

# TCS요소를 이용한 인장 막구조물의 초기형상해석 및 응력변형해석

## Initial Shape Finding and Stress-Deformation Analysis of Pretensioned Membrane Structures with Triangular Constants Strain Element

고 혁 준\*  
Ko, Hyuk-Jun

송 평 훈\*\*  
Song, Pyung-Hun

송 호 신\*\*\*  
Song, Ho-San

### Abstract

In this study, equation of finite element is formulated to analyze relations of large deformation-small deformation considering geometrical nonlinear for membrane structure. Total Lagrangian Formulation(TLF) is introduced to formulate theory and equation of motion considering Triangular Constant Strain(TCS) element in finite, element analysis is formulated. Finite element program is made by equation of motion considering TLF. This study analyzed a variety of examples, so compared with the past results.

**Key words :** *Finite Element Analysis, Cable-Membrane Structures, Shape Finding Analysis, Stress-Deformation Analysis*

## 1. 서 론

대공간 구조물을 형성하는 구조시스템중 연성구조물의 일종인 막구조, 케이블구조 또는 케이블-막구조물은 강성구조물에 비해 경제성 및 시공성에서 유리하여 지난 30여년 동안 대공간을 형성하기 위한 구조재료로서 많이 이용되어 왔다. 1950년대부터 본격적으로 개발되기 시작한 막구조는 특히, 1970년 오사카 만국박람회의 미국관을 Geiger가 막재를 이용하여 설계함으로써 막구조물에 대한 빠른 발전의 계기가 되었다. 국내에서도 세계 최초의 케이블 돔인 88올림픽 체조경기장을 비롯하여 2002년 한·일

월드컵을 위한 경기장 지붕구조에 적용되어 건설되었다.

연성구조물은 휨강성이 매우 작은 재료인 막이나 케이블 등을 사용하여 시공됨으로 초기강성을 갖기 전에는 불안정 상태를 나타내지만, 초기강성의 도입과 함께 안정상태가 된다. 이와 같은 불안정 구조물에 초기강성을 도입함으로써 야기되는 대변형에 의한 형상변화가 일어나며 설계시 초기형상을 파악할 수 있는 형상해석이 필요하게 된다. 따라서 구조해석에서는 기하학적 비선형성이 반드시 고려되어야 한다. 비선형 문제가 중요시 되는 이유는 주로 대공간구조물에 적용됨으로 정적문제로 취급되는 자중이외에 풍하중과 같은 동적인 고려도 필요하다. 대변형 문제에 있어서는 구조형상이 계속 변하게 되며 현 형상에 대한 변형도를 구하기 위해서는 우선 그 변형

\* 정회원 동의대학교 건축공학과 석사과정

\*\* 정회원 동의대학교 건축공학과 박사과정 수료

\*\*\* 정회원 동의대학교 건축공학·빌딩시스템공학부 교수

도가 측정되어지는 기준 형상을 결정해야 한다. 기준형상으로써 어떠한 형상이 채택되는가에 관계없이 동일한 해가 얻어지기 위해서는 운동 증분방정식을 정식화하는 동안에 쓰이는 응력평가가 같은 기준형상에 대해 측정되어야 한다. 만약 응력과 변형도 평가가 일정하지 않다면 평형방정식내의 내부 가상 일을 나타내는 식이 정확하게 표현되지 않을 것이다.

이러한 점을 주의하여 본 논문에서는 막 구조물에 대한 대변형-미소변형도 관계를 갖는 기하학적 비선형해석을 위한 유한요소 방정식을 정식화 하였다. 정식화를 위한 이론으로는 TLF(Total Lagrangian Formulation)법을 도입하며, 실제 유한요소법에 이용되는 TCS (Triangular Constant Strain) 요소에 대한 운동방정식을 유도하였다. 증분운동방정식을 정식화하기 위해서는 1959년 Newmark에 의해 제안되어 일반적으로 사용되는 동적 해석 기법인 뉴마크(Newmark)법을 고려하였다. TLF를 이용하여 유도한 운동방정식을 바탕으로 초기 장력 상태의 형상 해석 및 외부하중에 대한 응력해석을 수행한다. 해석 예로서는 현수선 곡면에 대한 형상해석을 수행하여 비교하고, 본 연구의 타당성을 검증하기 위해 기존에 발표된 논문을 선택하여 예제 해석을 수행한다.

## 2. TLF를 이용한 TCS요소의 증분 운동방정식 정식화

본 절에서는 TLF를 이용한 TCS요소의 증분운동방정식을 유도하기로 한다. TLF에서는 변형전의 형상을 기준으로 모든 응력과 변형도를 측정하기 때문에  ${}^0C$ 상태의 직교좌표계가 쓰이게 된다. 본 연구에서 고려한 응력상태는 평면응력상태라고 가정한다. 우선 관성 하중을 고려하지 않은 증분운동방정식을 유도한다. 여기서 풀어야 할 증분 운동방정식은 다음과 같다.

$$\int_{\Omega_V} {}^0C_{ijrs} {}^0\epsilon_{rs} \delta_0 \epsilon_{ij} {}^0dv + \int_{\Omega_V} {}^tS_{ij} \delta_0 \eta_{ij} {}^0dv = {}^{t+\Delta t}R - \int_{\Omega_V} {}^tS_{ij} \delta_0 e_{ij} {}^0dv \quad (1)$$

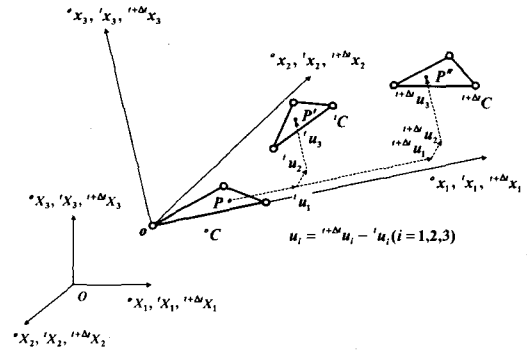


그림 1. TCS 요소의 초기형상 및 변형형상

우선 식(1)을 유한요소법에 이용하기 위해 선형 연립방정식으로 변경한다. 먼저,  ${}^tC$ 에 있어서 어떤 임의의 점에 대한 변위성분을 다음과 같이 보간할 수 있다고 가정한다.

$$\begin{aligned} {}^t u_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 {}^0 x_1 + \alpha_3 {}^0 x_2 \\ {}^t u_2 &= \alpha_4 + \alpha_5 {}^0 x_1 + \alpha_6 {}^0 x_2 \\ {}^t u_3 &= \alpha_7 + \alpha_8 {}^0 x_1 + \alpha_9 {}^0 x_2 \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 9$ )는 미지수이다. 시각  $t$ 에서의 삼각요소의 각점 1, 2, 3에 대한 변위성분은 각각  ${}^t u_1^1, {}^t u_2^1, {}^t u_3^1$ ;  ${}^t u_1^2, {}^t u_2^2, {}^t u_3^2$ ;  ${}^t u_1^3, {}^t u_2^3, {}^t u_3^3$ 이다. 이러한 9개의 절점값들을 이용하여 미지수  $\alpha_i$ 를 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= [({}^0 x_1^2 {}^0 x_2^3 - {}^0 x_2^2 {}^0 x_1^3) {}^t u_1^1 + ({}^0 x_2^1 {}^0 x_1^3 - {}^0 x_1^1 {}^0 x_2^3) {}^t u_2^1 + ({}^0 x_1^1 {}^0 x_2^2 - {}^0 x_2^1 {}^0 x_1^2) {}^t u_3^1] / \Delta \\ \alpha_2 &= ({}^0 x_2^{23} {}^t u_1^1 + {}^0 x_2^{31} {}^t u_1^2 + {}^0 x_2^{12} {}^t u_1^3) / \Delta \\ \alpha_3 &= ({}^0 x_1^{32} {}^t u_1^1 + {}^0 x_1^{13} {}^t u_1^2 + {}^0 x_1^{21} {}^t u_1^3) / \Delta \\ \alpha_4 &= [({}^0 x_1^2 {}^0 x_2^3 - {}^0 x_2^2 {}^0 x_1^3) {}^t u_2^1 + ({}^0 x_2^1 {}^0 x_1^3 - {}^0 x_1^1 {}^0 x_2^3) {}^t u_2^2 + ({}^0 x_1^1 {}^0 x_2^2 - {}^0 x_2^1 {}^0 x_1^2) {}^t u_3^1] / \Delta \\ \alpha_5 &= ({}^0 x_2^{23} {}^t u_2^1 + {}^0 x_2^{31} {}^t u_2^2 + {}^0 x_2^{12} {}^t u_2^3) / \Delta \\ \alpha_6 &= ({}^0 x_1^{32} {}^t u_2^1 + {}^0 x_1^{13} {}^t u_2^2 + {}^0 x_1^{21} {}^t u_2^3) / \Delta \\ \alpha_7 &= [({}^0 x_1^2 {}^0 x_2^3 - {}^0 x_2^2 {}^0 x_1^3) {}^t u_3^1 + ({}^0 x_2^1 {}^0 x_1^3 - {}^0 x_1^1 {}^0 x_2^3) {}^t u_3^2 + ({}^0 x_1^1 {}^0 x_2^2 - {}^0 x_2^1 {}^0 x_1^2) {}^t u_3^3] / \Delta \\ \alpha_8 &= ({}^0 x_2^{23} {}^t u_3^1 + {}^0 x_2^{31} {}^t u_3^2 + {}^0 x_2^{12} {}^t u_3^3) / \Delta \\ \alpha_9 &= ({}^0 x_1^{32} {}^t u_3^1 + {}^0 x_1^{13} {}^t u_3^2 + {}^0 x_1^{21} {}^t u_3^3) / \Delta \end{aligned} \quad (3)$$

여기에서  ${}^0 x_1^{23} = {}^0 x_1^2 - {}^0 x_1^3$ ,  $\Delta = 2^0 A$ ,  ${}^0 A$ 는 초기형상의 삼각형 면적이다.  ${}^0 x_k^i$ 는 점  $k$ 의  ${}^0 x_i$ 를 나타낸다. 식(3)을 식(2)에 대입하고 정리하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$${}^t u_i = {}^0 N_{im}^1 {}^t u_m^1 + {}^0 N_{im}^2 {}^t u_m^2 + {}^0 N_{im}^3 {}^t u_m^3, (i, m = 1, 2, 3) \quad (4)$$

세 절점 1, 2, 3에서 시간간격  $t-t+\Delta t$  동안 일어나는 변위증분의 성분은 각각  $u_1^1, u_2^1, u_3^1$ ;  $u_1^2, u_2^2, u_3^2$ ;  $u_1^3, u_2^3, u_3^3$ 이다. 이들 9개의 양을 이용하여 변위증분의 성분은 식(4)와 같은 방법으로 보 간 된다. 즉,

$${}^t u_{i,j} = {}^0 N_{im,j}^1 {}^t u_m^1 + {}^0 N_{im,j}^2 {}^t u_m^2 + {}^0 N_{im,j}^3 {}^t u_m^3, (m = 1, 2, 3) \quad (5)$$

식(4)와 (5)을 미분하면 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$${}^t u_{i,j} = {}^0 N_{im,j}^1 {}^t u_m^1 + {}^0 N_{im,j}^2 {}^t u_m^2 + {}^0 N_{im,j}^3 {}^t u_m^3, (m = 1, 2, 3) \quad (6)$$

$${}^0 u_{i,j} = {}^0 N_{im,j}^1 {}^t u_m^1 + {}^0 N_{im,j}^2 {}^t u_m^2 + {}^0 N_{im,j}^3 {}^t u_m^3, (m = 1, 2, 3) \quad (7)$$

여기에서

$${}^0 N_{im,j}^1 = \frac{\partial {}^0 N_{im}^1}{\partial {}^0 x_j}, {}^0 N_{im,j}^2 = \frac{\partial {}^0 N_{im}^2}{\partial {}^0 x_j}, {}^0 N_{im,j}^3 = \frac{\partial {}^0 N_{im}^3}{\partial {}^0 x_j} \quad (8)$$

## 2.1 선형 변형도 증분 강성매트릭스

변형도 텐서의 증분성분은 다음과 같이 표현된다.

$${}^0 e_{11} = {}^0 u_{1,1} + ({}^t u_{1,10} u_{1,1} + {}^t u_{2,10} u_{2,1} + {}^t u_{3,10} u_{3,1})$$

$${}^0 e_{22} = {}^0 u_{2,2} + ({}^t u_{1,20} u_{1,2} + {}^t u_{2,20} u_{2,2} + {}^t u_{3,20} u_{3,2})$$

$$2{}^0 e_{12} = {}^0 u_{1,2} + u_{2,1} + {}^t u_{1,10} u_{1,2} + {}^0 u_{1,10} {}^t u_{1,2} +$$

$${}^t u_{2,10} u_{2,2} + {}^0 u_{2,10} {}^t u_{2,2} + {}^t u_{3,10} u_{3,2} + {}^0 u_{3,10} {}^t u_{3,2}$$

${}^0 e_{ij}$ 를 매트릭스 기호를 이용하면 다음과 같이 표현 된다.

$${}^0 e = {}^t B_L u \quad (9)$$

여기에서

$${}^0 e = \{ {}^0 e_{11} \quad {}^0 e_{22} \quad 2{}^0 e_{12} \}^T \quad (10)$$

$$u = \{ u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \quad u_1^3 \quad u_2^3 \quad u_3^3 \}^T \quad (11)$$

$${}^t B_L = {}^t B_{L0} + {}^t B_{L1} \quad (12)$$

식(9)로부터, 증분 변형도 텐서의 변분은 다음과 같이 될 것이다.

$$\delta_0 e = {}^t B_L \delta U \quad (13)$$

여기서,

$$\delta_0 e = \{ \delta_0 e_{11} \quad \delta_0 e_{22} \quad 2\delta_0 e_{12} \}^T \quad (14)$$

$$\delta U = \{ \delta u_1^1 \quad \delta u_2^1 \quad \delta u_3^1 \quad \delta u_1^2 \quad \delta u_2^2 \quad \delta u_3^2 \quad \delta u_1^3 \quad \delta u_2^3 \quad \delta u_3^3 \}^T \quad (15)$$

다음은 평형방정식의 재료상수에 대한 항을 고려 하자. 여기서, 재료상수 텐서의 대칭성이 고려되었 으며, 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\int_{0V} {}^0 C_{ijrs} e_{rs} \delta_0 e_{ij} dv = \delta U^T \int_{0V} {}^t B_L^T {}^0 C {}^t B_L dv \quad (16)$$

여기서

$${}^0 C = \begin{bmatrix} {}^0 C_{1111} & {}^0 C_{1122} & {}^0 C_{1112} \\ {}^0 C_{1122} & {}^0 C_{2222} & {}^0 C_{2212} \\ {}^0 C_{1112} & {}^0 C_{2212} & {}^0 C_{1212} \end{bmatrix} \quad (17)$$

다음과 같이 표현하면

$$\int_{0V} {}^t B_L^T {}^0 C {}^t B_L dv = {}^t K_L \quad (18)$$

결국, 식(16)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_{0V} {}^0 C_{ijrs} e_{rs} \delta_0 e_{ij} dv = \delta U^T {}^t K_L u \quad (19)$$

여기서 고려한 삼각요소에서는 식(18)에서  ${}^0 dv = h^0 da$ 이고,  $h$ 는 일정하며  ${}^t B_L$ 은 좌표 ${}^0 x_i$ 의 함수가 아니므로 식(18)은 아래와 같이 더 간단히 나타 낼 수 있다.

$$h^0 A {}^t B^T {}^0 C {}^t B = {}^t K_L \quad (20)$$

식(20)에서 주어진  ${}^t K_L$ 은 소위 말하는 선형 변형도 증분 강성매트릭스이다.

## 2.2 비선형 변형도(기하학적 혹은 초기응력) 증분 강성매트릭스

다음과 같은 매트릭스 표시를 이용하여 나타낼 수 있다.

$$\delta_0 \eta = {}^t B_{NL} \delta U \quad (21)$$

$$\delta_0 \eta = \{ \delta_0 \eta_{11} \quad \delta_0 \eta_{22} \quad \delta_0 2\eta_{12} \}^T \quad (22)$$

또한,

$$\int_{0V} {}^t S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} dv = \delta U^T \int_{0V} {}^t S_{11} {}^t b_1^T + {}^t S_{22} {}^t b_2^T + {}^t S_{12} {}^t b_3^T dv \quad (23)$$

여기에서  ${}^t b_k^T$  ( $k = 1, 2, 3$ )는  ${}^t B_{NL}$ 의  $k$ 번째 열을 나타내고 있다.  ${}^t B_{NL}$ 의 각 열은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$${}^t b_1^T = {}^t B_{NL1} U, {}^t b_2^T = {}^t B_{NL2} U, {}^t b_3^T = {}^t B_{NL3} U \quad (24)$$

식(24)를 이용하여 식(23)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{\circ V} {}^t S_{ij} \delta_0 \eta_{ij}^0 dv = \delta \mathbf{U}^T \int_{\circ V} ({}^t S_{11} {}^t \mathbf{B}_{.NL1} + {}^t S_{22} {}^t \mathbf{B}_{.NL2} + {}^t S_{12} {}^t \mathbf{B}_{.NL3})^0 dv$$

또한, 아래와 같이 두고

$$\int_{\circ V} ({}^t S_{11} {}^t \mathbf{B}_{.NL1} + {}^t S_{22} {}^t \mathbf{B}_{.NL2} + {}^t S_{12} {}^t \mathbf{B}_{.NL3})^0 dv = {}^t K_G \quad (25)$$

${}^0 dv = h^0 da$ 와  ${}^t \mathbf{B}_{.NL1}$ ,  ${}^t \mathbf{B}_{.NL2}$ ,  ${}^t \mathbf{B}_{.NL3}$ 는 좌표  ${}^0 x_i$ 에 독립임을 주의하여 식(25)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$h^0 A ({}^t S_{11} {}^t \mathbf{B}_{.NL1} + {}^t S_{22} {}^t \mathbf{B}_{.NL2} + {}^t S_{12} {}^t \mathbf{B}_{.NL3}) = {}^t K_G \quad (26)$$

${}^t K_G$ 는 소위 말하는 비선형 변형도 증분 강성 매트릭스이다. 또한, 기하학적 혹은 초기 증분 강성 매트릭스라고 불린다.

### 2.3 요소응력에 대한 등가 절점력

여기에서, 식(1)의 우변 두 번째 항을 보자. 우선 대응하는 항을 식(27)과 같이 다시 쓰자.

$$\int_{\circ V} {}^t S_{ij} \delta_0 e_{ij}^0 dv = \int_{\circ V} [\delta_0 e_{11} \quad \delta_0 e_{22} \quad \delta_0 e_{12}] \begin{bmatrix} {}^t S_{11} \\ {}^t S_{22} \\ {}^t S_{33} \end{bmatrix}^0 dv \quad (27)$$

여기서 윗식을 전개할 때  ${}^0 e_{ij} = {}^0 e_{ji}$ 의 관계를 이용한다. 식(13)을 식(27)에 대입하면

$$\int_{\circ V} S_{ij} \delta_0 e_{ij}^0 dv = \delta \mathbf{u}^T \int_{\circ V} {}^t \mathbf{B}_L^T {}^t \mathbf{S}^0 dv \quad (28)$$

다음과 같이 정의하면,

$${}^t \mathbf{f} = \int_{\circ V} {}^t \mathbf{B}_L^T {}^t \mathbf{S}^0 dv \quad (29)$$

이들의 성분은 다음과 같다.

$${}^t \mathbf{f} = \{ {}^t f_1^1, {}^t f_2^1, {}^t f_3^1, {}^t f_1^2, {}^t f_2^2, {}^t f_3^2, {}^t f_1^3, {}^t f_2^3, {}^t f_3^3 \}^T \quad (30)$$

그러면 식(28)은 다음과 같이 된다.

$$\int_{\circ V} {}^t S_{ij} \delta_0 e_{ij}^0 dv = \delta \mathbf{u}^T {}^t \mathbf{f} \quad (31)$$

식(30)에서  ${}^t f_m^n$  성분은 좌표계에서 삼각형요소의  $n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) 절점에서  $m$  방향으로 작용하는 힘이 다. 위에서 언급한 사항을 기초로 하여 식(29)는 다음과 같이 더욱 간단화 될 수 있다.

$${}^t \mathbf{f} = h^0 A {}^t \mathbf{B}_L^T {}^t \mathbf{S} \quad (32)$$

식(32)의  ${}^t \mathbf{f}$ 는 요소응력에 대한 등가 절점력이다.

### 2.4 좌표변환

변위, 변위 증분, 요소응력에 대한 등가력과 같은 절점 값들은 초기 형상에 설정된 국부 좌표계에 대해 정의된다. 이러한 국부 좌표계의 절점 값들을 고정된 전체좌표계로 전환해야 할 필요가 있다. 국부 좌표계와 고정 전체좌표계와 각각 관련된 단위 기저 벡터  $\bar{\mathbf{e}}_i$ 와  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )를 고려하자. 고정전체좌표계의 벡터성분을  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  ( $\nu^T = \{\nu_1 \nu_2 \nu_3\}$ )라고 두고, 대응되는 국부 좌표계에서의 벡터성분을 각각  $\nu'_1, \nu'_2, \nu'_3$  ( $\nu'^T = \{\nu'_1 \nu'_2 \nu'_3\}$ )라고 두면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\nu' = \mathbf{P} \nu \quad (33)$$

여기에서  $\mathbf{P}$ 는 다음과 같은 3x3 매트릭스이다.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \bar{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \bar{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \bar{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \quad (34)$$

직각좌표계가 사용되고 있기 때문에,  $\mathbf{P}$ 는  $\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{I}$ 와  $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ 를 만족하는 직각매트릭스이다 ( $\mathbf{I}$ 는 단위 매트릭스).  $\mathbf{P}$ 의 이러한 성질을 이용하여 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\nu = \mathbf{P}^T \nu' \quad (35)$$

여기서 채택된 국부 직각좌표계에 있어서  $\bar{\mathbf{e}}_i$ 은 다음과 같이 계산된다.

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{N_X} \begin{bmatrix} X_1^2 - X_1^1 \\ X_2^2 - X_2^1 \\ X_3^2 - X_3^1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

여기에서

$$N_X = \sqrt{(X_1^2 - X_1^1)^2 + (X_2^2 - X_2^1)^2 + (X_3^2 - X_3^1)^2}$$

(37)

식 (36)과 식(37)에서  $X^n$ 은 전체좌표계에 있어서 절점  $n(n=1,2,3)$ 에 있어서  $i$  방향으로의 좌표를 의미한다. 다음은 요소의 면과 직각인  $\bar{e}_3$ 를 구하기 위해 우선 아래와 같은 성분을 갖는 벡터  $\bar{V}_y$ 를 정의한다.

$$\bar{V}_y = \frac{1}{N_y} \begin{bmatrix} X_1^3 - X_1^1 \\ X_2^3 - X_2^1 \\ X_3^3 - X_3^1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

여기에서

$$N_y = \sqrt{(X_1^3 - X_1^1)^2 + (X_2^3 - X_2^1)^2 + (X_3^3 - X_3^1)^2} \quad (39)$$

식(36)과 식(38)을 이용하면  $\bar{e}_3$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{e}_3 = \bar{e}_1 \times \bar{V}_y \quad (40)$$

$\bar{e}_1$ 과  $\bar{e}_3$ 에 대해 직각인 세 번째 기저벡터  $\bar{e}_2$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\bar{e}_2 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_3 \quad (41)$$

아래와 같이 일반적으로 채택되는 전체좌표계에 관련된 기저벡터를 알면

$$e_1^T = \{100\}, e_2^T = \{010\}, e_3^T = \{001\} \quad (42)$$

전환매트릭스  $P$ 는 계산될 수 있다.

식(33)과 식(35)를 이용하여 증분운동방정식을 전환할 수 있다.

$${}_{t_0}^{t+\Delta t} \hat{K}^{(k-1)} T U^{(k)} = {}_{t_0}^{t+\Delta t} \hat{R}^{(k-1)} \quad (43)$$

여기에서

$$T = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \quad (44)$$

$${}_{t_0}^{t+\Delta t} \hat{K}^{(k-1)} = T {}_{t_0}^{t+\Delta t} \hat{K}^{(k-1)} T \quad (45)$$

$${}_{t_0}^{t+\Delta t} \hat{R}^{(k-1)} = T {}_{t_0}^{t+\Delta t} \hat{R}^{(k-1)} T \quad (46)$$

식(44)의  $P$ 는 식(34)에서 주어지고  $0$ 는  $3 \times 3$  제로 매트릭스이다. 식(43)의  $U^{(k)}$ 는 전체좌표계에 대해 정의되는 9개의 절점면위 증분 성분에 대응한다.

${}_{t_0}^{t+\Delta t} \hat{K}$ 와  ${}_{t_0}^{t+\Delta t} \hat{R}^{(k-1)}$ 은 전체좌표계에 대해 정의된 증분 유효 강성매트릭스와 유효절점력이다.

### 3. 수치해석 예제 및 고찰

#### 3.1 카테나리(Catenary) 곡면 - 예제 I

연성 구조물을 설계하기 위해서는 우선 초기장력 도입으로 인한 구조물의 형상을 정확히 알아야 한다. 막요소의 정확성을 검증하는데 자주 사용되는 카테나리 곡면을 채택하여 본 논문에서 제안된 방법에 의한 형상해석 결과를 이론치와 비교하여 검증하였다. 그림 6은 해석모델의 요소 분할 형태이며 대칭성을 이용하여 전체의 1/4만 해석영역으로 선택한다.

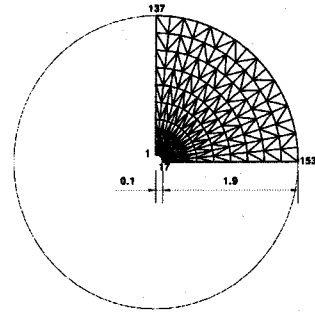


그림 6. catenary 곡면의 요소분할

식 (47)과 그림 7은 카테나리 곡면의 이론식과 이론형상이다.

$$z = a \{ \ln(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}) - \ln(a) \} \quad (47)$$

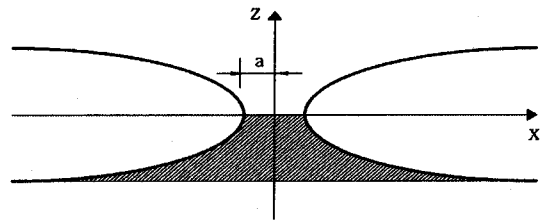


그림 7. catenary 곡면의 이론형상

그림 8은 형상해석 결과를 나타낸 그림이고, 그림 9와 표 1에 이론치와 비교한 결과를 나타내었다. 이론치와 해석결과는 비교적 정확히 일치하였다.

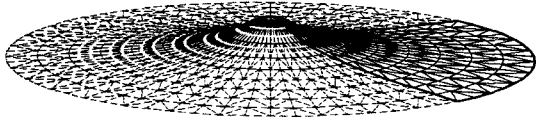


그림 8. catenary 곡면의 형상해석 결과

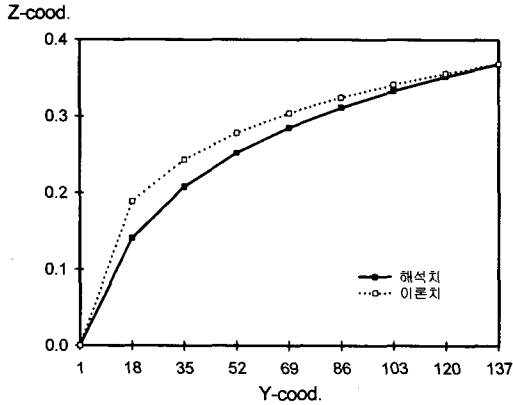


그림 9. catenary 곡면의 해석치와 이론치 비교

표 1. catenary 곡면의 형상해석 결과

절 점	X-Coord.	Y-Coord.	Z-Coord.	이론치	해석치
1	0.0000	0.1000	0.3688	0.0000	0.0000
18	0.0000	0.3375	0.2281	0.1886	0.1407
35	0.0000	0.5750	0.1607	0.2434	0.2081
52	0.0000	0.8125	0.1163	0.2784	0.2525
69	0.0000	1.0500	0.0833	0.3042	0.2855
86	0.0000	1.2875	0.0569	0.3246	0.3118
103	0.0000	1.5250	0.0351	0.3416	0.3337
120	0.0000	1.7625	0.0164	0.3561	0.3524
137	0.0000	2.0000	0.0000	0.3688	0.3688

### 3.2 케이블 보강 막구조물의 형상해석 - 예제 II

케이블 보강 막구조물에 대한 형상해석을 수행하기 위해 그림 10과 같은 해석 모델 및 제원을 이용하였다. 대칭성을 이용하여 전체의 1/2만 해석영역으로 선택하며, 1번 절점은 -Z 방향으로 10번과 16번 절점은 +Z 방향으로 225cm만큼 강제변위를 주어 형상을 구할 수 있다. 케이블 부재는 모델의 경계부와 중심점에서 교차하도록 배치하였다. 그림 10의 초기형상에서 형상해석을 수행하면 그림 11과 같은 형상해석 결과를 얻을 수 있다. 표 2에 해석치와 참고문헌[14]의 결과값에 대한 비교를 나타내었다.

해석결과와 참고문헌에 의해서 발표된 결과 값이 비교적 정확히 일치하였다.

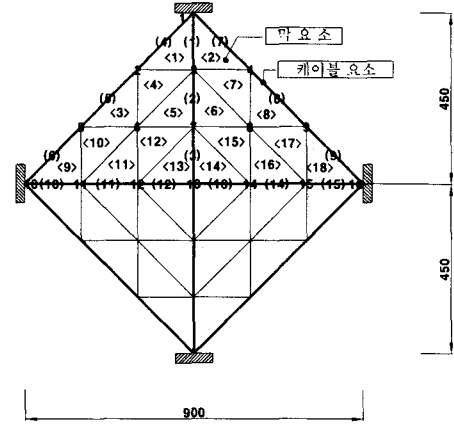
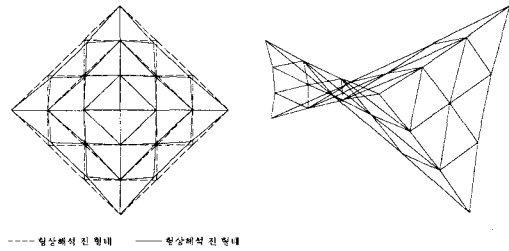


그림 10. 케이블 보강 막구조물(예제 II) 초기형상 및 요소분할



(a) 형상해석후의 평면형상 (b) 형상해석후의 3차원 형상

그림 11. 케이블 보강 막구조물(예제 II) 형상해석 결과

표 2. 케이블 보강 막구조물(예제 II)의 형상해석 결과

절 점	초기상태		참고문헌 결과치			해석치		
	X	Y	X	Y	Z	X	Y	Z
1	0.00	450.00	0.00	450.00	-225.00	0.00	450.00	-225.00
2	-150.00	300.00	-131.27	284.19	-73.90	-138.72	288.72	-74.80
3	0.00	300.00	-0.12	303.54	-131.80	0.00	299.82	-142.69
4	150.00	300.00	131.17	283.87	-74.13	138.72	288.71	-74.80
5	-300.00	150.00	-282.15	133.25	75.55	-288.71	138.72	74.80
6	-150.00	150.00	-144.39	140.06	11.44	-144.33	144.33	0.00
7	0.00	150.00	-0.10	153.49	-47.57	0.00	149.88	-67.60
8	150.00	150.00	139.16	139.99	9.31	144.33	144.33	0.00
9	300.00	150.00	281.98	132.94	75.45	288.71	138.72	74.80
10	-450.00	0.00	-450.00	0.00	225.00	-450.00	0.00	225.00
11	-300.00	0.00	-305.14	0.00	147.43	-299.82	0.00	142.69
12	-150.00	0.00	-154.47	0.00	82.52	-149.88	0.00	67.60
13	0.00	0.00	0.01	0.00	27.58	0.00	0.00	0.00
14	150.00	0.00	154.43	0.00	82.78	149.88	0.00	67.60
15	300.00	0.00	305.16	0.00	147.55	299.82	0.00	142.69
16	450.00	0.00	450.00	0.00	225.00	450.00	0.00	225.00

### 3.3 케이블 보강 막구조물의 형상 및 응력해석 -

### 예제 III

본 절에서는 예제 II에서 해석한 간단한 구조물보다 조금 복잡한 케이블 보강 막구조물에 대해서 형상해석과 응력해석을 수행하여 참고문헌[15]와 비교하여 본 연구의 타당성을 검증하였다. 그림 12는 초기형상과 요소분할의 형태이다. 해석시 사용한 막부재의 인장 강성은 1000kN/m, 프와송비는 0.2이고 단위중량은 0.0147kN/m<sup>2</sup>이다. 케이블 부재의 영계수는 1.568E8kN/m<sup>2</sup>, 단면적은 2.166E-4m<sup>2</sup>이며 단위중량은 0.018kN/m이다.

형상해석시 2, 4번 절점의 경계조건을 고정으로 하고 1, 3번 절점을 -Z방향으로 1.216m 강제변위를 주어 해석하였다. 표 3은 해석 결과를 기존의 논문과 비교한 것이며, 본 연구의 방법과 참고문헌[15]에서 발표된 결과 값이 비교적 정확히 일치하였다. 응력해석을 위해 형상해석후의 평형형상(그림 13)을 초기형상으로 하여 해석한다. 응력해석은 1~4번 절점을 고정으로 두고 절점당 0.26kN을 X방향, Y방향으로 각각 주어 수행하였다. 그림 14, 그림 15는 각 하중 조건에 의한 응력해석후의 형태이며, 표 4에서 최대 막응력 값과 X방향 하중에 의한 1~4번 절점의 반력값을 기존의 논문과 비교하였다. 해석 결과값과 참고문헌[15]의 해가 비교적 정확함을 확인할 수 있었다.

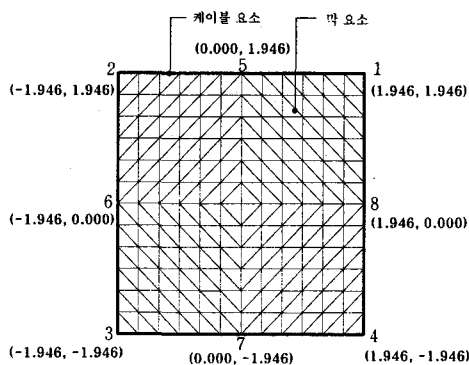


그림 12. 케이블 보강 막구조물(예제III)의 요소형태

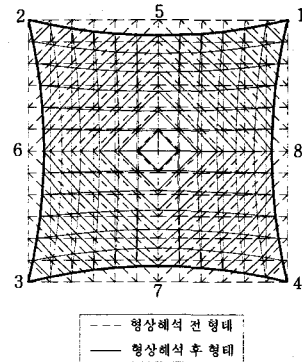


그림 13. 케이블 보강 막구조물(예제III)의 형상해석 결과

표 3. 케이블 보강 막구조물(예제III)의 형상해석 결과

절 점	참고문헌 결과치		해 석 치		
	X-Coord	Y-Coord	X-Coord	Y-Coord	Z-Coord
1	1.946	1.946	1.946	1.946	-1.216
2	-1.946	1.946	-1.946	1.946	0.000
3	-1.946	-1.946	-1.946	-1.946	-1.216
4	1.946	-1.946	1.946	-1.946	0.000
5	0.000	1.703	0.000	1.699	-0.608
6	-1.703	0.000	-1.699	0.000	-0.608
7	0.000	-1.703	0.000	-1.699	-0.608
8	1.703	0.000	1.699	0.000	-0.608

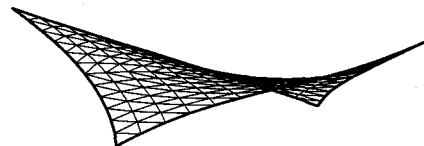


그림 14. 케이블 보강 막구조물(예제III)의 x방향 하중에 의한 변형형상

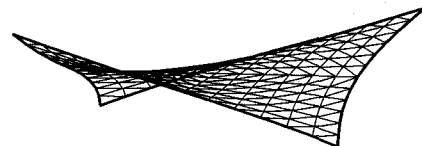


그림 15. 케이블 보강 막구조물(예제III)의 y방향 하중에 의한 변형형상

표 4. 케이블 보강 막구조물(예제Ⅲ)의 응력해석결과

응력(KN) 지점	참고문헌 결과치			해 석 치		
	X	Y	Z	X	Y	Z
최대 막응력(kN/m)	11.2	11.2		10.7	11.9	
1	25.1	6.1	10.2	23.3	6.6	9.18
2	-46.5	68.9	-29.8	-44.7	78.3	-31.6
3	25.1	-6.1	-10.2	23.3	-6.6	-9.18
4	-46.6	-68.9	29.8	-44.7	-78.3	31.6

#### 4. 결론

본 연구에서는 인장막구조물을 해석하기 위해 TCS요소에 대한 강성매트릭스를 TLF에 의해 유도하였으며, 케이블 보강 막구조물에 대한 예제를 통한 형상해석 및 응력해석을 수행하였다. 막요소의 정확성을 검증하는데 자주 사용되는 카테나리 곡면을 이용하여 본 논문에서 제시한 형상해석법의 효용성을 입증하고, 아울러, 객관적인 타당성을 알아보기 위해 기존의 논문과도 비교하였다.

이상의 결과로부터 다음과 같은 결과를 얻었다.

1. 케이블-막구조물의 형상해석을 수행한 결과, 해석 결과 값과 이론해 및 참고문헌에 의해서 발표된 결과 값이 비교적 정확히 일치하였다.
2. 형상해석후의 평형형상을 초기형상으로 하여 응력해석을 하여 기존의 논문과 비교하였으며, 비교적 정확히 일치하였다.
3. 본 연구에서 제시된 방법에 의해 케이블-막 구조물의 해석에 유용하게 이용될 수 있으리라고 생각된다.

#### 참고문헌

1. C. W. Hirt, A. A. Amsden and J. L. Cook : An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Method for All Flow Speeds, Journal of Computational Physics 14, pp.227-253, 1974
2. T. Belytschko, J.M. Kenndy and D.F. Schoeberle, Quasi-Eulerian Finite Element Formulation for Fluid Structures Interaction, Transaction of the ASME, V. 102, pp.62-69, 1980
3. Thomas J. R. Hughes, Wing Kam Liu and Thomas K. Z : Lagrangian-Eulerian Method Finite Element Formulation for Incompressible Viscous Flows, Computer Methods in Applied Mechanics and

Engineering, V. 29, pp.329-349, 1981

4. J. Donea, S. Giuliani and J. P. Halleux : An Arbitrary Lagrangian Eulerian Finite Element Method for Transient Dynamic Fluid-Structures Interaction, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, V. 33, pp.689-723, 1982
5. W. K. Liu and H.G. Chang : Efficient Computational Procedures for Long Time Duration Fluid Structures Interaction Problems, Journal of Pressure Vessel, V. 106, pp.317-322, 1984
6. Robert B. Haber : A Mixed Eulerian-Lagrangian Displacement Model for large Deformation Analysis in Solid Mechanics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, V. 43, pp.277-292, 1984
7. W. K. Liu, T. Belytschko and H. Chang : An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for Path-dependent Materials, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, V. 57, pp.227-245, 1986
8. Haber, R. B., Abel, J. F. and Greenberg, P. D., "An Integrated Design System for Cable Reinforced Membranes Using Interactive Computer Graphics," Computers & Structures, Vol. 14, No.3-4, pp.261-280, 1981
9. Haber, R. B. and Abel, J. F., "Initial Equilibrium Solution Methods for Cable Reinforced Membranes, Part I-Formulations," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.30, pp.263-284, 1982
10. Haber, R. B. and Abel, J. F., "Initial Equilibrium Solution Methods for Cable Reinforced Membranes, Part II-Implementation," Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 30, pp. 285-306, 1982
11. Hirohisa Noguchi, Tetsuya Kawashima, "Meshfree Analyses of Cable-Reinforced Membrane Structures by ALE-EFG method", Engineering Analysis with Boundary Elements,
12. Haber, R. B. and Abel, J. F., "Contact-Slip Analysis Using Mixed Displacements", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 109, No.2, 1983, pp.411-429
13. 박주현, 송평훈, 김승덕, 송호산, "기하학적 비선형을 고려한 연성 구조물의 형상탐색에 관한연구", 대한건축학회, Vol.20, No.2, 2002, 10, pp.11-14
14. 고영준, "케이블 길이 제한성을 고려한 케이블 보강 막 구조물의 형상탐색 및 응력변형 해석에 관한연구", 석사학위논문, 1988
15. Jin-Jun Li and Siu-Lai Chan : An Integrated Analysis of Membrane Structures with Flexible Supporting Frames, Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 40, pp. 529-540, 2004