

균열해석을 위한 겹침확장 유한요소법

Combined Extended and Superimposed Finite Element Method for Crack Analysis

이 상 호*
Lee, Sang-Ho

송 정 훈**
Song, Jeong-Hoon

허 문 석***
Huh, Moon-Seok

ABSTRACT

This paper presents a modeling technique of cracks by combined extended and superposed finite element method (XS-FEM) which is a combination of the extended finite element method (XFEM) and the mesh superposition method (s-version FEM). In the proposed method, the near-tip field is modeled by a superimposed patch consisting of quarter point elements and the rest of the discontinuity is treated by the XFEM. The actual crack opening in this method is measured by the sum of the crack openings of XFEM and SFEM in transition region. This method retains the strong point of the XFEM so it can avoid remeshing in crack evolution and trace the crack growth by translation or rotation of the overlaid mesh and the update of the nodes to be enriched by step functions. Moreover, the quadrature of the Galerkin weak form becomes simpler. Numerical experiments are provided to demonstrate the effectiveness and robustness of the proposed method.

1. 서 론

최근 개발된 확장유한요소법(Extended Finite Element Method, XFEM)에서는 균열로 인해 발생하는 국부적 특이거동을 해석하기 위해 단위분할법(partition of unity)개념에 입각해 국부적 기저함수를 확장함으로써 내적 불연속문제를 해결한다⁽¹⁻⁵⁾. 이 방법을 이용하면 요소망의 임의의 위치에 존재하는 균열에 대해서도 해석이 가능하기 때문에 임의의 균열진전에 대해 요소망의 재구성 없이도 해석이 가능하다. 그러나 XFEM은 균열선단의 특이성 반응을 위해 균열선단 주변에서 확장함수를 사용할 때 정확한 균열선단 묘사를 위해 요소 세분화가 다시 요구되며, 이로 인해 수치적분상의 어려움이 발생한다.

한편, 균열해석에 있어 연속적인 요소망 위에 균열이 있는 부위만을 다른 요소망으로 구성하여 겹쳐 사용하는 방법(Superimposed Finite Element Method, SFEM)이 Fish에 의해 개발되었다⁽⁶⁻⁸⁾. 그러나 SFEM은 불연속적인 경계부분이 많기 때문에 Galerkin 약형식을 적분하는 것이 힘들고, 균열이 진

* 정희원, 연세대학교 사회환경시스템공학부 부교수 (lee@yonsei.ac.kr)

** 정희원, 연세대학교 사회환경시스템공학부 박사과정 (jhsong@csem.yonsei.ac.kr)

*** 연세대학교 사회환경시스템공학부 석사과정 (moon96s@csem.yonsei.ac.kr)

전하는 것을 모형화하기 위해서는 매개요소(intermediate element)가 삽입되어야 하는 단점이 있다.

본 논문에서는 XFEM이 지니는 장점과 SFEM이 지니는 장점을 조합하여 균열선단주위에서는 균열의 특이성을 반영시킬수 있는 quarter point singular elements로 구성된 작은 패취를 SFEM 기법에 의해 사용하며 나머지 균열들은 XFEM기법에 의해 처리함으로써 균열성장에 따라 요소망을 재구성 할 필요 없이 균열을 모형화하고 해석할 수 있는 새로운 방법을 제시하였다. 본 연구에서 개발된 방법은 기존 두 방법의 이점을 조합한 겹침확장 유한요소법(XS-FEM)이라고 칭하기로 한다.

2. 균열 모형화를 위한 겹침변위장

영역 Ω 와 균열경계 Γ_c 를 포함하는 영역경계 $\partial\Omega$ 를 갖는 해석대상체를 가정해 보자. 이때 영역경계 $\partial\Omega$ 는 표면력경계 $\partial\Omega_f$ 와 변위경계 $\partial\Omega_u$ 로 구분할 수 있고, 해석대상체 내의 균열선단 주변에 균열을 묘사하는 중첩영역 Ω_i^{ov} 를 생각할 수 있다. 여기서 i 는 각각의 균열선단을 의미하며 중첩영역의 요소망은 독립적으로 이산화되어 있다. (Figure 1 참조)

기본요소망(basic mesh) 위에서 변위장은 $\mathbf{u}^{ba}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{cont}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^{disc}(\mathbf{x})$ 이다. 여기서, $\mathbf{u}^{cont}(\mathbf{x})$ 는 연속된 변위장이고, $\mathbf{u}^{disc}(\mathbf{x})$ 은 균열을 가로지르는 불연속 변위장이다. 한편, 중첩요소망(overlaid mesh) 위에서의 변위장을 $\mathbf{u}^{ov}(\mathbf{x})$ 로 나타낸다면 XS-FEM에서의 총 변위장은 중첩의 원리를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{cont}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^{disc}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^{ov}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

이때, 변위장에서 C^0 연속성이 성립되도록 하기 위해 중첩영역의 경계 Γ^{int} 에서 $\mathbf{u}^{ov}(\mathbf{x}) = 0$ 의 조건을 만족하여야 한다.

영역 Ω 와 중첩영역 Ω^{ov} 에서 각각의 요소망은 독립적으로 구성되며 중첩이 가능하다면, 유한요소 근사함수를 구성할 수 있다. Figure 1은 XS-FEM 요소망을 균열선단 주변장에 대해서는 균열선단을 중심으로 quarter point elements로 하나의 패취를 만들어 중첩시키고, 나머지 균열부분은 XFEM 기법에서 사용하는 방법을 기본 요소망에 적용시켜 모형화하였다. 기본요소망의 절점들의 집합을 Λ , 중첩요소망의 절점들의 집합을 $\Lambda^{ov} = \bigcup_{i=1}^{N_c} \Lambda_i^{ov}$ 으로 표시하고, N_c 는 균열 선단의 개수를 의미한다면, 기본요소망에서 계단함수(step function) 확장만으로 이루어진 변위 근사화는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

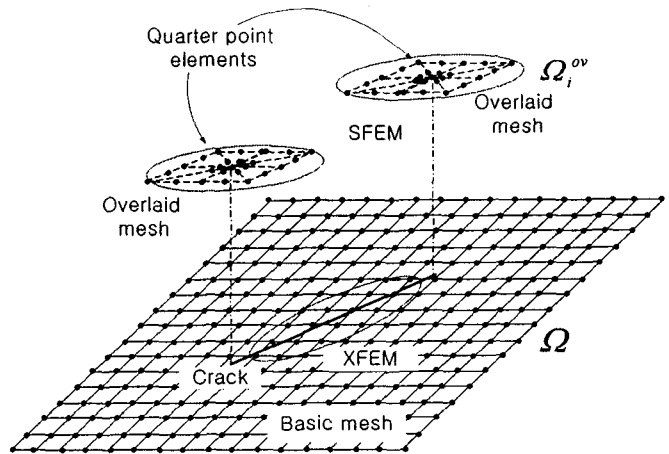


Figure 1. Mesh discretization of the basic and overlaid domains in the XS-FEM

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}^{ba}(\mathbf{x}) &= \hat{\mathbf{u}}^{cont}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{u}}^{disc}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{I \in \Lambda} N_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I + \sum_{J \in \Lambda_{disc}} N_J(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}) \mathbf{a}_J, \quad \mathbf{x} \in \Omega\end{aligned}\quad (2)$$

여기서, \mathbf{u}_I 는 기본요소망 절점에서의 변위벡터이고, \mathbf{a}_J 는 불연속성 정도를 나타내는 확장계수이며, Λ_{disc} 는 계단함수에 의해 확장된 절점들의 집합이다. 그리고, $\Psi(\mathbf{x})$ 은 균열의 의해 완전히 관통된 요소의 불연속 확장함수이다.

중첩요소에 의한 유한요소 근사화는 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{\mathbf{u}}^{ov}(\mathbf{x}) = \sum_{K \in \Lambda^{ov}} N_K^{ov}(\mathbf{x}) \mathbf{c}_K, \quad \mathbf{x} \in \Omega^{ov} \quad (3)$$

여기서, \mathbf{c}_K 는 중첩요소망에서의 균열선단 주변변위장이고, $N_K^{ov}(\mathbf{x})$ 는 균열선단을 모형화하기 위한 요소들의 형상함수이다.

식 (2)와 (3)의 합으로 XS-FEM의 변위근사함수를 표현하면 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \Lambda} N_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I + \sum_{J \in \Lambda_{disc}} N_J(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}) \mathbf{a}_J + \sum_{K \in \Lambda^{ov}} N_K^{ov}(\mathbf{x}) \mathbf{c}_K, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (4)$$

이 때, 균열선단주변에서 기본영역과 중첩영역이 겹치는 부분 $\Omega \cap \Omega^{ov}$ 에서는 변위장들의 합에 의해 근사화가 이루어진다.

3. XS-FEM의 약형식과 이산화

3.1. 약형식과 이산화과정

미소변위의 고체역학 문제에서 경계 $\partial\Omega$ 을 가지는 영역 Ω 에서 평형조건식은 응력 $\boldsymbol{\sigma}$ 와 체적력 \mathbf{b} 를 이용하여 식 (5)와 같이 나타낼 수 있으며, 경계조건은 식 (6), (7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \partial\Omega_u \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \partial\Omega_t \quad (7)$$

여기서 \mathbf{n} 은 경계 $\partial\Omega_t$ 에서 단위수직벡터이고, $\bar{\mathbf{t}}$ 은 규정된 표면력이다. 지배방정식 (5)–(7)에서 trial function의 space는 다음과 같이 정의된다.

$$U = \left\{ \mathbf{u} \in V(\Omega) \mid \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ on } \partial\Omega_u, \mathbf{u} \text{ discontinuous on } \Gamma_C \right\} \quad (8)$$

여기서 $V(\Omega)$ 는 내부 불연속 경계(Γ_C)를 고려한 공간이다. 유사하게 test function space는 다음과

같이 정의된다.

$$\delta U = \left\{ \delta \mathbf{u} \in V(\Omega) \mid \delta \mathbf{u} = 0 \text{ on } \partial\Omega_u, \delta \mathbf{u} \text{ discontinuous on } \Gamma_C \right\} \quad (9)$$

주어진 지배방정식의 약형식은 functional의 최소화에 의해 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta \Pi(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})_\Omega - G(\delta \mathbf{u})_\Omega - (\bar{\mathbf{i}}, \delta \mathbf{u})_{\partial\Omega_i} \\ &= \int_\Omega \varepsilon(\delta \mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) d\Omega - \int_\Omega \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\partial\Omega_i} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{i}} d\Gamma, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \delta U \end{aligned} \quad (10)$$

Test 함수는 이산화한 형태로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\delta \mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \Lambda} N_I(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}_I + \sum_{J \in \Lambda_{disc}} N_J(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}_J + \sum_{K \in \Lambda^{ov}} N_K^{ov}(\mathbf{x}) \delta \mathbf{c}_K \quad (11)$$

위의 test 함수를 식 (10)에 대입하면,

$$\int_\Omega \mathbf{B}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{u}}) d\Omega = \int_\Omega \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega_i} \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{i}} d\Gamma \quad (12)$$

$$\int_{\Omega^{ov}} \mathbf{B}^{ov}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{u}}) d\Omega = \int_{\Omega^{ov}} \mathbf{N}^{ov}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega_i^{ov}} \mathbf{N}^{ov}(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{i}} d\Gamma \quad (13)$$

여기서,

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \Lambda} \frac{\partial N_I(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \sum_{J \in \Lambda_{disc}} \frac{\partial (N_J(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \quad (14)$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \Lambda} N_I(\mathbf{x}) + \sum_{J \in \Lambda_{disc}} N_J(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}) \quad (15)$$

$$\mathbf{B}^{ov}(\mathbf{x}) = \sum_{K \in \Lambda^{ov}} \frac{\partial N_K^{ov}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (16)$$

$$\mathbf{N}^{ov}(\mathbf{x}) = \sum_{K \in \Lambda^{ov}} N_K^{ov}(\mathbf{x}) \quad (17)$$

식 (12)와 (13)에서 알 수 있듯이, 두 영역에서의 응력 의존성으로 인해 계방정식은 다음과 같은 coupling 형태로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{ba-ba} & \mathbf{K}^{ba-ov} \\ \mathbf{K}^{ov-ba} & \mathbf{K}^{ov-ov} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{ba} \\ \mathbf{u}^{ov} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{ext}^{ba} \\ \mathbf{f}_{ext}^{ov} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

여기서, $\{\mathbf{u}^{ba}\}^T = \{(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_I, \dots), (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_J, \dots)\}^T$ 이고, $\{\mathbf{u}^{ov}\}^T = \{(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_K, \dots)\}^T$ 으로 표시할 수 있으며, \mathbf{f}_{ext}^{ba} 과 \mathbf{f}_{ext}^{ov} 은 식 (12)와 (13)의 우변항으로부터 계산되고, 식 (18)의 강성행렬은 다음과 같이

구성할 수 있다.

$$\mathbf{K}_{IJLM}^{ba-ba} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_{IJ}(\mathbf{x}))^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{LM}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (19)$$

$$\mathbf{K}_{IJN}^{ba-ov} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_{IJ}(\mathbf{x}))^T \mathbf{C} \mathbf{B}_N^{ov}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (20)$$

$$\mathbf{K}_{KLM}^{ov-ba} = \int_{\Omega^{ov}} (\mathbf{B}_K^{ov}(\mathbf{x}))^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{LM}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_{KN}^{ov-ov} = \int_{\Omega^{ov}} (\mathbf{B}_K^{ov}(\mathbf{x}))^T \mathbf{C} \mathbf{B}_N^{ov}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (22)$$

3.2. 약형식의 수치적분

기본요소망과 증첩요소망 사이의 겹쳐지는 부위는 그 형상이 일정치 않고 기본요소망과 증첩요소망의 가우스 적분점이 일치하지 않기 때문에 수치적분에 있어 문제점이 발생한다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 Figure 2에서 보듯이, 본 논문에서는 변위장과 응력장을 계산하기 위해서 적분은 먼저 기본요소망의 국부좌표계의 값을 전체좌표계의 값으로 변환한 후 전체 좌표계에서 다시 증첩요소망의 국부좌표계로 매핑하는 double mapping 방식을 이용하여 수치적분을 수행하였다.

그리고 기본요소망에서는 균열에 의해 절단된 요소들을 균열형상에 따라 세부 삼각요소로 분할하여 수치적분을 수행하였다^(2,3,4,5,9).

3.3. 균열 개구변위 모형화

Figure 3에서 보는 바와 같이 XS-FEM에서 실제

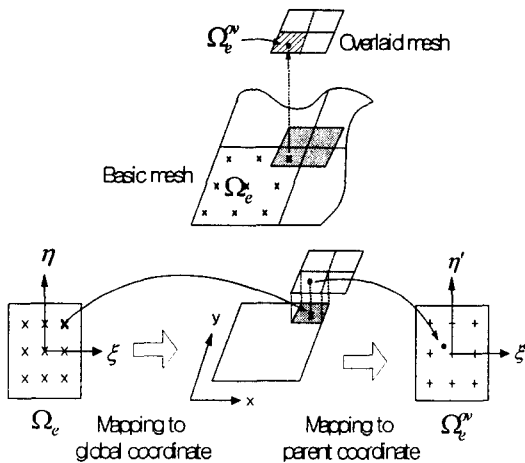


Figure 2. Mapping procedure

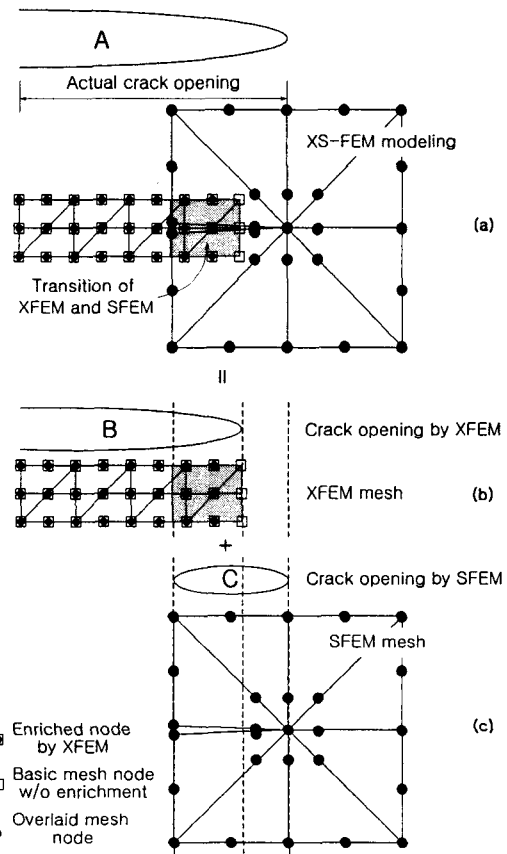


Figure 3. Modeling of a crack opening displacement ((a)=(b)+(c))

균열의 개구변위 A는 XFEM에 의한 개구변위 B와 SFEM의 개구변위 C의 합으로 계산된다. 즉, 기본 요소망에서 XFEM에 의한 균열은 Figure 3(b)에서 보듯이 계단함수에 의해 확장된 근사변위함수로 묘사되는 부분까지 균열이 존재하게 되고 실제 균열의 선단까지는 미치지 못하게 된다. 한편 중첩요소망에서의 균열 개구변위는 Γ^{int} 에서 $u^{ov}(\mathbf{x})=0$ 을 만족하기 위해 중첩요소망의 경계면에서 닫히는 Figure 3(c)와 같은 형상을 띄게 된다. 따라서 XFEM과 SFEM의 개구변위의 합은 실제 균열의 개구변위를 나타낼 수 있게 된다.

4. 수치 예제

4.1. 편축 균열을 가진 정사각 평판의 Patch Test

본 논문에서 제안된 방법의 정확성을 검증하기 위해 Figure 4와 같은 모드 I 편축균열을 가진 정사각형 patch 모형을 사용하였다. 이 patch 시험의 이론해는 식(23)-(24)와 같으며 이 이론해를 patch의 경계에 부과하고 균열의 개구변위와 응력 및 응력확대계수를 비교하였다.

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (23)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (24)$$

이때, 기본 요소망은 1018개의 quadratic 삼각형 요소를 사용하였고 중첩요소망은 8개의 quarter point elements로 구성되었다. Figure 5(a)와 5(b)에서 확인할 수 있듯이, 균열의 개구변위와 균열주변 응력값이 정해와 잘 일치함을 확인할 수 있으며, 계산된 응력확대계수의 상대오차율은 0.39%를 넘지 않았다.

4.2. 균열각이 변화하는 편축균열 문제

Figure 6(a)와 같이 인장력이 가해지는 평판에 존재하는 편축균열의 균열각을 0° , 30° , 45° , 60° 로 변화시켜가며 모드 I, II의 응력확대계수를 계산하였다. Table 1은 계산된 응력확대계수값들을 이론해와 비교한 것으로 상대오차율이 1%미만으로 잘 일치함을 보여주고 있다.

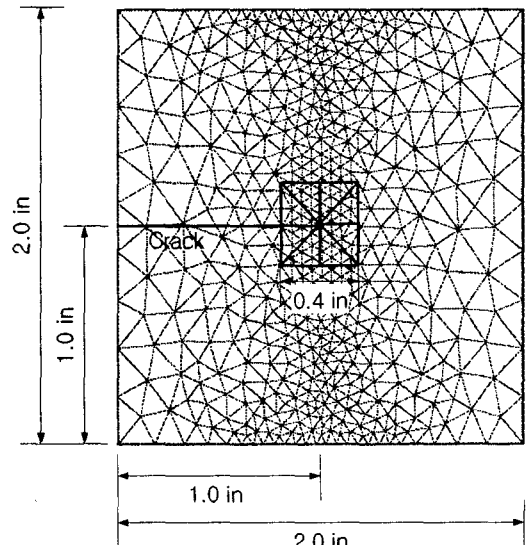
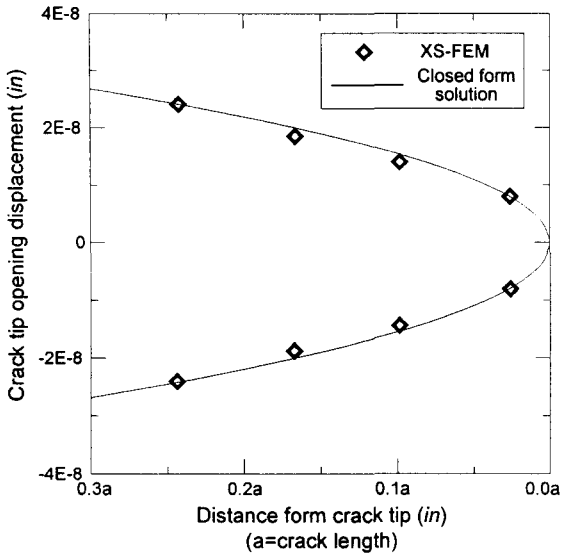
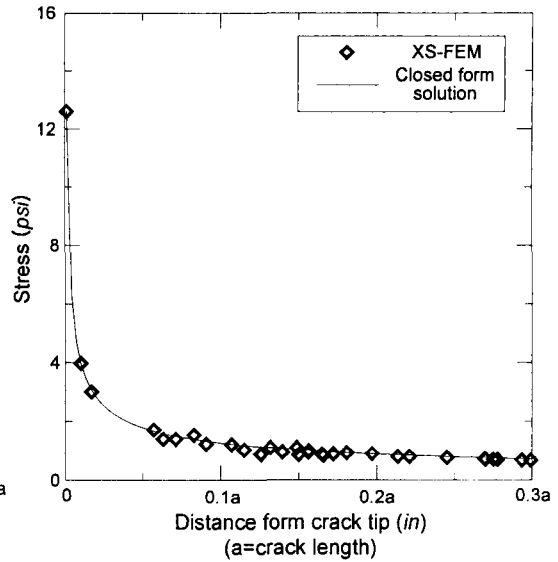


Figure 4. A square patch with near-tip field and the mesh structure



(a)



(b)

Figure 5. Comparison of displacement and stress profiles of square patch with near-tip field to the closed form solutions (a) crack tip opening displacement (b) stress

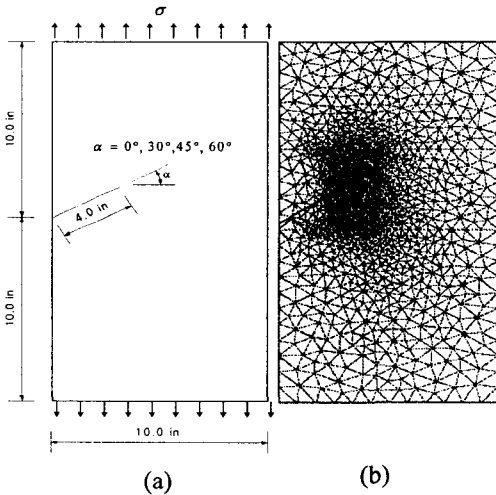


Figure 6. Edge crack with variation of slant angles under tension (a) Problem description (b) Basic and overlaid meshes

Table 1. Stress intensity factors according to the variation of slant crack angles

Slant Angles	Mode	Reference Solutions	XS-FEM	Relative Errors (%)
0°	Mode I	7.75	7.73	0.26
	Mode II	-	-	-
30°	Mode I	5.54	5.55	0.18
	Mode II	1.72	1.71	0.58
45°	Mode I	3.66	3.64	0.55
	Mode II	1.79	1.78	0.56
60°	Mode I	2.10	2.08	0.95
	Mode II	1.48	1.49	0.68

5. 결 론

본 논문에서는 균열을 효과적으로 모형화하고 fracture parameter를 더욱 정확히 산정하기 위하여 유한요소법에 step function을 이용한 확장기저 함수를 적용하여 요소내의 임의의 위치에서의 균열을

묘사할 수 있는 XFEM 기법과 quarter point elements로 구성된 patch를 SFEM 기법에 의해 중첩시켜 해석을 수행할 수 있는 새로운 겹침확장 유한요소법(XS-FEM)을 개발하였다. 이 XS-FEM 방법은 기존의 XFEM, SFEM의 장점을 그대로 유지하면서 균열의 모형화 및 해의 정도 면에서 매우 우수한 결과를 보여주었다. 이 방법은 균열의 성장을 쉽게 모형화 할 수 있으며 플레이트와 셸 문제에도 일반적 적용이 가능한 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단의(R11-1997-045-13005-0) 지원으로 수행되어진 것으로 이에 깊은 감사를 드립니다.

참고문헌

1. T. Belytschko and T. Black, "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.45, 1999, pp.601-620.
2. N. Moës, J. Dolbow and T. Belytschko, "A finite element method for crack growth without remeshing," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.46, 1999, pp.131-150.
3. N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko, "Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method," *Finite Element Analysis and Design*, Vol.36, 2000, pp.235-260.
4. C. Daux, N. Moës, J. Dolbow, N. Sukumar, and T. Belytschko, "Arbitrary branched and intersecting cracks with the eXtended Finite Element Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.48, 2000, pp.1741-1760.
5. T. Belytschko, N. Moës, S. Usui, N. Sukumar, and C. Parimi, "Arbitrary discontinuities in finite element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.50, 2001, pp.993-1013.
6. J. Fish, "The s-version of the finite element method," *Computers and Structures*, Vol.43, 1992, pp.539-547.
7. J. Fish and A. Nath, "Adaptive and hierarchical modeling of fatigue crack propagation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.36, 1993, pp.2825-2836.
8. J. Fish and R. Guttal, "The s-version of finite element method for laminated composites," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.39, 1996, pp.3641-3662.
9. N. Sukumar, D. L. Chopp, N. Moës, and T. Belytschko, "Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.190, 2001, pp.6183-6200.