다  $\Delta F$ 와  $ps$ 에서 우수한 특성을 나타내었다.

표 1은 그림 3에서 제시된 window 함수들의 저역통과필터 특성에 대한 시뮬레이션 결과를  $\Delta F$ 와  $ps$  특성으로 비교한 것이다.

표 1. Window 함수들의 특성 비교

	Hanning	Hamming	Blackman	New
$\Delta F [\pi]$	0.083068	0.085616	0.138261	0.084394
$ps [dB]$	44.02375	51.32339	75.36845	51.98701

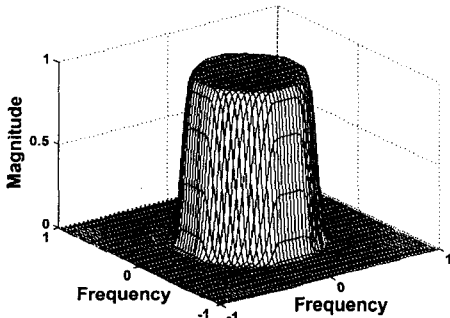


그림 6. 새로운 window 함수를 이용한 2-D LPF의 주파수 응답 ( $\omega_c=0.5$ )

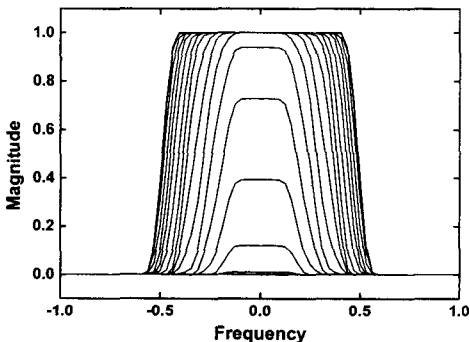


그림 7. 그림 6의 대역폭

그리고, 그림 6은 본 논문에서 제안한 새로운 window 함수를 이용한 2-D 저역통과필터의 주파수 응답을 나타내고 있으며, 그림 7은 2-D LPF의 대역폭을 나타내고 있다.

시뮬레이션 결과, 본 논문에서 제안한 새로운 window 함수를 이용한 디지털필터는 기존의 window 함수를 이용한 것과 비교하여  $\Delta F$ 와  $ps$ 에서 우수한 특성을 나타내었다.

### V. 결 론

본 논문에서는 새로운 window 함수를 설계하였으며, 그 특성을 분석하였다. 그리고, 제안된 모델의 타당성을 입증하기 위해 새로운 window 함수를 사용하여 디지털필터를 설계하였으며, 기존의 Hanning, Hamming, Blackman window 함수를 사용한 FIR 디지털필터와 peak side-lobe, 천이특성 등을 비교하였다.

시뮬레이션 결과, 본 논문에서 제안한 window 함수는 peak side-lobe와 천이특성에서 전체적으로 기존의 window 함수를 사용한 디지털필터보다 우수한 특성을 나타내어 각종 통신, 방송기기 분야 등에 유용하게 적용되리라 사료된다.

### 참고문헌

- [1] Abraham Peled, Bede Liu, "Digital Signal Processing", John Wiley & Sons, Inc., 1976.
- [2] R.W. Hamming, "Digital Filters", Prentice-Hall, Inc., 1989.
- [3] Vinay K. Ingle, John G. Proakis, "Digital Signal Processing Using MATLAB" PWS Publishing Company, 1998.
- [4] Leland B. Jackson, "Digital Filters and Signal Processing", Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [5] M. T. Jong, "Method of Discrete Signal and System Analysis", McGraw-Hill, Inc., 1982.
- [6] Gopinath, R. A. "Some thoughts on least squared error optimal windows", Circuits and Systems, 1994. ISCAS '94, 1994 IEEE International Symposium on, Volume : 2, 30 May-2 June 1994 Pages : 413-416, vol. 2.
- [7] T. S. Huang, J. W. Burnett and A. G. Deczky, "The Importance of Phase in Image Processing Filters", IEEE Trans. Accoust. Speech, Signal Processing, vol. ASSP-23, pp. 529-542, Dec. 1975.
- [8] T. S. Huang, "Two-Dimensional Windows", IEEE Trans. on Audio Electro-Acoust. vol. AU-20, pp. 89-90, Mar. 1972.