

# 4절점 등매개요소를 이용한 引張膜構造의 形狀解析 및 應力解析

## Shape Finding and Stress Analyses of Tension Membrane Structures by using 4-node Isoparametric Elements

이 경 수\*  
Lee, Kyung-Soo

이 형 훈\*  
Lee, Hyung-Hoon

문 정 호\*\*  
Moon, Jeong-Ho

한 상 을\*\*\*  
Han, Sang-Eul

### Abstract

This study purports to analyze equally stressed surfaces in tension-membrane structures through a geometrically nonlinear approach. It adopts the formulation of a 4-node quadrilateral isoparametric plane stress element considering the orthotropic characteristic of membrane textures. Tension structures, which include cables and tension membranes, such as a cable dome initially exhibit unstable conditions because no initial internal stiffness such as bending stiffness is present. Such a structural system requires prestressing to the tension members to attain a stable state. A tension-membrane structure retains a stable three dimensional curved surface as a structural shape. This analytical process for finding the geometry is referred to as Shape Finding Analysis.

In order to assess the validity of this study, we examine equally stressed surfaces of saddle and catenary shape shell structures and carry out pertinent stress analyses

**Keywords :** Shape Finding Analysis, 4-node Quadrilateral Isoparametric Membrane Element, Tension Membrane Structures

## 1. 서 론

인장구조는 초기장력 및 3차원 곡면형태를 통해서 외부하중에 대한 강성을 확보할 수 있는 구조이다. 인장구조가 다른 구조시스템과 구별되는 가장 큰 특징은 초기장력의 도입 및 3차원 곡면형상을 결정하기 위한 형상해석이 요구되는 점이다.

초기장력이 도입되는 인장구조에는 케이블구조, 케이블 넷구조, 인장 막구조, 또는 위 구조요소가 복합적으로 결합된 하이브리드구조 등이 있다. 위 구조형식 중 케이블넷구조, 인장 막구조는 곡면형상을 구조형상으로 사용하기 때문에 구조엔지니어가 곡면형상을 결정해야하며, 이 과정을 형상해석이라 한다.

인장 막구조나 셸구조와 같이 면외력보다 면내력에 의하여 지배받는 형태저항형 구조물은 구조형상이 외부하중에 의한 구조물의 거동에 매우 큰 영향을 미친다. 따라서 형태적으로 매끄러운 곡면일수록 일정한 초기장력 하에서 주름현상(wrinkling)과 같은 외부하중에 대한 불안정성이 발생하지 않는다. 이와 같은 이유로 구조적 안정성을 확보하기 위해서는 외부하중에 대한 거동특성이 우수한 최적의 형상을 결정하여야 한다.

근래 형상해석법으로 널리 사용되는 해석법으로 뉴튼랩슨법, 동적이완법에 의한 비선형해석, 선형해석법인 내력밀도법이 있다. 뉴튼랩슨법과 동적이완법은 구조물의 불평형력 또는 포텐셜 에너지를 최소화시켜, 초기조건에 수렴될 때까지 반복해석을 수행하는 비선형해석법이다. 이중 동적이완법은 동적평형방정식을 사용해 정적평형상태를 찾는 수치해석법으로서 시간에

\* (주)마이다스아이티, 기술연구소

\*\* (주)마이다스아이티, 기술연구소 소장, 공학박사

\*\*\* 인하대학교 건축학부, 교수, 공학박사

대한 적분방법에 따라 외연적 해석법(explicit method)와 내연적(implicit Method)로 나눌 수 있다. 선형해석법인 내력밀도법은 케이블네트 및 인장 막구조의 형상 해석법으로 널리 사용되는데, 반복적 해석을 사용하지 않고 최적의 3차원 곡면형상을 효율적으로 찾을 수 있는 해석법이다. 그러나 외부하중에 대한 응력해석을 수행하기 위해서는 별도의 해석을 수행하여야 한다.

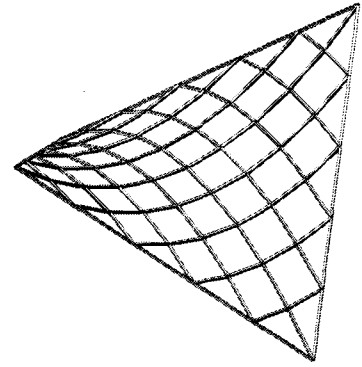
한편 인장막구조의 형상해석 및 응력해석에 사용되는 요소는, 3각형 요소 및 4각형 요소가 있으며, 일정한 평면응력을 갖는 3각형 요소가 주로 사용된다.

3각형요소는 인장 막구조의 3차원 곡면형상에 대한 효율적인 표현이 가능하며, 형상해석 및 응력해석에 널리 사용된다. 그러나 인장 막구조와 같이 직교이방성(orthotropic)을 나타내는 구조에서 삼각형요소는 요소분할(mesh division) 방법 및 방향에 따라 거동특성(응력, 변위) 및 재료적 특성의 구현에 큰 영향을 미치게 된다. 따라서 예상하지 못했던 오차 또는 해석결과를 예방하기 위해서는 세심한 요소 분할과정이 요구된다.

인장 막구조와 같이 직포재료를 사용하는 구조시스템은 힘의 흐름이 직교성이 강하며, 상대적으로 전단 응력에 대해서는 취약한 특성이 있다. 또한 압축응력에 대한 강성의 부재로 인하여 발생하는 불안정상태인 주름(wrinkling)현상을 제어하기 위해서는 요소내 적분점 및 절점 응력을 각각 계산하는 것이 효율적이다. 따라서 이러한 재료적, 역학적 특성상 요소의 수치적 분점에서 응력파악이 가능한 등매개의 사각형요소가 인장 막구조의 거동파악에 효과적으로 적용될 수 있다.

본 연구는 등매개 사각형요소를 이용하여 인장 막구조의 초기 장력상태의 형상해석 및 외부하중에 대한 재료적 이방성을 고려한 응력해석의 정식화 과정을 설명하고, 해석 예로 안장형곡면 및 현수선 곡면의 형상 해석을 수행하여 정해와의 비교를 통하여 본 연구의 정도를 파악한다.

본 연구에서 개발된 4절점 등매개요소는 건축구조물 범용 유한요소해석 및 설계 프로그램인 MIDAS/Gen에 적용하여 연구를 수행하였다.



<그림 1> 인장 막구조의 구조적 원리

## 2. 평형방정식

구조물의 전체 포텐셜에너지  $\Phi$  는 변형에너지(strain energy)  $U$ 와 외부하중에 의한 일인  $V$ 의 합으로 나타낼 수 있다.

$$\Phi = U + V \quad (1)$$

위 식의 변위에 대한 1차, 2차 미분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{d\Phi}{dq} = \int B^T \sigma dV - P \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{dq^2} &= K_C dq \\ &= \int dB^T \sigma dV + \int B^T d\sigma dV \end{aligned} \quad (3)$$

위 식(2)의 오른쪽 첫 번째항은 다음과 같이 나타낼 수 있으며,  $K_C$ 는 기하강성 매트릭스이다.

$$\int dB^T \sigma dV = K_C dq \quad (4)$$

구조물의 내력과 외력의 차인 불평형력(residual forces)은 위 식(2)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R = -\frac{d\Phi}{dq} \quad (5)$$

구조물의 전체 포텐셜에너지가 최소인 상태를 정적 하중 상태에서의 정적 평형상태(static equilibrium state)로 보기 때문에, 정적 평형상태를 위한 조건식은

위 식(5)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = 0 \quad (6)$$

인장구조물의 형상해석은 외부하중이 없는 상태에서 초기장력만으로 해석을 수행한다. 따라서 형상해석을 위한 불평형력  $R$ 은 식(2)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R = - \int B^T \sigma dV \quad (7)$$

뉴튼랩슨법이나 동적이완법같은 비선형 해석법을 이용하여 위 식(7)이 수렴한계에 도달할 때까지 반복계산을 수행한다.

### 3. 기하강성행렬 및 재료 성질

#### 3.1 기하강성 행렬

인장 막구조나 케이블구조는 초기장력이 도입된 상태에서 구조적으로 안정화되므로, 초기장력의 도입이 필수적이다. 이러한 인장구조는 해석적으로 초기장력에 의한 초기응력 또는 대변형 문제에 해당하며, 강성 매트릭스 중 초기장력은 부재력 항이 고려된 기하강성 매트릭스로 표현된다.

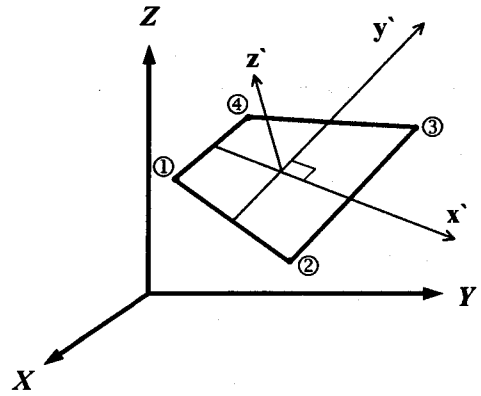
인장 막구조의 형상해석에는 재료적 성질이 고려되지 않으므로 탄성강성매트릭스  $K_E$ 는 영이 되며, 기하강성매트릭스  $K_G$ 에 의해서만 해석이 수행된다.

본 논문에서 사용된 4절점 등매개 요소(quadrilateral isoparametric element)에 대한 형상을 전체좌표계와 국부좌표계로 표현하면 <그림 2>, <그림 3>과 같이 나타낼 수 있다.

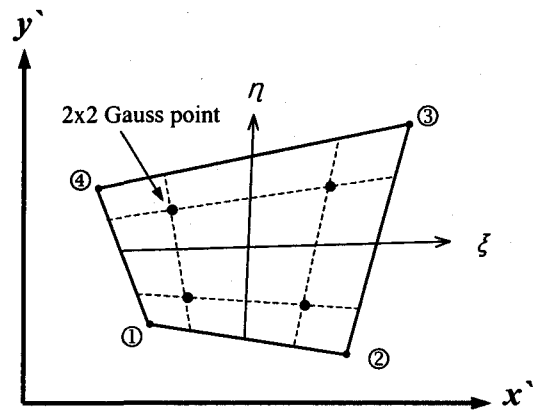
요소 중앙에서의 변위는 형상함수와 절점변위에 대해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} u_3 + \frac{\partial N_4}{\partial x} u_4 \quad (9)$$



<그림 2> 전체좌표계 및 요소형상



<그림 3> 국부좌표계

위 식에서 사용된 형상함수는 다음과 같다.

$$N_1 = 0.25(1-\xi)(1-\eta) \quad (10)$$

$$N_2 = 0.25(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = 0.25(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_4 = 0.25(1-\xi)(1+\eta)$$

변형도는 변위에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있으며,

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (11)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

위식을 선형변형과 비선형변형으로 구분하여 표현하면, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon = \epsilon_E + \epsilon_G \quad (12)$$

변형도 변위관계 매트릭스  $B$ 도 선형과 비선형부분

으로 나누어 아래식과 같이 나타낼 수 있다.

$$B = B_E + B_G \quad (13)$$

식(11)로부터 비선형 변형도를 매트릭스로 표현하면 식(14)와 같다.

$$\varepsilon_G = \frac{1}{2} A\Theta$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

위 식(14)에서  $\Theta$ 를 매트릭스로 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Theta = Nq$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{N_4}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{N_3}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{N_4}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{N_3}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{N_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{N_3}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

위 식(14)를 변위  $q$ 에 대하여 변분하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta\varepsilon_G = \frac{1}{2} \delta A\Theta + \frac{1}{2} A\delta\Theta$$

$$= AN\delta q \quad (16)$$

위 식으로부터 비선형 변형도 변위관계 매트릭스  $B_G$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$B_G = AN \quad (17)$$

식(13)으로부터  $B$  매트릭스의 변위  $q$ 에 대한 변분  $\delta B$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta B = \delta B_G = N\delta A \quad (18)$$

따라서, 위 식(18)로부터 식(4)를 전개하면 다음과 같다.

$$K_G \delta q = \int \delta B^T \sigma dV$$

$$= \int N^T \delta A^T \sigma dV \quad (19)$$

위 식에서  $dA^T \sigma$ 는 다음과 같이 나타낼 있으며,

$$\delta A^T \sigma = M \delta \Theta = MN \delta q \quad (20)$$

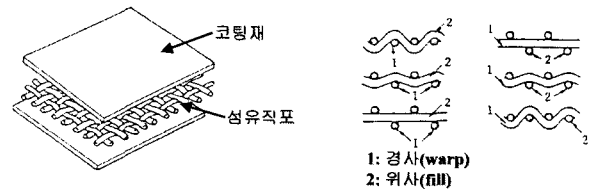
$$M = \begin{bmatrix} \sigma_x I_3 & \tau_{xy} I_3 \\ \tau_{xy} I_3 & \sigma_x I_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$I_3$ 는 3x3의 단위행렬이다. 따라서 식(19), (20), (21)로부터 기하강성 매트릭스는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_G(\sigma) = \int N^T M N dV \quad (22)$$

식(22)의 기하강성 매트릭스  $K_G$ 는 막요소의 면내 응력  $\sigma$ 에 관한 매트릭스이며, 초기장력이 도입되는 케이블이나 인장 막구조가 이와 같은 구조시스템에 해당한다.

### 3.2 재료 성질



<그림 4> 막재료의 구성

경사(warp)방향, 위사(fill)방향에 대한 탄성계수 및 포아송비를 구분하여 막재료의 이방성을 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$E_x, \nu_x$  : 경사(warp)방향 탄성계수 및 포아송비

$E_y, \nu_y$  : 위사(fill)방향 탄성계수 및 포아송비

$G_t = \frac{E_x E_y}{[E_x(1+\nu_y) + E_y(1+\nu_x)]}$  : 전단계수

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\nu_x\nu_y} \begin{bmatrix} E_x & E_y\nu_x & 0 \\ E_x\nu_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_x\nu_y)G_t \end{bmatrix} \quad (24)$$

#### 4. 등장력곡면의 해석방법

등장력곡면의 형상해석 방법은 다음과 같다. 우선 탄성계수  $E$  값을 영으로 한 상태에서, 임의의 초기장력  $\lambda$  를 다음의 조건으로 모든 요소에 일정하게 도입하여 해석을 수행한다.

$$\sigma_{0x} = \sigma_{0y} = \lambda, \quad \tau_{0xy} = 0 \quad (25)$$

여기에서 탄성계수값을 영으로 하여 해석을 수행한다는 것은 다음과 같은 의미가 있다.

첫째 : 탄성계수, 전단계수 등 재료적 성질을 무시하여 해석을 수행한다. 따라서 탄성강성 매트릭스는 영이 되며, 형상해석은 기하강성 매트릭스만을 사용하게 된다.

둘째 : 탄성계수값이 영이기 때문에 증분 응력은 항상 영이 되며, 증분변위가 발생하더라도 부재 응력은 초기장력  $\sigma_{0x}, \sigma_{0y}, \tau_{0xy}$  의 값으로 일정하게 유지된다.

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon = \Delta\tau = G\Delta\gamma = 0 \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{0x} + \Delta\sigma_x = \lambda \\ \sigma_y &= \sigma_{0y} + \Delta\sigma_y = \lambda \\ \tau_{xy} &= \tau_{0xy} + \Delta\tau = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

따라서 등장력 곡면의 수치해석적 의미는 모든 곡면에 일정한 응력이 도입된 상태의 곡면형태를 말하는 것이며, 이는 탄성계수값을 영으로 하여 수치해석을 수행하면 얻을 수 있는 곡면이다.

인장 막구조의 해석법 개발에 있어서 해석적 벤치마크역할을 수행하는 대표적인 예제는 곡면에 대한 이론식이 제시된 안장형 곡면, HP(hyperbolic paraboloid) 곡면, 그리고 현수선(catenary)곡면 등이 있다. 그러나 막요소를 이용하여 수치해석적으로 등장력 곡면을 찾

는 것은 곡면 이론식이 제시된 일부 곡면형상으로 제한되는 경우가 대부분이다.

#### 5. 수치해석 예

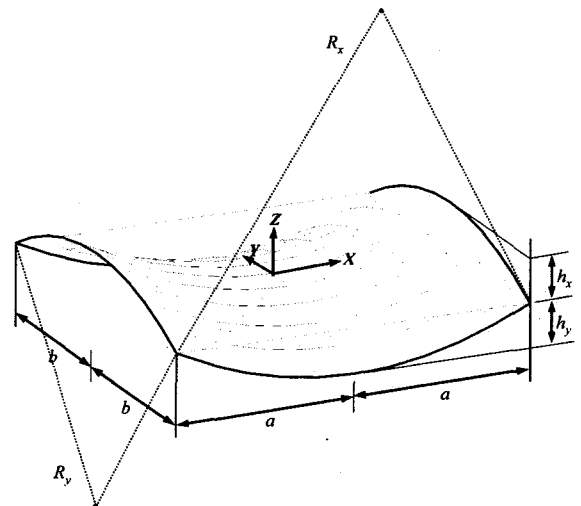
본 논문의 4 절점 등매개 평면응력요소를 이용하여 기하학적 비선형해석을 통한 인장 막구조의 등장력곡면 형상해석을 수행하였다.

안장형(saddle)곡면 및 현수선(catenary)곡면은 정적 평형상태에 대한 수학적 곡면 이론식이 제시되어 있다. 따라서 본 논문에서 제시한 방법으로 해석을 수행하고, 그 결과를 이론해와 비교한다.

##### 5.1 안장형 곡면의 등장력곡면 형상해석

<그림5>의 안장형 곡면에 대한 이론식은 식(28)과 같으며, 비선형 해석법에 의하여 등장력곡면 형상해석을 수행하였다.

$$Z = \frac{h_x X^2}{a^2} - \frac{h_y Y^2}{b^2} \quad (28)$$

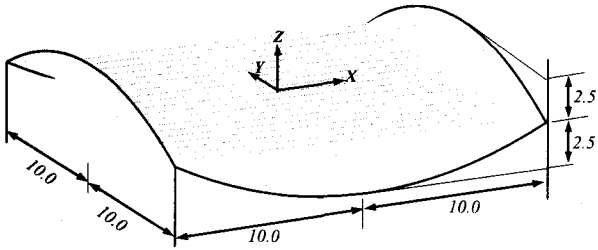


<그림 5> 안장형 곡면의 기하학적 형상

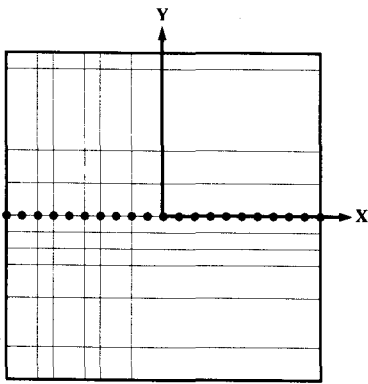
본 예제에서 사용한 안장형 곡면의 초기형상을 <그림 6>에 제시한다. 여기에서

$$a = b = 1,000\text{mm}$$

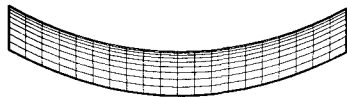
$$h_x = h_y = 250\text{mm}$$



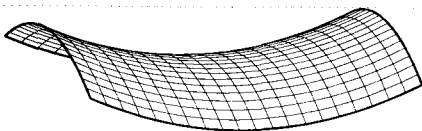
<그림 6> 안장형 곡면의 초기형상



(a) 평면형상 및 Sampling point



(b) 정면도

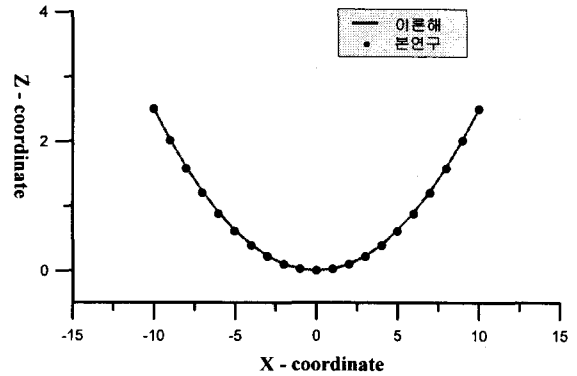


(c) 투시도

<그림 7> 안장형 곡면의 등장력곡면  
형상해석 결과

<그림 7>은 안장형 곡면의 등장력곡면 형상해석 결과에 대한 그림이고, <그림 8>은 본 연구의 결과와 이론해를 비교한 그래프이다. 형상해석결과 본 연구의

결과와 이론해의 최대 오차는 4.18%로 본 연구결과가 이론해에 비교적 근접함을 알 수 있었다. 참고문헌<sup>5)</sup>에서도 안정형 곡면에 대한 형상해석을 수행하였으며, 해석결과는 9%의 최대오차를 보이고 있다.

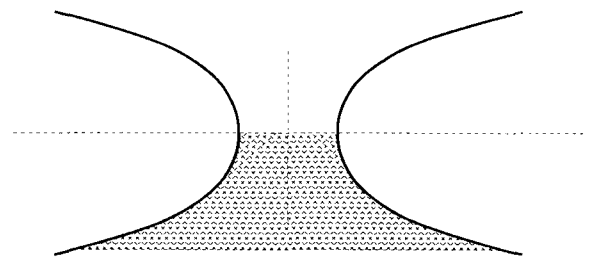


<그림 8> 안장형 곡면의 이론과 해석결과 비교

## 5.2 현수선 곡면의 등장력곡면 형상해석

<그림 9>의 현수선 곡면에 대한 이론식은 다음과 같이 제시되어 있다.

$$z = a \{ \ln(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}) - \ln(a) \} \quad (27)$$



<그림 9> 현수선 곡면의 기하학적 형상

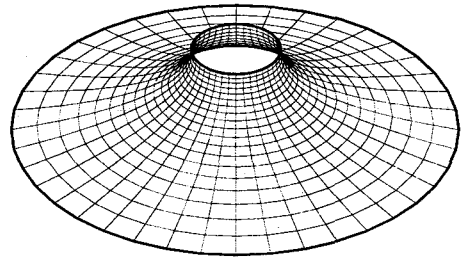
본 예제에서 사용한 현수선 곡면의 초기형상은 <그림 10>에 제시한다. 해석법은 5.1절과 동일한 비선형해석법을 사용하였으며, 본 연구에서 개발한 4절점요소 의 정도를 검증하기 위하여 기존의 3절점요소에 의한 해석결과와 이론해를 비교하였다.

본 예제의 형상해석은 변위제어를 적용하였으며, 변위제어에 사용된 강제변위량 및 위치는 <그림 10> (a)

에 제시한 것과 같다.

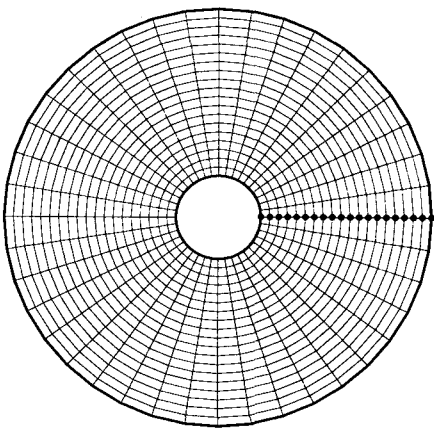


(a) 현수선곡면의 세부사항

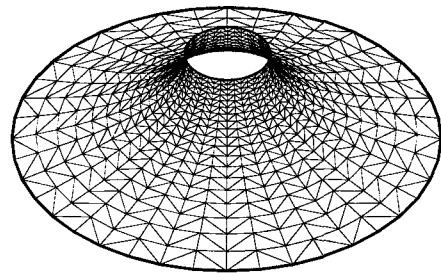


(b) 투시도

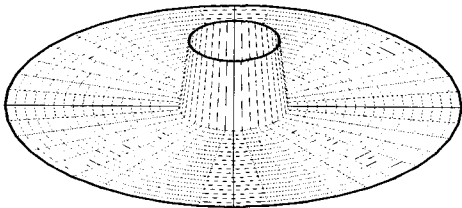
<그림 11> 4절점요소를 이용한 현수선 곡면의 등장력곡면 형상해석 결과



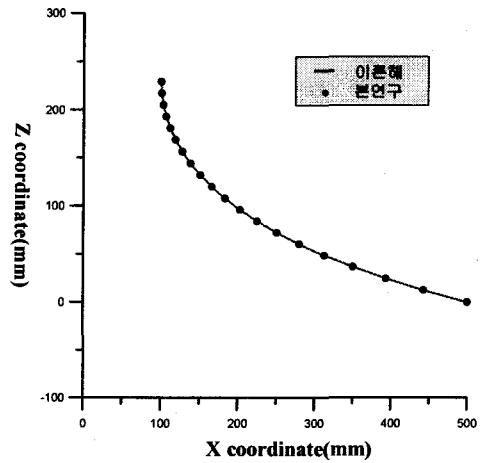
(b) 평면도 및 sampling point



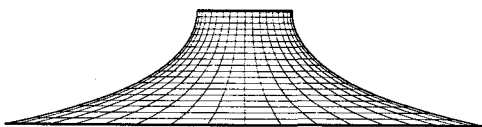
<그림 12> 3절점요소를 이용한 현수선곡면의 등장력곡면 해석결과



(c) 투시도



<그림 13> 현수선곡면의 이론과 해석결과 비교



(a) 정면도

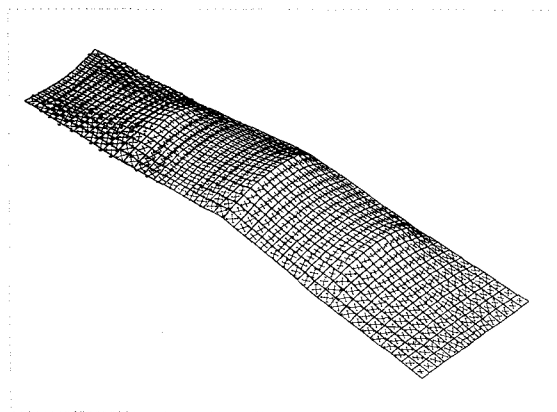
<그림 10>은 현수선곡면의 초기형상이며, <그림 11>과 <그림 12>는 각각 4절점요소와 3절점요소에 의한 등장력곡면 형상해석결과이다.

형상해석결과 4절점요소에 의한 현수선 곡면의 등장력곡면 해석결과는 이론해와 최대오차 0.25%의 오차로 매우 일치하는 결과를 얻었으며, 3절점요소의 결과와

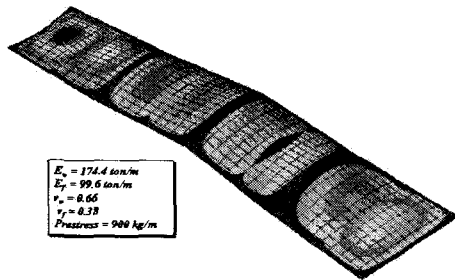
매우 일치함을 알 수 있었다.

따라서 5.1절과 본질의 형상해석결과, 본 논문의 4절점 막요소의 인장 막구조 해석 적용에 대한 신뢰성을 검증할 수 있었다.

<그림 14>는 본 논문의 4절점요소를 이용하여 외부 하중에 대한 막재료의 이방성이 고려된 응력해석을 수행한 결과를 보여주고 있다. <그림 14> (a), (b)는 각각 주응력 벡터와 변위-contour이다. 해석결과 본 4절점 요소가 형상해석 뿐만 아니라 응력해석에도 효과적인 사용이 가능함을 알 수 있었다.



(a) 주응력벡터



(b) 변위형상

<그림 14> 4절점요소를 이용한 응력해석

## 5. 결론

본 논문에서 제시한 4절점 막요소를 이용하여 등장력곡면에 대한 형상해석 및 막의 재료적 이방성을 고려한 응력해석을 수행하였다.

연구결과 4절점 막요소는 다음과 같은 특징이 있음을 알 수 있었다.

1. 형상해석결과에서는 곡면이론값 및 기존의 3절점 막요소와 거의 일치하는 결과를 얻었다.

2. 본 연구에서 개발한 직교이방성이 고려된 4절점 요소를 사용함으로써 막재료의 특성이 효과적으로 반영된 결과를 얻을 수 있었다.

따라서 본 논문에서 제시한 4절점 막요소가 인장 막구조에의 형상해석 및 응력해석에 효율적으로 적용됨을 알 수 있다.

## 참고문헌

- Day, A. S., "An Introduction to Dynamic Relaxation", The Engineer, London, Vol. 219, 1960, pp. 18-221.
- Sheck, H. J., "The Force Density Method for Form Finding and Computation of General Networks", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 3, 1974, pp. 704-713.
- Zienkiewicz, O. C., "The Finite Element Method", McGraw-Hill, London, 1977.
- 石井一夫, "State of the art report 膜構造の應力-變形解析概説", 日本膜構造協會, No. 4, 1990, pp. 69-105.
- 加藤史郎, "アイソパラメリック曲面要素を用いた膜構造解析", 日本膜構造協會, No. 9, 1995, pp. 9-21.
- 서삼열, "變位増分法에 의한 膜構造의 等張力曲面探索解析에 관한 研究", 대한건축학회, 10권, 9호, 1994, 08, pp. 113-119.
- 한상을, 이경수, "동적이완법에 의한 막구조의 등장력곡면 형태해석에 관한 연구", 한국전산구조공학회, 제 11권 4호, pp. 321-330, 1998. 12.
- 한상을, 이경수 "동적이완법에 의한 불안정 구조물의 안정화이행과정 해석에 관한 연구", 한국강구조공학회, 11권 6호, 1999.
- 한상을, 이경수, "내력밀도법에 의한 막구조의 초기형상결정", 대한건축학회 논문집, 제 15권 2호, pp. 73-80, 1999. 2.
- 김재열, 이장복, 권택진, "一般逆行列을 利用한 케이블네트 構造物의 形狀決定에 관한 研究", 대한건축학회, 16권, 6호, 2000, 06, pp. 3-10.
- Han S. E. and Lee K. S., "A Study of the Stabilizing Process of Unstable Structures", Computer & Structure, Vol. 81, 2003. 8., pp. 1677-1688.
- MIDASIT Co.,LTD., "MIDAS/Gen(General Structural Design System) Analysis & Design Manual"