

고주파수대역에서 파워흐름해석법을 이용한 구조물의 설계민감도 해석과 위상최적설계

Design Sensitivity Analysis and Topology Optimization Method for Power Flow Analysis at High Frequency

박찬영*, 박영호**, 조선희***, 홍석윤****

Chan-Young Park, Young-Ho Park, Seonho Cho, and Suk-Yoon Hong

ABSTRACT

A continuum-based design sensitivity analysis and topology optimization methods are developed for power flow analysis. Efficient adjoint sensitivity analysis method is employed and further extended to topology optimization problems. Young's moduli of all the finite elements are selected as design variables and parameterized using a bulk material density function. The objective function and constraint are an energy compliance of the system and an allowable volume fraction, respectively. A gradient-based optimization, the modified method of feasible direction, is used to obtain the optimal material layout. Through several numerical examples, we notice that the developed design sensitivity analysis method is very accurate and efficient compared with the finite difference sensitivity. Also, the topology optimization method provides physically meaningful results. The developed design sensitivity analysis method is very useful to systematically predict the impact on the design variations. Furthermore, the topology optimization method can be utilized in the layout design of structural systems.

1. 서론

기존의 저주파수 대역에서의 진동해석은 주로 변위법을 기반으로한 유한요소법(Finite Element Method)이 효과적으로 사용되어 왔다. 하지만 이러한 해석방법은 주파수가 높아짐에 따라 요소의 크기가 작아져야 하기 때문에, 계산시간과 비용이 기하급수적으로 증가하여 중고주파수 대역의 진동해석에서는 실용적이지 못하다. 뿐만 아니라 고주파수 대역에서는 각 해석파라미터의 불확실성이 증가하여

* 서울대학교 조선해양공학과 석사과정

** 서울대학교 조선해양공학과 박사과정

*** 정회원 서울대학교 조선해양공학과 교수

**** 서울대학교 조선해양공학과 교수

변위법을 기반으로 한 결정론적인 해석법(deterministic method)의 결과가 신뢰성이 매우 떨어진다고 알려져 있다. 따라서 이에 대한 대안으로 고주파수 대역 영역에서의 진동을 해석하는 방법으로 파워흐름해석법(Power Flow Analysis, PFA)이 사용되고 있다. 파워흐름해석법은 저장 및 손실되고 전달되는 원거리(farfield)성분의 에너지로 진동상태를 기술할 수 있다고 전제하고 구조물의 시간과 공간에 대한 평균적인 거동을 예측한다. 정상상태에서의 열전도방정식과 유사한 형태의 에너지지배방정식이라는 고유의 편미분방정식을 기반으로 하기 때문에 공간상에서의 진동에너지의 전반적인 변화뿐만 아니라 진동파위의 전달경로까지 예측할 수 있을 뿐만 아니라 국부적인 감쇠처리와 파워입력도 고려하기 쉽다. 고 주파수 진동에 의한 피로파괴는 구조물에 심각한 영향을 미친다. 따라서 고 주파수의 대역에서 구조물이 진동에 대해 최적화 되어 보다 나은 진동응답을 가지는 구조물을 설계하기 위해서 설계민감도 해석 및 위상 최적 설계 기법의 개발은 매우 필요하다. 본 연구에서는 고 주파수대역에서 구조물의 진동 응답특성을 개선하는 최적의 부재 배치를 얻는 위상 최적화 기법을 개발하였다.

2. 파워흐름해석

2.1 파워흐름 지배 방정식

그림 1의 입력 파워 π 가 가해지는 구조 영역을 생각하자.

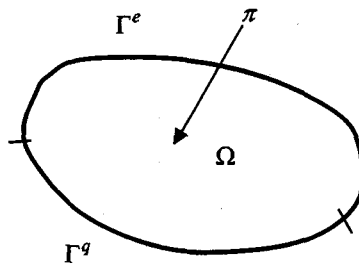


그림 1 입력 파워 π 가 가해지는 구조 영역

파워흐름 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 e + \eta\omega e = \pi, \quad (1)$$

여기서 e 는 시간과 공간에서 평균된 에너지밀도 함수이다. η 는 구조 감쇠계수, ω 은 주파수, c_g 은 군속도(Group Velocity)를 나타낸다. 여러 개의 영역(Domain)을 가지는 문제에서 식(1)은 다음과 같이 표현된다.

$$-\frac{c_{gi}^2}{\eta_i\omega} \nabla^2 e_i + \eta_i\omega e_i = \pi_i. \quad (2)$$

전체 영역 Ω 의 성분을 " r "개의 부 영역(Sub-domain)으로 나타내면 에너지 밀도장(Energy Density Field)은 이 차원 문제에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$e = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}^T, \quad \text{여기서 } e_i \in [H^0(\Omega_i)]^2. \quad (3)$$

변분 공간(Variational Space)에서의 에너지 밀도 장을 다음과 같이 정의하면

$$Z = \{ \mathbf{e} \in \mathbf{W} : \mathbf{e} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma^e \}, \text{ 여기서 } \mathbf{W} = \Pi_{i=1}^r [\mathbf{H}^0(\Omega_i)]^2, \quad (4)$$

구조물의 전체 경계는 두 가지 종류의 경계 $\Gamma = \Gamma_1^q \cup \Gamma_1^e$ 로 이루어져 있고 Γ_1^q 은 플럭스 경계 조건이고 Γ_1^e 은 에너지 경계 조건을 나타낸다. 다음과 같이 식(5)의 약 형식(Weak Form)으로 표현할 수 있다.

$$\iint_{\Omega_i} \left(\frac{c_{gi}^2}{\eta_i \omega} \nabla e_i \cdot \nabla \bar{e}_i + \eta_i \omega e_i \bar{e}_i \right) d\Omega = \iint_{\Omega_i} \pi_i \bar{e}_i d\Omega - \int_{\Gamma_1^q} \hat{q}_i \bar{e}_i d\Gamma \quad \forall \bar{e} \in Z, \quad (5)$$

여기서 \hat{q}_i 는 에너지 플럭스 경계에서 결정되는 경계조건이다. 식(5)은 다음과 같이 단순한 형태로 나타낼 수 있다.

$$a_\Omega(\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}}) = \ell_\Omega(\bar{\mathbf{e}}) \text{ 모든 } \bar{\mathbf{e}} \in Z \quad (6)$$

$$a_\Omega(\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}}) \equiv \sum_{i=1}^r a_{\Omega_i}(e_i, \bar{e}_i) = \sum_{i=1}^r \iint_{\Omega_i} \left(\frac{c_{gi}^2}{\eta_i \omega} \nabla e_i \cdot \nabla \bar{e}_i + \eta_i \omega e_i \bar{e}_i \right) d\Omega \quad (7)$$

$$\ell_\Omega(\bar{\mathbf{e}}) \equiv \sum_{i=1}^r \ell_{\Omega_i}(\bar{e}_i) = \sum_{i=1}^r \left[\iint_{\Omega_i} \pi_i \bar{e}_i d\Omega - \int_{\Gamma_1^q} \hat{q}_i \bar{e}_i d\Gamma \right]. \quad (8)$$

군 속도는 식(9)으로 표현된다. ρ 은 재료의 밀도, ν 은 포아손 비, h 는 평판의 두께, D 는 굽힘 강성을 나타낸다.

$$c_g = 2\sqrt{\frac{\omega^2 D}{\rho h}} = 2\sqrt{\frac{\omega^2 E h^2}{12\rho(1-\nu^2)}} \quad (9)$$

3. 설계민감도 해석

3.1 직접미분법 (Direct Differentiation Method; DDM)

식(5)을 다음과 같은 간략 형식(Abstract Form)으로 표현할 수 있다. 첨자의 u 는 각 형식이 설계 변수와 연관된 범함수임을 의미한다.

$$a_u(\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}}) = \ell_u(\bar{\mathbf{e}}) \text{ 모든 } \bar{\mathbf{e}} \in Z, \quad (10)$$

식(7-8)은 또한 다음과 같이 유한요소 식으로

$$a_u(\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}}) \equiv \sum_{i=1}^r \iint_{\Omega_i} \left(\frac{c_{gi}^2}{\eta_i \omega} \nabla e_i \cdot \nabla \bar{e}_i + \eta_i \omega e_i \bar{e}_i \right) d\Omega \approx \sum_{i=1}^r \{\bar{\mathbf{E}}_i\}^T \{\mathbf{K}_i\} \{\mathbf{E}_i\}, \quad (11)$$

$$\ell_u(\bar{\mathbf{e}}) \equiv \sum_{i=1}^r \left[\iint_{\Omega_i} \pi_i \bar{e}_i d\Omega - \int_{\Gamma_1^q} \hat{q}_i \bar{e}_i d\Gamma \right] \approx \sum_{i=1}^r \{\bar{\mathbf{E}}_i\}^T \{\mathbf{F}_i\} \quad (12)$$

식(10)를 설계변수 u 에 대해서 변분을 취하면 다음식을 유도할 수 있다.

$$a_u(\mathbf{e}', \bar{\mathbf{e}}) = \ell'_{\bar{a}u}(\bar{\mathbf{e}}) - a'_{\bar{a}u}(\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}}) \text{ 모든 } \bar{\mathbf{e}} \in Z, \quad (13)$$

식(13)를 유한요소로 이산화시키면 다음식을 얻을 수 있다.

$$\ell'_{\bar{a}u}(\bar{\mathbf{e}}) = 0 \quad (14)$$

$$a'_{\bar{a}u}(\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}}) = \sum_{i=1}^r \iint_{\Omega_i} \left(\frac{2c_{gi}}{\eta_i \omega} \nabla e_i \cdot \nabla \bar{e}_i \right) \frac{\partial c_{gi}}{\partial u} \delta u d\Omega \approx \sum_{i=1}^r \{\bar{\mathbf{E}}_i\}^T \{\mathbf{K}'_i\} \{\mathbf{E}_i\}, \quad (15)$$

3.2 어드조인트법 (Adjoint Variable Method; AVM)

구조물의 진동 문제에서 일반적으로 사용되는 성능함수(Performance Functional)는 다음과 같이 적분 형태로 쓸 수 있다.

$$\Psi = \iint_{\Omega} g(\mathbf{e}, \nabla \mathbf{e}, u + \varepsilon \delta u) d\Omega. \quad (16)$$

식(16)를 설계변수에 대하여 일차 변분을 취하면 다음과 같다.

$$\Psi' = \iint_{\Omega} (g_{,e} \mathbf{e}' + g_{,v_e} \nabla \mathbf{e}' + g_{,u} \delta u) d\Omega \quad (17)$$

식(17)에서 \mathbf{e}' 을 포함하는 항들을 변분 공간 내의 임의의 함수인 $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_r\}^T$ 로 표현하고 식(13)의 좌변에 \mathbf{e}' 대신 $\bar{\lambda}$ 을 사용하여 어드조인트 식(Adjoint Equation)을 구성하면 다음과 같다.

$$a_u(\bar{\lambda}, \lambda) = \iint_{\Omega} (g_{,e} \cdot \bar{\lambda} + g_{,v_e} \cdot \nabla \bar{\lambda}) d\Omega \quad \text{모든 } \bar{\lambda} \in Z \quad (18)$$

\mathbf{e}' 은 Z 공간에 속해 있고 식(18)은 모든 $\bar{\lambda} \in Z$ 에 대하여 만족하므로 다음 식은 성립된다.

$$a_u(\mathbf{e}', \lambda) = \iint_{\Omega} (g_{,e} \mathbf{e}' + g_{,v_e} \nabla \mathbf{e}') d\Omega \quad (19)$$

또한 λ 는 공간 Z 에 속하고 식(13)은 모든 $\bar{\mathbf{e}} \in Z$ 에 대하여 만족하므로 다음 식을 쓸 수 있다.

$$a_u(\mathbf{e}', \lambda) = \ell'_{\bar{\mathbf{e}}}(\lambda) - a'_{\bar{\mathbf{e}}}(\mathbf{e}, \lambda) \quad (20)$$

식(19-20)에서 다음의 관계가 성립하며

$$\iint_{\Omega} (g_{,e} \cdot \mathbf{e}' + g_{,v_e} \cdot \nabla \mathbf{e}') d\Omega = \ell'_{\bar{\mathbf{e}}}(\lambda) - a'_{\bar{\mathbf{e}}}(\mathbf{e}, \lambda) \quad (21)$$

따라서 식(21)을 식(17)에 대입하면 다음의 식을 얻는다.

$$\Psi' = \iint_{\Omega} g_{,u} \delta u d\Omega + \ell'_{\bar{\mathbf{e}}}(\lambda) - a'_{\bar{\mathbf{e}}}(\mathbf{e}, \lambda) \quad (22)$$

4. 위상 최적설계

가진력 π 를 받는 구조물에서, 에너지에 대한 컴플라이언스(Energy Compliance)를 다음과 같이 정의하고 최적설계 문제에서 목적함수로 도입하기로 하자.

$$C = \sum_{i=1}^r \left[\iint_{\Omega_i} \pi_i \bar{e}_i d\Omega - \int_{\Gamma} \hat{q}_i \bar{e}_i d\Gamma \right] \quad (23)$$

이는 구조물이 가지고 있는 전체 에너지에 대한 척도로서 최소의 에너지 컴플라이언스를 갖는 구조물은 에너지가 국부적으로 집중되지 않고 전체적으로 고른 분포를 가지게 된다. 목적함수인 구조물의 최소 에너지 컴플라이언스에 대한 최적의 재료분포를 알기 위해 설계변수를 탄성계수로 정하였다. 제한 조건으로 가용 재료량을 설정하였고 최적의 재료 분포를 얻기 위해서 밀도함수(Bulk Material Density)를 사용하여 각 요소의 탄성 계수를 표현하였다.

$$E_i = \rho_i^p E_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{여기서 } 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1. \quad (24)$$

n 은 유한 요소의 수이며 P 는 집중계수이다. 요소 i 에서 밀도함수 ρ 가 1이면 그 부분에서 재료가 최대로 사용된 상태(Solid)이고, 0이면 재료가 없는 상태(Void)를 의미한다. 밀도함수의 하한선은

시스템 행렬의 특이성(Singularity)을 방지하기 위해서 $\rho_{\min} = 0.1$ 로 두었다. 이상에서 살펴본 최적화 조건을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\text{Minimize } C = \sum_{i=1}^r \left[\iint_{\Omega_i} \pi_i \bar{e}_i d\Omega - \int_{\Gamma_i} \hat{q}_i \bar{e}_i d\Gamma \right], \text{ Subject to } g = \frac{\iint_{\Omega} \rho d\Omega}{\iint_{\Omega} d\Omega} \leq V \quad (25)$$

여기서 C, f, e, V, ρ 는 각각 컴플라이언스(Compliance), 입력파워, 에너지 밀도, 가용 재료량 비율, 재료밀도를 나타낸다. 목적함수의 설계민감도는 식(22)에서 구할 수 있으며 에너지 컴플라이언스의 어드조인트 해 λ 는 \mathbf{e} 와 같고 명시적 종속 항(Explicit Dependence Term)과 하중식(Load Form)은 설계변수에 종속성이 없으므로 다음 식이 유도된다.

$$\Psi' = C' = -a'_{\lambda}(\mathbf{e}, \mathbf{e}) \quad (26)$$

위상 최적 설계를 위해서 사용한 알고리즘은 MMFD(Modified Method of Feasible Direction)을 사용하였다. MMFD를 사용하기 위한 설계민감도는 목적 함수인 컴플라이언스와 제한조건에 대한 설계민감도가 필요하며 제한조건에 대한 설계민감도는 다음과 같다.

$$\frac{dg}{du} = \frac{\iint_{\Omega} \rho' d\Omega}{\iint_{\Omega} d\Omega} \quad (27)$$

5. 수치 예제

5.1 설계민감도 해석

그림 2의 평판은 양단이 고정되어 있고, 10w의 파워가 1000Hz의 주파수로 평판 아래로부터 유입되고 윗면을 통해서 에너지가 소산되는 구조물이다. 영률 E는 1.95×10^{11} (N/m), 구조 감쇠계수는 0.1, 포아손 비는 0.28, 두께는 0.01m, 밀도는 7800kg/m^3 이다. 21번 절점의 에너지 밀도에 대하여 각 요소의 밀도함수에 대한 설계 민감도를 구하였다.

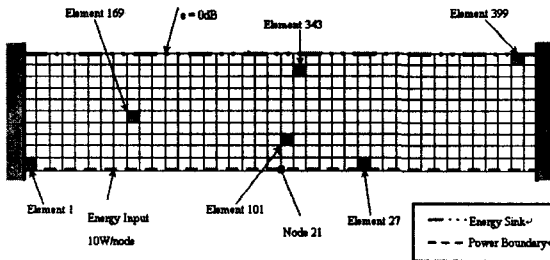


그림 2 설계 영역과 경계 조건

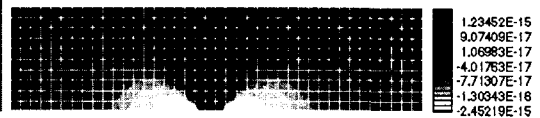


그림 3 에너지 밀도에 대한 설계민감도

어드조인트법(AVM) 및 직접 미분법(DDM)을 사용하여 계산하고 유한차분법(FDM)과 비교한 결과는 표1과 같다. 직접미분법과 어조인트법으로 계산한 결과들에서 각각 소요된 CPU 시간은 직접 미분법이 55.125초 어조인트법이 10.90625초로서 어조인트법이 직접미분법으로 계산하는 데 걸린 시간의 25% 정도로 어조인트법이 매우 효율적인 것을 알 수 있다.

표1 설계민감도의 검증

Design Variable	AVM	DDM	FDM	Accuracy (%)
1	-3.195776E-17	-3.195776E-17	-3.195774E-17	100.00
27	-1.894335E-16	-1.894335E-16	-1.894330E-16	100.00
44	-3.584428E-17	-3.584428E-17	-3.584428E-17	100.00
101	8.304383E-16	8.304383E-16	8.304379E-16	100.00
169	-4.475450E-17	-4.475450E-17	-4.475449E-17	100.00
343	2.794033E-17	2.794033E-17	2.794033E-17	100.00
399	-1.228857E-18	-1.228857E-18	-1.228857E-18	100.00

5.2 위상최적설계 결과

예제 1

그림 4의 구조물은 단순지지로 지지되어 있으며 10W의 파워가 임의의 고 주파수로 평판의 모든 면으로부터 들어 가고 평판의 센터에서 에너지가 소산되고 있다. 영률 E는 1.95×10^{11} (N/m), 구조 감쇠계수는 0.1, 포아송 비는 0.28, 두께는 0.01m, 밀도는 7800kg/m^3 이다. 요소 수는 1024개이고 절점은 1105개이다. 에너지 컴플라이언스에 대해서 어조인트법을 사용하여 설계민감도를 구하였다.

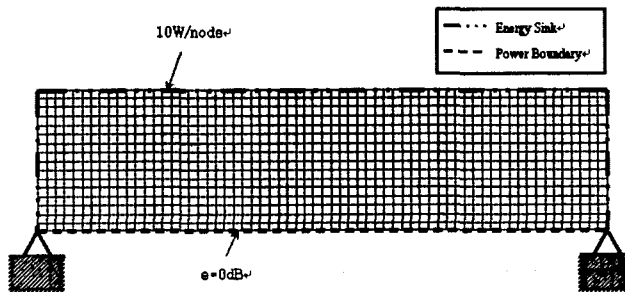


그림 4 설계영역과 경계조건

위 문제에서 여러 가지 주파수 별로 위상최적화를 수행한 결과는 그림 5와 같다. 여기서 최적화 도중에 발생될 수 있는, 재료분포에 의해 발생하는 암시적(Implicit) 경계에서 에너지 출입은 없는 것으로 가정한다.

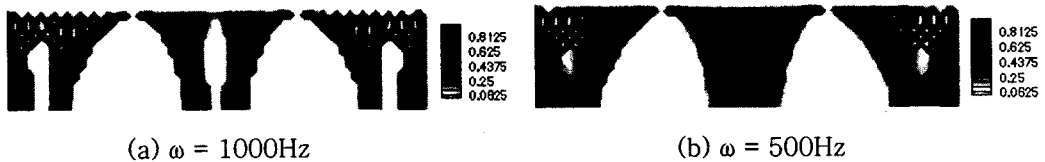


그림 5 주파수 별 최적재료 분포

위의 결과를 살펴볼 때 주파수에 따라 재료의 분포가 약간 달라지는 것을 알 수 있다. 아래 면 전체에서 에너지가 소산되는 조건임에도 불구하고 일부에만 재료가 집중적으로 사용되는 것을 알

수 있다. 평판에서 재료를 적절한 부분에 효율적으로 배치하면 가진을 받았을 때 최대 에너지 소산시킬 수 있을 것이다. 목적함수는 가용 재료량을 만족한 초기상태에서 에너지 컴플라이언스가 2160.59인데 비해서 최적분포 후에는 893.76으로서 에너지 컴플라이언스를 줄이는 방향으로 2배 이상 개선되었다고 볼 수 있다.

예제 2

그림 7의 평판은 단순 지지되어 있고 10W의 파워가 임의의 고 주파수로 평판의 모든 면으로부터 유입되고 평판의 가운데에서 에너지가 소산되는 구조물이다. 재료상수는 예제1과 동일하며 요소수는 1024개이고 절점은 1105개이다. 에너지 컴플라이언스에 대해서 어조인트법을 사용하여 설계민감도를 구하였다.

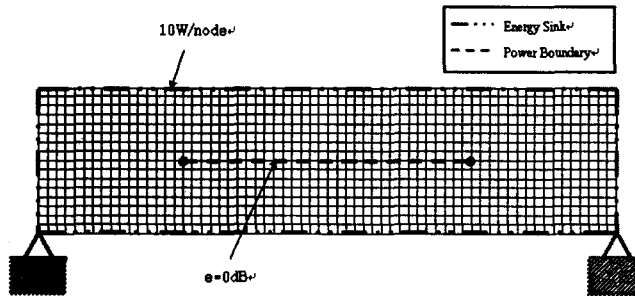
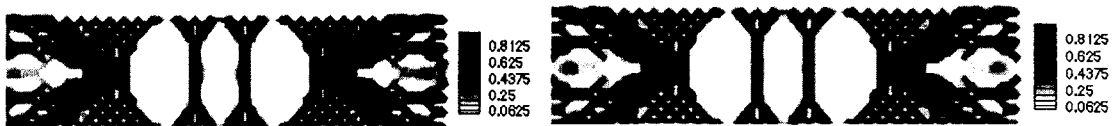


그림 6 설계영역과 경계조건

위 문제에서 주파수 별로 위상최적화를 수행한 결과 얻어진 최적 재료분포는 그림 7과 같다. 재료분포의 결과를 살펴보면 앞서의 결과와 달리 재료 분포가 주파수에 크게 관계 없이 거의 일정한 것을 알 수 있다.



(a) $\omega = 1000\text{Hz}$

(b) $\omega = 500\text{Hz}$

그림 7 주파수 별 최적재료 분포

그림 7에서 볼 수 있듯이 최적화 후 에너지가 소산되는 영역은 가운데의 일부분에 불과한 것을 알 수 있다. 즉 진동에너지가 빠져 나갈 수 있는 부분의 적절한 배치로 효율적으로 구조물 내의 진동 에너지를 감소시킬 수 있으리라 생각된다. 그림 8에서는 최적화 전, 후의 에너지 밀도 분포를 보여준다. 그림 (a)에서는 에너지 밀도의 분포가 밀집된 부분도 있고, 에너지가 효율적으로 소산되지 않음을 알 수 있다. 그러나 최적의 재료분포를 적용하여 설계를 개선한 최종적인 그림에서는 전체적인 에너지 분포도 고르게 분포되는 것을 알 수 있었다. 최적화 전, 후의 목적함수 값들은 각각 4141.69과 1920.76으로 동일한 재료량에 대해서 에너지 컴플라이언스가 두 배 이상 향상된

것을 알 수 있다.

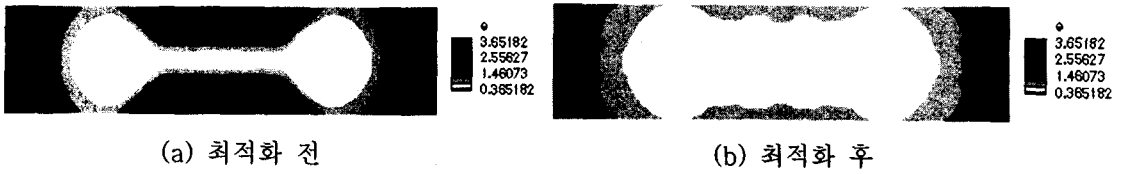


그림 8 최적화 전, 후의 에너지 밀도분포 ($\omega = 1000\text{Hz}$)

6. 결론

본 논문에서는 고 주파수 영역에서의 파워흐름 해석에 대하여 연속체 기반의 설계 민감도 식을 유도하고 어드조인트 민감도 해석을 이용하여 위상 최적설계를 수행하였다. 위상 최적설계를 위하여 설계 변수들은 각 요소의 영률로 선택하였으며 재료밀도 함수로 인수화(Parameterized)하였다. 목적함수는 에너지 컴플라이언스, 제한조건은 가용재료량으로 하였다. 여러 가지 수치적 예제를 통하여 유한 차분법과 비교하여 유도된 식으로 구하여진 설계 민감도 값이 매우 정확함을 보였다. 또한, 수행된 위상 최적화가 물리적으로 의미가 있음을 확인 하였다. 위상 최적화가 전과 후의 에너지 밀도 분포를 비교하여 평균적인 에너지 밀도 분포 면에서 크게 개선되었음을 알 수 있었다. 개발된 설계 민감도 해석법은 설계 사양 변경에 따른 영향을 매우 체계적으로 예측할 수 있고 또한 위상 최적설계 기법은 최적의 부재 배치에 대한 방안을 제시하므로 초기 구조설계 단계에서 레이아웃 결정에 매우 유용하게 사용될 수 있으리라 생각된다.

참고 문헌

1. M.P. Bendsøe, N. Kikuchi, Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1988; **71**:197-224.
2. S. Cho, H. Jung, Design sensitivity analysis and topology optimization of displacement-loaded nonlinear structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2003; **192**: 2539-2553.
3. E.J. Haug, K.K. Choi, and V. Komkov, *Design ensitivity analysis of structural systems* 1986, Academic Press, New York.
4. N. Kim, J. Dong, and K.K. Choi, Energy flow analysis and design sensitivity of structural problems at high frequencies, *Journal of sound and vibration* 2002, **269**: 213-250
5. D. Park, *Vibration power flow analysis of coupled plates and box-type structures* 1999
6. P.E. Choi, *Energy flow analysis of coupled structures* 1993