

Stability Evaluation of One-Dimensional Flow in Solid Rocket Motors Based on Computational Fluid Dynamics

Takashi Kato*, Masahisa Hanzawa*, Takakazu Morita*, and Toru Shimada**

* Tokai University, Hiratsuka, Kanagawa, Japan

** JAXA, Sagami-hara, Kanagawa, Japan

Key words: Stability Analysis, One-Dimensional Flow, Combustion, Solid Rocket Motor

Abstract

Numerical stability analysis of one-dimensional axial flow in solid rocket motors is performed based on the Euler equation coupled with an unsteady combustion equation of solid propellant.

In order to check the numerical scheme, behavior of a standing wave in a closed tube is examined. A standing wave in solid rocket motor decays or grows depending on the total effect of propellant combustion, nozzle flow, and so on. The stability boundary of the fundamental mode standing wave is determined by changing one of the combustion parameters. In addition growth rates of the wave are calculated numerically in relatively low Mach number flow region for the motors with different port and nozzle throat diameters. The results obtained here agree well with the approximate solution. The same scheme is applied to a motor with shorter length and L^* -instability is observed.

1. 緒言

固体ロケットモータ内の圧力は振動を伴うことが多く、この好ましくない現象は一般に振動燃焼と呼ばれている。振動燃焼は、燃焼室内の音響波に対して推進薬の燃焼等による増幅効果がノズル、粒子などによる減衰効果を上回るときに起こる音響不安定である。推進薬にアルミニウム粉末を含むときには燃焼ガス中の粒子減衰効果が高周波振動に対して大きく効くため、現在は周波数が比較的低い軸モード振動が主たる問題になっている。この振動はマイルドな振動とは言え、搭載機器に悪影響を及ぼすため依然としてモータ設計上考慮すべき重要な問題として残されている。

振動燃焼が燃焼室内のガス力学と推進薬燃焼の相互作用であることから、その発生を予測するためには、モータ内流れの方程式と燃焼方程式を定常値からの変動量が小さいと仮定してずれの

2次以上の変動量を無視して線形化したものをベースにするのが一般的である。これは線形安定性解析と呼ばれている。線形安定性解析には3つの手法が用いられてきた。すなわち M_e をノズル入り口マッハ数としたとき、 $M_e \ll 1$ と仮定して M_e の1次オーダー効果により擾乱が増幅されるか、減衰されるかを決定するのが最も一般的であり、設計に広く用いられている¹⁾。第2の手法は、 M_e がもう少し大きなケースまで適用できるように M_e の2次オーダー効果までを考慮したもの、第3の手法は線形化された方程式系を直接数値的に積分する方法である。これらの結果によれば M_e の高次オーダー効果は推進薬の燃焼応答関数の虚数部が正の場合には不安定側に、負の場合には安定側に働くと言われている²⁾。

非線形流れの方程式を直接数値的に解く試みは1970年ころから始まり、1980年代以降はコンピュータ・CFDの急速な進歩に伴い差分法をはじめとして種々のスキームが用いられてきて

いる。そして、1次元流れの安定性に関して言えば、limit cycle などの非線形効果がそれらの主たる研究対象であった。しかし、推進薬の非線形燃焼モデルがしっかりしていなければ、いくら CFD が急速な進歩を遂げた現在でも、非線形効果の定量的評価には使えない。現状では、残念ながら満足のできる非線形燃焼モデルはない。

本研究では、微小な擾乱が入った場合の増幅係数を非線形偏微分方程式に基づく数値シミュレーションで求め、それらの結果を既に得られている近似解の結果と比較する。このようなシミュレーションで安定性評価が可能なが実証されれば、着火から燃焼終了まで1次元定常流れの解析を行うと同時に、全く同じプログラムで適当な時間に擾乱を加えて安定性を評価することができる。また、逆に近似解の精度チェックに使える可能性もある。

2. 支配方程式

2.1 流れの支配方程式

評価に使用したモータの概略図を Fig.1 に示す。モータ軸を x 方向にとり、前端を $x=0$ 、ノズル入り口を $x=L$ 、ノズル出口を $x=L+L_n$ とする。側面燃焼タイプの推進薬は、 $x=0$ から $x=L$ まで充填されているとする。そして、 $x=L$ でのポート断面積はノズル入り口断面積に等しく、断面積はノズル出口まで連続的に変化するものとする。なお、本研究は線形安定性の評価であるので、燃焼によるポート断面積の拡大変化は考慮していない。

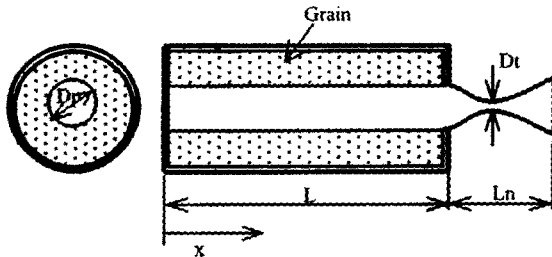


Fig.1 Illustration of the solid rocket motor

ノズル出口までの非定常流れを支配する方程式は保存形でつぎのように書ける。

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (1)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho A \\ \rho u A \\ e A \end{pmatrix}, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho u A \\ (\rho u^2 + p) A \\ (e + p) u A \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} l_p \dot{m}_b \\ p \frac{\partial A}{\partial x} \\ l_p \dot{m}_b c_p T_f \end{pmatrix}$$

$$e = p / (\kappa - 1) + u^2 / 2$$

ただし、 ρ, u, p, T, A はそれぞれ有次元の密度、速度、圧力、温度、断面積を表す。また、 \dot{m}_b は推進薬の単位表面積・単位時間当たり燃焼で発生するガス質量、 T_f は推進薬の燃焼ガス温度 (火炎温度)、 κ は比熱比、 $l_p = \pi D_p$ は推進薬の周囲長である。

$x=0$ (燃焼室前端) の境界条件は、

$$u = 0, \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

とした。

ノズル出口の境界条件は、 $M > 1$ の時は1次外挿とし、 $M < 1$ の時は指定する。

計算手法としては、対流項の離散化に MUSCL 法により高次精度化した SHUS を用いた。また時間積分には陰的解法である LU-ADI 法を用いた。燃焼室前端からノズル出口までの格子点数は定常流れの精度と計算時間を勘案し、880 以上を採用した。一般に流れのマッハ数が小さいときほど格子点数を大きく取る必要がある。

2.2 燃焼方程式

固体推進薬の非定常燃焼は特別な場合を除き、推進薬内の非定常熱伝導方程式で記述される熱的慣性にのみにより起こり、ガス相火炎および推進薬表面反応は準定常であるとの仮定に立つことが多い。

本研究では Hanzawa が提案した準定常火炎の数学モデルをベースにする⁴⁾。その概略図を Fig.2 に示す。このとき、火炎から燃焼表面への

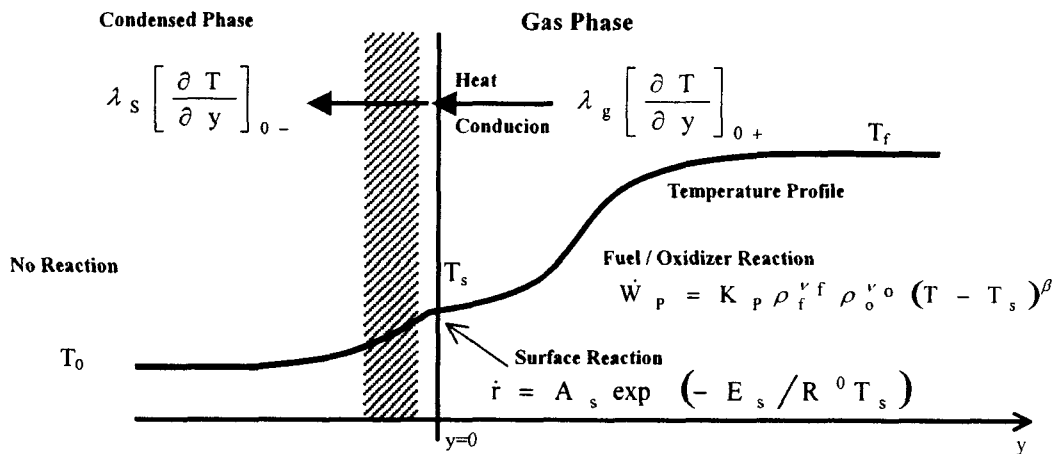


Fig2. Schematic illustration of the burning solid propellant

熱フィードバック則は、

$$\lambda_g \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{0+} = K \frac{p^{\nu} (T_f - T_s)^{\gamma}}{r} \quad (3)$$

と書ける。 r は推進薬の線燃焼速度で、 K は推進薬による定数である。また、 $\gamma = \nu + \beta + 1$ で ν は反応次数 ($\nu = \nu_f + \nu_o$)、 β は反応の温度依存性 (活性化エネルギーに対応) を表すパラメータである。 γ が大きい程、フレイムシートモデルに近づく。この式で、 $\gamma = 1$ と置いた熱フィードバック式は L^* 不安定燃焼解析を目的として秋葉等により初めて使われたが⁵⁾、その後 Krier 等がコンポジット推進薬を対象に一樣反応モデルを仮定して導いたため一般に KTSS モデルと呼ばれている⁶⁾。

推進薬の燃焼表面を $y = 0$ とし、火炎方向を y の正方向にとる。推進薬内の熱伝導方程式は、

$$\frac{\partial T}{\partial t} + r \frac{\partial T}{\partial y} - \alpha_s \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (y < 0) \quad (4)$$

と書ける。 r は燃焼表面の後退速度 (線燃焼速度)、 α_s は推進薬の熱拡散率である。燃焼速度の非定常性は基本的にはこの非定常熱伝導方程式が支配していると仮定している。推進薬表面の反応速度は圧力依存性のないアルレニウス型

$$r = B \exp\left(-\frac{E_s}{RT_s}\right) \quad (5)$$

で表されたとする。ここで、 E_s は表面反応の活性化エネルギー、 R^0 は普遍気体定数である。火炎と表面の温度差は準定常火炎領域全体に対するエネルギー保存則より、

$$\rho_s r \{Q_f + Q_s - c_p (T_f - T_s)\} = \left(\lambda_g \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{0+} \quad (6)$$

と書ける。 Q_f, Q_s はそれぞれ火炎、表面反応の発熱量、 ρ_s は推進薬密度、 c_p, λ_g はそれぞれ、ガスの定圧比熱と熱伝導率である。本研究では、 Q_f は断熱火炎温度が $T_{af} = 2800K$ となるように決めた。また、境界条件は、

$$y = -\infty \text{ で } T = T_0 \text{ (推進薬の初期温度)}$$

$$y = 0 \text{ で } T = T_s \text{ (unknown)} \quad (7)$$

$$\lambda_s \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{0-} = \lambda_g \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{0+} + \rho_s r Q_s$$

ここで、 λ_s は推進薬の熱伝導率である。

初期条件を与えた上で、これらの方程式を連立して解けば圧力が時間的に変化したときの非定常燃焼速度を求めることができる。

実際の計算に当たっては、上記方程式を基準状態の適切な定常値で無次元化して行うのが便利である。こうすると λ_s, λ_g の値は具体的に与える必要がなく本研究でもそのようにした。

2.3 燃焼応答関数

上記の非線形燃焼方程式を無次元化すると結局 5 個の無次元パラメータが含まれることになるが⁴⁾、基準状態の定常値からの変動がすべて小さいとして方程式系を線形化すると、3 個の無次元パラメータに圧縮できることが示されている⁷⁾。線形燃焼解析で重要な圧力結合燃焼応答関数は、燃焼圧力が定常値を中心に三角関数的に微小変動したときに燃焼速度の変動割合をあらわすもので、上に述べた火炎理論をベースにし線形化するとつぎのように表せる。

$$R = \frac{nAB}{\lambda + \frac{A}{\lambda} - (1+A) + AB} \quad (8)$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4i\omega})$$

$$\omega = 2\pi f \frac{\alpha_s}{r_0^2} \quad (\text{無次元周波数})$$

ここで、 n は定常燃焼速度の圧力指数、 f は振動数、 r_0 は基準状態 (本研究では 4 MPa を採用) における定常線燃焼速度である。

基準状態の表面温度 $T_{s,0}$ が分かった上で、非線形燃焼モデルパラメータを与えれば、 n, A, B パラメータは決まるが、実際にはそれらが特定できないため、 A, B パラメータは実験で求めるしかないのが現状である。 n, A, B 無次元パラメータが実験的に求められている場合、非線形燃焼パラメータの方が多いため、そうなるように適当な非線形燃焼モデルパラメータを設定することが一般には可能である。そして、線形燃焼の範囲ではその選び方には関係しない。本研究では、CFD による線形安定性解析が主目的であるので、推進薬の燃焼パラメータとしては非定常燃焼に大きな影響を与えるパラメータの一つである表面反応熱 Q_s のみを変化させた。この場合、 B パラメータが大きく変化、 n は若干変化する。

計算に用いた燃焼パラメータの値は

$$\nu = 1, E_s / R = 9000\text{ K}, \gamma = 4,$$

$$T_0 = 300\text{ K}, T_{s,0} = 900\text{ K}, T_{af} = 2800\text{ K},$$

$$c_s = c_g = 1.26\text{ J/g}\cdot\text{K}, \alpha_s = 1.5 \times 10^{-7}\text{ m}^2/\text{s}$$

と固定し、 Q_s を $419 \sim 527\text{ J/g}$ の範囲で変化させた。

これらの値を用いて (8) 式で計算した燃焼応答関数の実数部を Q_s をパラメータにとり Fig.3 に示す。Fig.3 より、 Q_s に関係なく周波数が 130 Hz くらいでピークをとり、 Q_s を大きくすると R' は大きくなるのが分かる。推進薬の熱拡散率を $\alpha_s = 1.5 \times 10^{-7}\text{ (m}^2/\text{s)}$ より小さくすればピークは高周波側に移行するが、モーター内の 1 次モード定常波の周波数にピーク周波数を合わせるようにこの値を採用した。

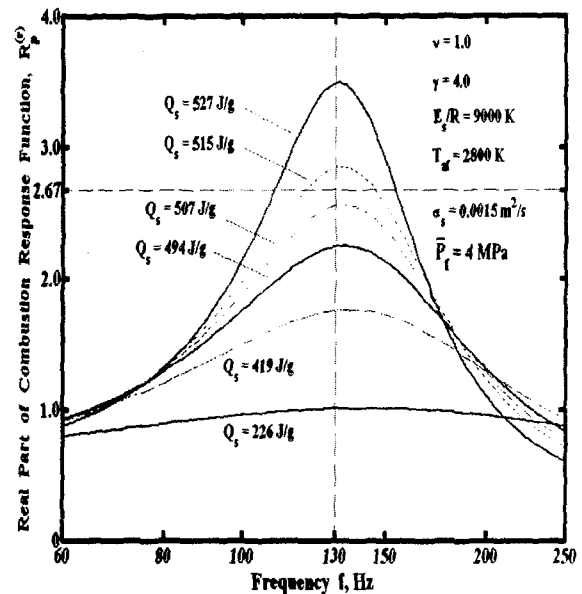


Fig.3 Effects of frequency and surface heat release on the real part of pressure coupled combustion response function.

3. 結果と考察

3.1 閉管内の音響定常波

本研究の主目的はモーター内定常流れに微小振幅の音響定常波を印加したとき、その増幅係数 α ($p' \sim e^{\alpha t}$ 、減衰のときは $\alpha < 0$ 、増幅のときは $\alpha > 0$) の評価である。よって最初に両端が閉じた閉管内静止気体に平衡圧力の 0.1% 振幅の音響定常波 (基本モード) を擾乱として印加し、その定常波の時間的な変化を調べて本スキームの有効性を検証した。閉管の長さ、ガス圧力、ガスの

温度はそれぞれ4.33m,4Mpa,2800Kとした。この場合の基本モード定常波の振動数は130Hzである。音響定常波は本来中立振動をするはずであるが、安定化のために風上差分スキームを用いているので、振幅は時間とともに指数関数的に減少する。定常波の振動数が低ければ時間間隔が多少大きくてもこの減衰は小さいが、130Hzでは時間間隔を小さくする必要がある。Fig.4は $\Delta t = 6 \times 10^{-6} s$ のときの定常波の減衰を示したものであるが、減衰率は $\alpha \approx -2(1/s)$ とかなり大きい。 Δt をいろいろ変えて検討した結果、モータ内の定常波増幅係数を評価するためには、 $\Delta t = 6 \times 10^{-7} (sec)$ 程度にしないと十分ではないことが分かった。Fig.5に、この時間刻みのときの定常波の形状、および $x = 0$ での圧力の時間的な変化を示す。このケースの増幅係数は、 $\alpha = -0.2(1/sec)$ で、安定性評価に大きな影響を与えない。

さらに、与えた擾乱が0.4s程度の間、定常波を保つための擾乱の大きさを検討した。線形性が保たれる擾乱の振幅は使用するスキームによって異なるだろうが、本スキームでは1%以下が必要であることが分かった。よって、以下モータ内流れの安定性評価のために加える擾乱の定常波振幅は余裕をとって0.1%とした。定常波の振幅が大きいと、非常に短い時間に進行波に移行してしまう。

3.2 モータ内の音響定常波

計算に用いた燃焼室長は一定、 $L = 4.335m$ 、とし、ノズル長は標準的には $0.4335(m)$ とした。このとき、燃焼室前端の定常燃焼圧力が $\bar{p}_f = 4MPa$ になるよう燃焼室直径、およびノズルスロット直径を調節した。ガスの比熱比 κ はすべてのケースで1.2にした。

初期値を適当に選んだ上で、流れの方程式を燃焼方程式とカップリングして解き、十分定常流れと見なせるようになった時、定常圧力の0.1%振幅の音響定常波を流れに印加し、その時間的な変

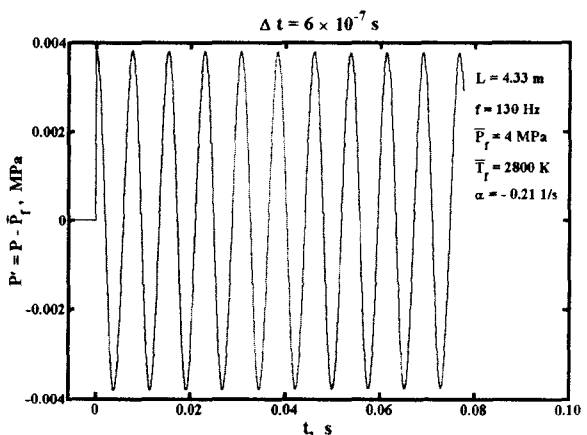
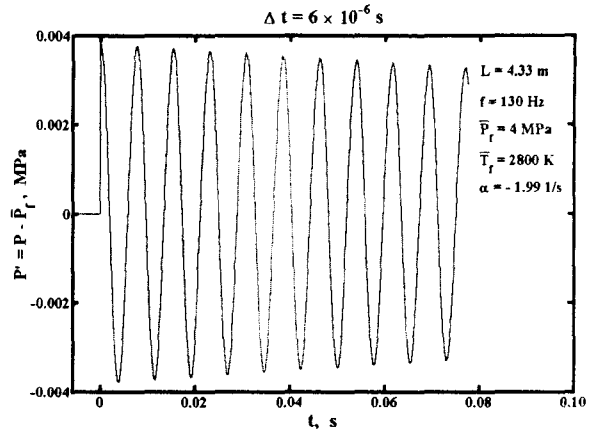


Fig.4 Calculated decay behavior of the fundamental mode acoustic wave in the closed tube.

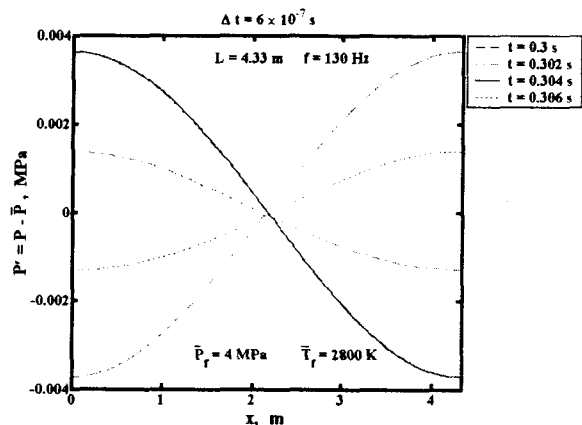
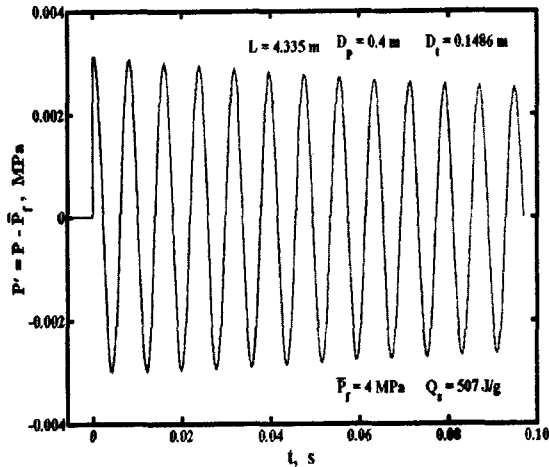


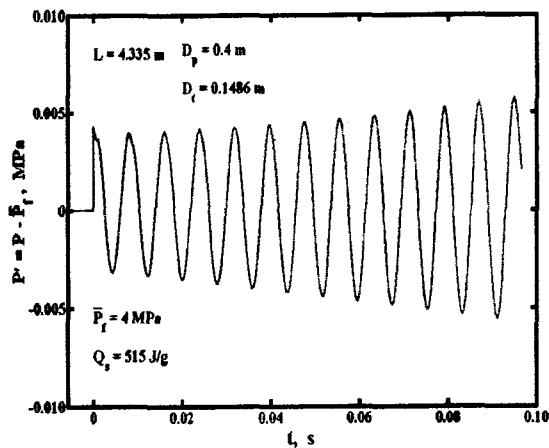
Fig.5 Time history of the acoustic pressure distribution during one cycle for the case of $\Delta t = 6 \times 10^{-7} s$

化を計算した。

そのとき、燃焼パラメータ Q_s が小さいと印加した定常波は減衰し、ある値を越える増幅することが分かった。Fig.6 に $Q_s = 507 J/g$ の減衰ケース、および $Q_s = 515 J/g$ の増幅ケースについて、モータ前端的の圧力変動の時間変化を示した。このような計算を繰り返し、ほぼ中立振動するのは $Q_s = 511 J/g$ 位の場合であることが分かった。



(a) Decaying case, $Q_s = 507 J/g$.



(b) Growing case, $Q_s = 515 J/g$

Fig.6 Examples of decaying and growing acoustic wave in the combustion chamber.

推進薬にアルミを含まない1次近似解の増幅係数は、つぎのような簡単な式で与えられる⁸⁾。

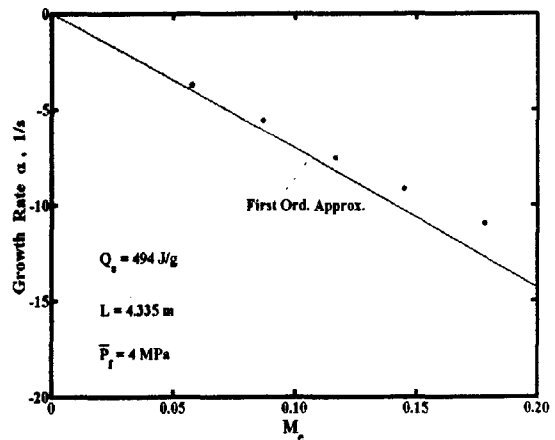
$$\alpha = \frac{a_0 \kappa}{2L} \left(R_p^{(r)} - \frac{\kappa + 2}{\kappa} \right) M_e \quad (9)$$

ここで、 L は燃焼室の長さ、 a_0 は燃焼室前端での音速 (1127m/s)、 $R_p^{(r)}$ は推進薬の燃焼応答関数の実数部である。また、ノズルはショートノズルを仮定している。この式から分かるように、1次近似の増幅係数は燃焼応答関数の実数部だけで決まる。そして、この線形理論によれば、 $\kappa = 1.2$ のとき M_e にかかわらず安定限界は

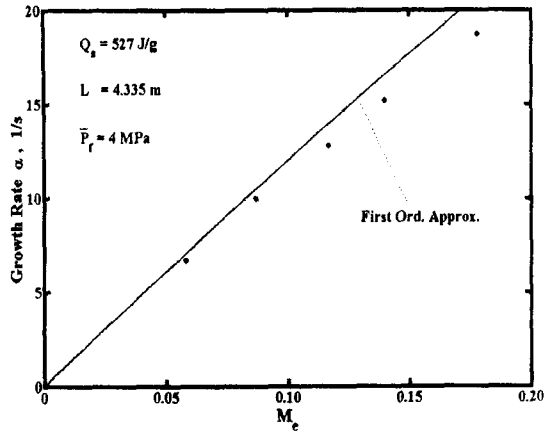
$$R_p^{(r)} = 2.67$$

となる。Fig.3 に示した燃焼応答関数の実数部より、 $f = 130 Hz$ 近傍で $R_p^{(r)} = 2.67$ となる Q_s の値は約 $511 J/g$ であり、その値は上で述べた数値解とよく一致する。

次に、安定側の $Q_s = 494 J/g$ 、不安定側である $Q_s = 515 J/g$ の2ケースにつき、増幅係数 α を、ノズル入り口マッハ数 M_e を 0.2 位まで変化させて計算した。Fig.7 に得られた結果を上記述べた近似解とともに示す。(9) 式の近似解は M_e に比例しているように見えるが、 M_e の増加とともに定常波の周波数がほぼ直線的に減少するために $R_p^{(r)}$ が小さくなり、近似解は曲線になる。減衰、増幅のいずれのケースについても、 M_e が小さいときには良い一致が見られるが、 M_e が 0.2 付近になると近似解とは逆方向にずれ出す。この理由としては計算スキームによるものとは考えにくく、流れが速くなると定常波がノズル先細部に入り込むこと、および M_e の高次効果によるものが考えられる。今後、より高いマッハ数領域までを含めて検討したい。



(a) Decaying case, $Q_s = 494 J/g$



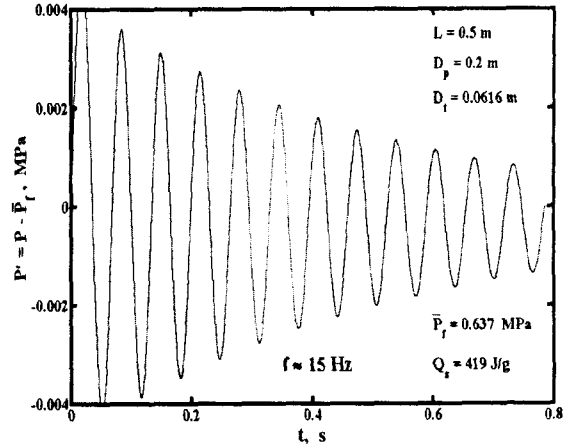
(b) Growing case, $Q_s = 528 J/g$

Fig. 7 Growth rate of acoustic wave vs. nozzle entrance Mach number.

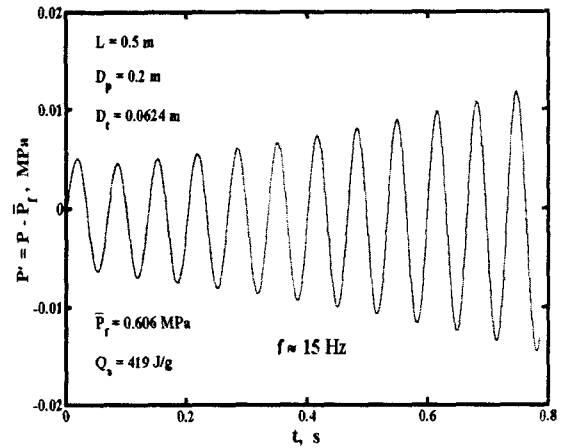
3.3 L*不安定

本解析手法で0次の音響定常波と考えられる bulk mode (一般的には、L*モードと呼ばれる) の不安定が捕らえられるかどうかを調べた。一般にL*不安定はモータの特性長L*が短く、かつ定常燃焼圧力が低い場合に起こることが知られている。よって、燃焼室長を $L = 0.5m$ 、 $D_p = 0.2m$ のケースに対して、ノズルスロート断面積を変化させることで定常燃焼圧力を変化させ、基本モードの音響定常波を印加して安定性を調べた。表面反応熱としては、 $Q_s = 419 J/g$ の値を用いた。

定常燃焼圧力がある値より小さくなると、音響定常波の振動数よりはるかに低い振動が増幅される。Fig. 8a に安定境界より定常圧力を若干高くしたときの減衰例を、Fig. 8b に安定境界より定常圧力を若干低くしたときの増幅例を示した。これら2ケースの基本モード音響定常波の振動数は約 1100Hz であるが、図の振動数は 15Hz 程度である。Fig. 8a の減衰ケースにおける圧力変動量の空間分布を時間ごとに書かせたのが Fig. 9 である。空間分布はほぼ一様で L*振動であることが分かる。このとき、 $M_e \approx 0.06$ であるが、もっと高い M_e でも同様に計算できる。



(a) Decaying case



(b) Growing case

Fig. 8 Examples of decaying and growing L*-oscillation.

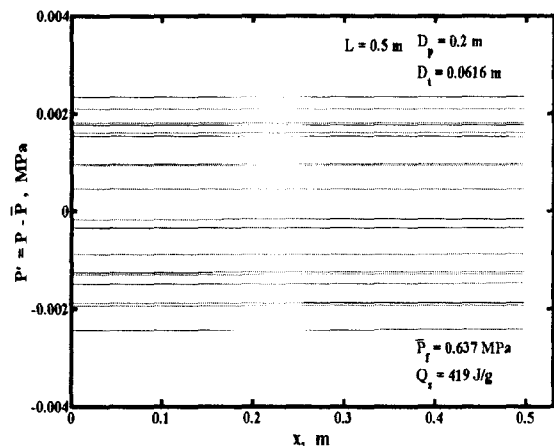


Fig. 9 Time history of the pressure distribution for the decaying L*-oscillation

4. 結言

固体ロケットモータ内1次元流れの線形安定性を、非線形オイラー方程式と推進薬の非定常燃焼方程式をカップリングして数値解析によって評価した。得られた結果を箇条書きに表すとつぎのようになる。

- (1) 閉管内音響定常波の減衰率は、空間刻みよりも時間刻みに大きく依存するが、時間間隔を小さく取れば、モータ内流れの安定性評価にはあまり影響を与えない。
- (2) 推進薬の表面反応熱を変化させたときの、CFDによる流れの安定限界値は近似解とよく一致する。
- (3) モータ内流れの増幅係数もマッハ数が小さい場合近似解とおおむね一致する。
- (4) L^* 不安定も捕らえることができる。

本研究で行ったモータ内流れの安定性評価はマッハ数の低い領域に限られており、かつ L^* 安定境界の包括的な検討も不十分である。これらについては、今後継続して行う予定である。

参考文献

- 1) Culick, F.E.C.:
The Stability of One-Dimensional Motion in a Rocket Motor, *Combustion Science and Technology*, Vol.7, 1973, pp.165-175.
- 2) 秋葉鎌二郎、山本洋一：固体ロケット燃焼室内の縦モード振動燃焼の解析、第6回宇宙科学技術連合講演会集, 1982, pp.222-223.
- 3) 藤井孝蔵：流体力学の数値計算法, 1994, 東京大学出版会, pp.119-138
- 4) 判澤正久：固体推進薬の急減圧による消火理論, *日本航空宇宙学会誌*, Vol.25, No.283, 1977, pp.349-355.
- 5) R.Akiba and M. Tanno: Low Frequency Instability in Solid Propellant Rocket Motors, *Proceedings of 1st International*

Symposium on Rockets and Astronautics, Tokyo, 1959.

- 6) H.Krier, J.S. Tien, W.A. Siriggnano, and M.Summerfield: Nonsteady Burning Phenomena of Solid Propellants: Theory and Experiments, *AIAA Journal* Vol.6, No.2, 1968, pp.278-285.
- 7) Culick.F.E.C.: A Review of Calculation for Unsteady Burning of a Solid Propellant, *AIAA Journal* Vol.6, No.12, 1968, pp.2241-2255.
- 8) Culick.F.E.C.: Combustion Instability in Solid Rocket Motors, *CPIA Publication* 290, 1981.