

열전도 문제에 대한 설계 민감도 해석과 위상 최적 설계

Design Sensitivity Analysis and Topology Optimization of Heat Conduction Problems

김민근*, 조선희**

Min-Geun Kim and Seonho Cho

ABSTRACT

In this paper, using an adjoint variable method, we develop a design sensitivity analysis (DSA) method applicable to heat conduction problems in steady state. Also, a topology design optimization method is developed using the developed DSA method. Design sensitivity expressions with respect to the thermal conductivity are derived. Since the already factorized system matrix is utilized to obtain the adjoint solution, the cost for the sensitivity computation is trivial. For the topology design optimization, the design variables are parameterized into normalized bulk material densities. The objective function and constraint are the thermal compliance of structures and allowable material volume, respectively. Through several numerical examples, the developed DSA method is verified to yield very accurate sensitivity results compared with finite difference ones, requiring less than 0.3% of CPU time for the finite differencing. Also, the topology optimization yields physical meaningful results.

1. 서론

위상 최적설계의 목적은 구조물에서 요구되는 성능에 대하여 적절한 레이아웃을 결정하는 것이다. Bendsøe와 Kikuchi[1]의 균질화 방법(Homogenization Method)을 이용한 위상 최적 설계 이후에 수많은 위상 최적 설계가 선형과 비선형 구조물에 대해서 발전되어 왔다[2]. 위상 최적 설계는 많은 수의 설계 변수를 포함하고 있기 때문에 주로 설계 구배에 기초한 최적화 방법을 이용하여 해를 구하며 여기에 필수적으로 요구되는 설계 변수에 대한 성능함수의 설계 민감도를 효율적으로 구하고 있다. 많은 설계 민감도 해석 방법 중에서 연속체를 기반으로 하는 어드조인트법(Adjoint Variable Method)[3]이 가장 효과적이고 정확하게 설계 민감도를 구하는 방법으로 알려져 있어 위상 최적설계에서 폭넓게 이용되고 있다. 이는 연속체를 기반으로 하는 변분 방정식에 설계변수에 대한 1차 변분을 취함으로써 얻을 수 있다. 지금까지 개발된 연속체 기반의 설계 민감도 해석 방법에서는 몇 가지 형태의 설계 변수를 다룰 수 있다. 본 논문에서는 재료 물성치와 같은 비 형상 설계변수에 대한 연속체 기반 설계 민감도 해석 방법을 사용하여 정상 상태에서 선형 열전도 문제에 대한 효과적인 설계 민감도 법을 제시하였다. 2 장에서는 정상 상태 선형 열전도 문제에 대한 지배 방정식과 약형식(Weak Formulation)을 유도 하였고, 3 장에서는

* 학생회원, 서울대학교 조선해양 공학과 석사과정

**정회원, 서울대학교 조선해양 공학과 교수

연속체 기반으로 한 직접 미분법(Direct Differentiation Method; DDM)과 어드조인트 법(Adjoint Variabel Method; AVM)을 사용한 설계민감도를 유도하였다. 4 장에서는 열전도 문제에 대해 3 장에서 유도한 설계 민감도를 사용하여 위상 최적 설계에 대한 식을 유도하였다. 마지막으로 5 장에서는 몇 가지 수치적 예제를 통하여 해석적인 설계 민감도를 유한 차분법과 비교함으로써 정확성을 보이고, 유도된 어드조인트 법이 계산시간 측면에서 매우 효율적임을 보였다. 그리고, 위상 최적화에 관한 몇 가지 예제를 통하여 얻은 결과가 물리적인 관점에서 매우 타당함을 확인하였다.

2. 열전도 문제의 지배 방정식 및 변분식

그림 1에서, 경계면 Γ 를 가지며 열린 영역 Ω 로 이루어진 탄성체를 생각하자. 주어진 경계 조건은 온도 경계(Temperature Boundary)인 Γ_T^0 , 열속 경계(Flux Boundary) Γ_T^1 , 그리고 대류 경계(Convection Boundary) Γ_T^2 가 있고, 또한 $\Gamma_T^0 \cup \Gamma_T^1 \cup \Gamma_T^2 = \Gamma$ 인 관계가 있다고 하자. 주어진 탄성체는 내부 발열율(Rate of Internal Heat Generation) Q 와 주어진 경계조건의 영향을 받는다. 온도 경계 Γ_T^0 에서의 온도를 T_0 라 하고, 열속 경계 Γ_T^1 에서 열속 q 는 경계면에 수직하게 탄성체 내부로 유입된다고 정한다. 그리고 대류 경계 Γ_T^2 에서의 주위 온도(Ambient Temperature)를 T_∞ 라 하자. 경계에서의 수직 단위 벡터 \mathbf{n} 은 경계에 수직하게 탄성체 외부로 나가는 방향으로 정한다.

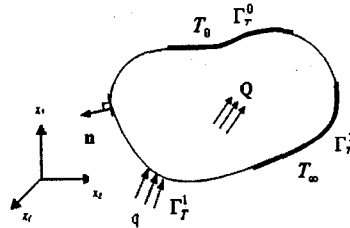


그림 1 열전도 탄성체

온도 영역(Temperature Field) T 에서 정상 상태 열전도 방정식은 다음과 같다.

$$-\kappa T_{,ii} = Q \quad (i=1,2,3), \quad (1)$$

여기서, κ 는 등방성(isotropic) 물체의 열 전도 계수로 온도의 영향을 받지 않는다고 가정한다. 앞에서 언급한 탄성체 표면에 적용되는 경계 조건은 다음과 같다.

$$T = T_0 \quad \text{on } \Gamma_T^0, \quad (2)$$

$$\kappa T_{,i} n_i = q \quad \text{on } \Gamma_T^1, \quad (3)$$

$$\kappa T_{,i} n_i + h(T - T_\infty) = 0 \quad \text{on } \Gamma_T^2, \quad (4)$$

여기서 h 는 대류 계수(Convection Coefficient)이고 양의 값을 갖는다. 해의 공간(Trial Solution Space) Y 는 다음과 같이 정의 된다.

$$Y = \{ T \in [H^1(\Omega)]^3 : T = T_0 \quad \text{on } \Gamma_T^0 \}. \quad (5)$$

또한, 가상 온도 공간 (Virtual Temperature Space) 은 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{Y} = \{ \bar{T} \in [H^1(\Omega)]^d : \bar{T} = 0 \text{ on } \Gamma_T^0 \}. \quad (6)$$

균일(Homogeneous) 경계 조건을 만족 시키는 가상 온도 \bar{T} 를 이용하여 식 (1)은 다음과 같이 약형식으로 표현된다.

$$\int_{\Omega} (-\kappa T_{,ii} - Q) \bar{T} d\Omega = 0 \text{ for all } \bar{T} \in \bar{Y}, \quad (7)$$

여기서 식(7)은 “가상 일률의 원리(Principle of Virtual Power)”를 뜻하나 단위 시간에 대해서 적분을 하면, “가상 일의 원리(principle of virtual work)”라고 볼 수 있다. 경계 조건인 식(2)-(4)를 이용하면, 식(7)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_{\Omega} \kappa \delta_{ij} T_{,i} \bar{T}_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} Q \bar{T} d\Omega - \int_{\Gamma_1} q \bar{T} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} h(T - T_{\infty}) \bar{T} d\Gamma = 0, \text{ for all } \bar{T} \in \bar{Y}. \quad (8)$$

온도에 대해서 선형적인 열 에너지 형식(Thermal Energy Form)을 다음과 같이 정의한다.

$$A(T, \bar{T}) = \int_{\Omega} T_{,i} \kappa \delta_{ij} \bar{T}_{,j} d\Omega + \int_{\Gamma_2} h T \bar{T} d\Gamma. \quad (9)$$

온도에 대해 선형적인 하중 형식(Load Form)을 다음과 같이 정의한다.

$$L(\bar{T}) = \int_{\Omega} Q \bar{T} d\Omega + \int_{\Gamma_1} q \bar{T} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} h T_{\infty} \bar{T} d\Gamma. \quad (10)$$

그러면, 식(8)을 다음과 같이 간략히 쓸 수 있다.

$$\text{Find } T \in Y \text{ such that } A(T, \bar{T}) = L(\bar{T}) \text{ for all } \bar{T} \in \bar{Y}. \quad (11)$$

3. 연속체 기반의 설계 민감도 해석

3.1 Direct differentiation method

각 요소의 열 전도 계수로 이루어진 비 형상 설계 변수 \mathbf{u} 를 고려 할 때, 주어진 설계 변수 \mathbf{u} 에 대해서, 식 (11)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\text{Find } T \in Y \text{ such that } A_{\mathbf{u}}(T, \bar{T}) = L_{\mathbf{u}}(\bar{T}) \text{ for all } \bar{T} \in \bar{Y}, \quad (12)$$

여기서 밑 첨자 \mathbf{u} 는 식(12)가 설계 변수에 대해 변분을 취할 때 각 형식이 설계 변수에 영향을 받는다는 의미이다. 식(12)를 설계 변수 \mathbf{u} 에 대해 1차 변분을 취하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$A_{\mathbf{u}}(T', \bar{T}) = L'_{\mathbf{u}}(\bar{T}) - A'_{\mathbf{u}}(T, \bar{T}) \text{ for all } \bar{T} \in \bar{Y}. \quad (13)$$

다음으로 열전도 문제에서 사용하게 될 목적함수를 적분 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\psi = \int_{\Omega} g_1(\mathbf{u}, T, \nabla T) d\Omega + \int_{\Gamma} g_2(\mathbf{u}, T, \nabla T) d\Gamma. \quad (14)$$

식(14)에 대해서 설계변수에 대한 1차 변분을 취하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\psi' = \frac{d}{d\tau} \left[\int_{\Omega} g_1 \{ \mathbf{u} + \tau \delta \mathbf{u}, T(\mathbf{u} + \tau \delta \mathbf{u}), \nabla T(\mathbf{u} + \tau \delta \mathbf{u}) \} d\Omega + \int_{\Gamma} g_2 \{ \mathbf{u} + \tau \delta \mathbf{u}, T(\mathbf{u} + \tau \delta \mathbf{u}), \nabla T(\mathbf{u} + \tau \delta \mathbf{u}) \} d\Gamma \right]_{\tau=0}$$

$$= \int_{\Omega} (g_{1,u} \delta u + g_{1,T} T' + g_{1,\nabla T} \nabla T') d\Omega + \int_{\Gamma} (g_{2,u} \delta u + g_{2,T} T' + g_{2,\nabla T} \nabla T') d\Gamma. \quad (15)$$

식(13)에서 얻은 T' 를 이용하여 식(15)의 목적함수에 대한 설계 민감도를 쉽게 구할 수 있다.

3.2 Adjoint variable method

어드조인트 법에서는 열전도 문제에 대한 어드조인트 식을 다음과 같이 정의한다

$$A_u(\lambda, \bar{\lambda}) = \int_{\Omega} (g_{1,T} \bar{\lambda} + g_{1,\nabla T} \nabla \bar{\lambda}) d\Omega + \int_{\Gamma} (g_{2,T} \bar{\lambda} + g_{2,\nabla T} \nabla \bar{\lambda}) d\Gamma \text{ for all } \bar{\lambda} \in \bar{Y}, \quad (16)$$

여기서 λ 는 균일 경계조건을 만족하는 시키는 어드조인트 응답이다. $\bar{T} \in \bar{Y}$ 이고, $\lambda \in \bar{Y}$ 이므로, 식(13)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A_u(T', \lambda) = L'_{\Omega}(\lambda) - A'_{\Omega}(T, \lambda) \text{ for all } \lambda \in \bar{Y} \quad (17)$$

또한 $T' \in \bar{Y}$ 과 $\bar{\lambda} \in \bar{Y}$ 이므로, 식(16)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A_u(\lambda, T') = \int_{\Omega} (g_{1,T} T' + g_{1,\nabla T} \nabla T') d\Omega + \int_{\Gamma} (g_{2,T} T' + g_{2,\nabla T} \nabla T') d\Gamma \text{ for all } T' \in \bar{Y}. \quad (18)$$

$A_u(\bullet, \bullet)$ 은 대칭 연산자(symmetric operator)이므로 다음 식이 성립한다.

$$A_u(T', \lambda) = A_u(\lambda, T'). \quad (19)$$

식(17)와 식(18)은 서로 같으므로, 다음과 같은 식을 쓸 수 있다.

$$\int_{\Omega} (g_{1,T} T' + g_{1,\nabla T} \nabla T') d\Omega + \int_{\Gamma} (g_{2,T} T' + g_{2,\nabla T} \nabla T') d\Gamma = L'_{\Omega}(\lambda) - A'_{\Omega}(T, \lambda). \quad (20)$$

식(20)를 식(15)에 대입하면 다음 식이 얻어진다.

$$\psi' = \int_{\Omega} g_{1,u} \delta u d\Omega + \int_{\Gamma} g_{2,u} \delta u d\Gamma + L'_{\Omega}(\lambda) - A'_{\Omega}(T, \lambda). \quad (21)$$

식(21)을 살펴보면, 어드조인트 설계민감도를 구하기 위해 본래 응답 T 와 어드조인트 응답인 λ 만을 필요로 하는 것을 알 수 있다. 식(21)의 효율성과 정확성은 5장에서 살펴본다.

4. 위상 최적 설계의 정식화

위상 최적설계를 위해서 재료 분포는 '0' 에서 '1' 사이의 연속적인 값을 갖는 정규 재료밀도 (Normalized Bulk Material Density) 함수 u 를 도입하였다. 유한 요소법을 이용하기 위해 영역을 NE 개의 요소로 이산화한 요소들에 대해, 재료밀도는 각 요소마다 일정하다고 두면 재료 분포는 다음과 같이 정식화 할 수 있다.

$$\kappa_i = u_i^P \kappa_0, \quad (i = 1, 2, \dots, NE), \quad (22)$$

$$0 < u_{\min} \leq u_i \leq 1, \quad (23)$$

κ_0 는 재료의 열 전도 계수이고 P 는 집중된 재료 분포를 위한 벌칙인자(Penalty Parameter) 이다. 수치적 특이점 (Singularity)을 피하기 위해 최소점 ρ_{\min} 을 부여하였다. 이상에서 위상 최적 설계 문제는 다음과 같이 정식화할 수 있다.

$$\text{Minimize } \Pi = \int_{\Omega} Q T d\Omega + \int_{\Gamma_1} q T d\Gamma + \int_{\Gamma_2} h T_{\infty} T d\Gamma, \quad (24)$$

$$\text{Subject to } \int_{\Omega} u d\Omega \leq V_{\text{allowable}}, \quad (25)$$

여기서 $V_{\text{allowable}}$ 은 허용 재료량(Allowable Volume)을 의미한다. 위상 최적 설계를 위하여 다음 식과 같이 열 컴플라이언스(Thermal Compliance)를 정의하자.

$$\psi = \int_{\Omega} g_1(\mathbf{u}, T, \nabla T) d\Omega + \int_{\Gamma} g_2(\mathbf{u}, T, \nabla T) d\Gamma = L_{\mathbf{u}}(T). \quad (26)$$

식(26)을 설계 변수 \mathbf{u} 에 대해 1차 변분을 취하면 다음 식을 유도 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \psi' &= \int_{\Omega} (g_{1,\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + g_{1,T} T' + g_{1,\nabla T} \nabla T') d\Omega + \int_{\Gamma} (g_{2,\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + g_{2,T} T' + g_{2,\nabla T} \nabla T') d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} Q T' d\Omega + \int_{\Gamma_1} q T' d\Gamma + \int_{\Gamma_2} h T_{\infty} T' d\Gamma. \end{aligned} \quad (27)$$

여기서 다음 식이 사용되었다.

$$L'_{\mathbf{u}}(T) = \int_{\Omega} g_{1,\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} g_{2,\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad (28)$$

어드조인트 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{u}}(\lambda, \bar{\lambda}) &= \int_{\Omega} (g_{1,T} \bar{\lambda} + g_{1,\nabla T} \nabla \bar{\lambda}) d\Omega + \int_{\Gamma} (g_{2,T} \bar{\lambda} + g_{2,\nabla T} \nabla \bar{\lambda}) d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} Q \bar{\lambda} d\Omega + \int_{\Gamma_1} q \bar{\lambda} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} h T_{\infty} \bar{\lambda} d\Gamma, \end{aligned} \quad (29)$$

식(11)과 식(29)를 비교해 보면 다음 관계가 성립한다.

$$\lambda = T. \quad (30)$$

식(26)을 이용하여, 열 컴플라이언스에 대한 설계 민감도 식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\psi' = \int_{\Omega} g_{1,\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} g_{2,\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} d\Gamma + L'_{\mathbf{u}}(T) - A'_{\mathbf{u}}(T, T) \quad (31)$$

식(28)와 식(31)을 이용하면 다음 식이 유도 된다.

$$\psi' = -A'_{\mathbf{u}}(T, T) = - \int_{\Omega} T_{,i} \kappa' \delta_{ij} T_{,j} d\Omega. \quad (32)$$

5. 수치적 예제

5.1 열전달 계수에 대한 온도의 설계 민감도

온도장에 대해서 앞서 유도한 설계 민감도 기법의 정확성과 효율성을 확인하기 위해 그림 2의 평판 모델을 생각하자. 주위 온도 $T_{\infty} = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}$ 라 하고, 대류 조건이 평판의 바닥을 제외한 모든 면에 작용하고 있다고 가정한다. 열속 $q = 100 \text{ (W/m}^2\text{)}$ 가 평판 바닥 중앙에 가해지고 있고 열

전도 계수와 대류 계수는 각각 $\kappa=1.4 (W/m \cdot ^\circ C)$, $h=20 (W/m^2 \cdot ^\circ C)$ 라 두었다. 설계 변수는 모든 요소의 열전도 계수이고 목적 함수는 221번 절점의 온도이다. 그림 3은 221번 절점의 열전도 계수에 대한 온도 설계 민감도를 도시한 결과인데, 예상대로 열 하중이 가해지는 부근에서 가장 민감하다는 것을 알 수 있다.

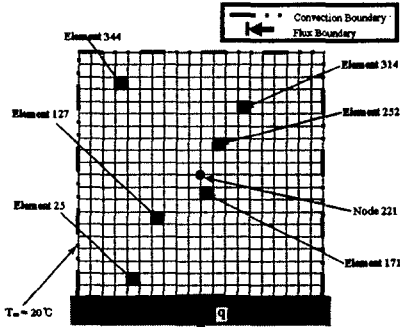


그림 2 사각 평판 모델

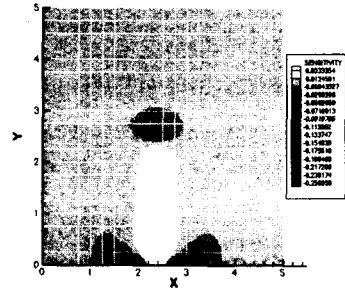


그림 3 열전도 계수에 대한 민감도

표 1은 각 요소의 열전달 계수(κ_i)에 대하여, 221 번 절점의 설계 민감도를 유한 차분법과 비교한 결과이다. $dT_{221}/d\kappa_i$ 은 해석적(여기서 DDM 또는 AVM으로 구한 값)인 설계 민감도를 나타내며 $\Delta T_{221}/\Delta \kappa_i$ 은 유한 차분법으로 구한 설계 민감도이다. 표 1의 마지막 열을 보면 유한 차분법과 해석적인 방법으로 구한 설계 민감도 값이 거의 일치하는 것을 알 수 있다.

Table 1 Comparison of design sensitivity

Design Variable	$\frac{dT_{221}}{d\kappa_i}$	$\frac{\Delta T_{221}}{\Delta \kappa_i}$	$\frac{\Delta T_{221}}{\Delta \kappa_i} / \frac{dT_{221}}{d\kappa_i}$ (%)
κ_{25}	-7.89047043 $\times 10^{-3}$	-7.89057786 $\times 10^{-3}$	100.00136
κ_{127}	-8.28900388 $\times 10^{-4}$	-8.28913800 $\times 10^{-4}$	100.00162
κ_{171}	2.75000603 $\times 10^{-2}$	2.75004899 $\times 10^{-2}$	100.00149
κ_{252}	-8.21570461 $\times 10^{-3}$	-8.21582671 $\times 10^{-3}$	100.00149
κ_{314}	-2.33197840 $\times 10^{-3}$	-2.33201285 $\times 10^{-3}$	100.00148
κ_{344}	-7.20091450 $\times 10^{-4}$	-7.20101849 $\times 10^{-4}$	100.00144

Table 2 Comparison of CPU time

Method	CPU time (seconds)	
	DDM (DDM/FDM %)	AVM (AVM/FDM %)
FDM	40.4882192	14.27052 (35.246 %)
		0.100144 (0.247 %)

표 2는 설계 민감도 계산 시 DDM 을 이용할 때와 AVM을 이용할 때의 계산 시간을 비교한 결과이다. 유한 차분법과 비교해서는 DDM 은 약 35% AVM은 약 0.25%의 계산 시간이 소요 되었으며, AVM은 DDM의 약 0.7%의 계산 시간이 소요되었음을 알 수 있다.

5.2 위상 최적 설계의 예제

그림 4-6 은 각각 다른 조건에서의 위상 최적설계를 수행 한 결과이다. 사용한 요소의 수는 400 개 이며, 가용 재료량은 30%로 하였다. 또한 재료 분포의 집중을 위한 벌칙인자(Penalty Parameter) $P = 3$ 으로 하였다. 각각의 예제에서 열속, 대류 계수, 온도 경계 조건, 열전도 계수는 각각 $q=100 (W/m^2)$, $h=20 (W/m^2 \cdot ^\circ C)$, $T_0=0 (^\circ C)$, $\kappa=1.4 (W/m \cdot ^\circ C)$ 로 두었다.

그림 4는 대류 조건이 없이 온도 경계조건과 오른쪽 중앙에 열 유속이 가해 졌을 때, 내부 발열을 Q 를 증가시키면서 수행된 위상 최적 설계의 결과이다.

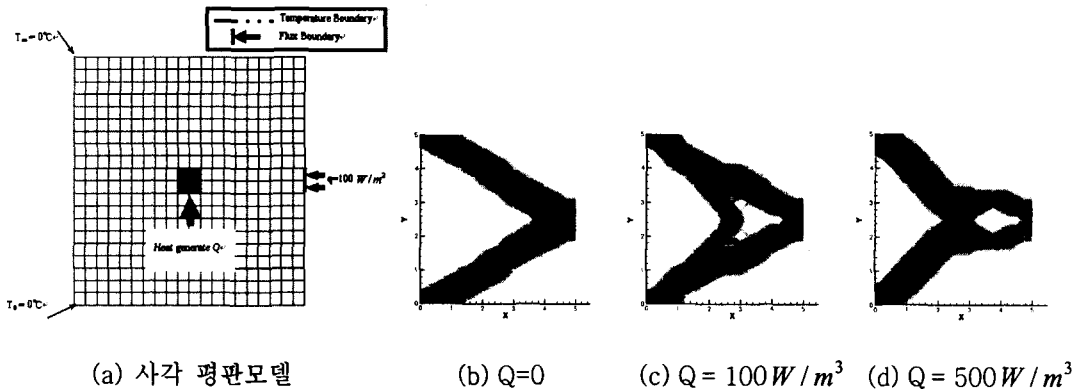


그림 4 여러 가지 내부 발열율에 따른 위상설계 결과

그림 5는 온도 경계조건과 열속이 없이 네 면에 모두 대류 경계조건을 가한 상태에서, 중앙의 내부 발열율 Q 를 증가시키면서 나타나는 위상 최적설계 결과이다.

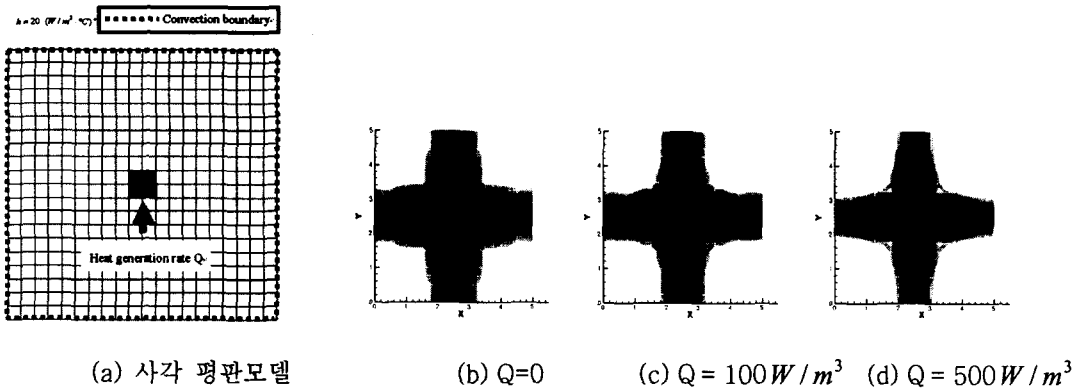


그림 5 여러 가지 내부 발열율에 따른 위상설계 결과

그림 4와 그림 5에서 알 수 있듯이 내부 발열율이 증가함에 따라, 열의 발생되는 지점과 열이 밖으로 나가는 곳과의 연결성이 점점 증가하는 것을 알 수 있다. 이는 물리적으로 전체적인 온도 분포를 낮춘다는 측면에 합리적인 결과이다. 그림 6은 기하학적 모양을 다르게 하여 그림과 같이 열속과 내부 발열율 Q 를 $1000 W/m^3$ 을 가했을 때에 위상 최적화를 수행하기 전에 비해 수행한 후의 온도 분포가 개선되었음을 보여주는 예제이다. 위상 최적 설계 전에는 온도 분포가 $34.33^\circ\text{C} \sim 194.03^\circ\text{C}$ 정도였지만 위상 최적 설계를 수행한 후에는 온도 분포가 $9.61^\circ\text{C} \sim 153.80^\circ\text{C}$ 정도로 영역 전체에 대해서 평균적으로 온도가 내려갔음을 보여준다.

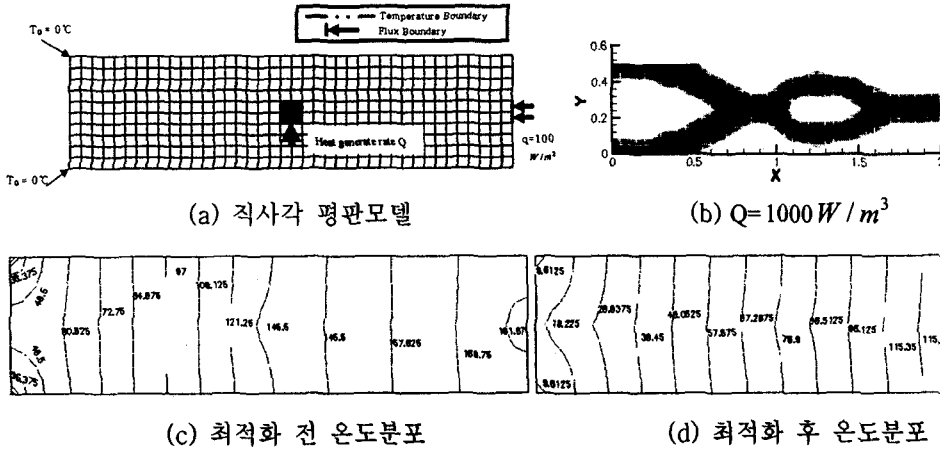


그림 6 위상설계 결과 및 온도분포

6. 결론

본 논문에서는 정상 상태에서의 열전달 문제에 대한 변분식을 유도하여 직접미분법과 어드조인트법을 이용하여 연속체 기반의 설계 민감도 식을 구하였다. 또한 열전달 문제에 대해서 어드조인트법을 이용하여, 위상 최적설계 기법을 개발하였다. 어드조인트법은 이미 구하여진 시스템 매트릭스를 사용하기 때문에 계산비용 면에서의 절감 효과가 큰 것을 확인하였다. 위상 최적설계를 위하여 설계 변수들은 재료밀도로 인수화하여 사용하였다. 그리고 여러 가지 수치적 예제를 통하여, 유한 차분법과 비교하여 유도된 식으로 구한 설계 민감도 값이 매우 정확함을 보였다. 또한, 수행된 위상 최적화가 물리적으로 타당함을 알 수 있고 경계면에 가해진 열속과 내부 발열율의 비율에 따라 매우 다른 위상이 나올 수 있음을 확인하였다. 위상 최적화가 수행되기 전의 온도 분포와 수행된 후의 온도 분포를 비교하여 평균적인 온도 분포 면에서 크게 개선되었음을 알 수 있었다.

참고 문헌

1. M.P. Bendsøe, N. Kikuchi, Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1988; **71**:197-224.
2. S. Cho, H. Jung, Design sensitivity analysis and topology optimization of displacement-loaded nonlinear structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2003; **192**: 2539-2553.
3. E.J. Haug, K.K. Choi, and V. Komkov, *Design sensitivity analysis of structural systems* 1986, Academic Press, New York.
4. A. Sluzalec and M. Kleiber, Shape sensitivity analysis for nonlinear steady-state heat conduction problems, *International Journal of heat and mass transfer* 1996; **39**:2609-2613.
5. Q. Li, G.P. Steven, O.M. Querin, and Y.M. Xie, Shape and topology design for heat conduction by evolutionary structural optimization, *International Journal of heat and mass transfer* 1999; **42**:3361-3371.