
혼합유한요소모델을 이용한 두꺼운 복합적층판의 불규칙 진동해석(1) - 이론적 고찰

Random Vibration Analysis of Thick Composite Laminated Plate Using Mixed Finite Element Model (1)

석근영* 강주원**
Seok, Keun Yung Kang, Joo Won

Abstract

Thick composite laminated plates is considered in 3D finite-element. To consider continuity of transverse stresses and displacement field, mixed finite-element has been developed by using layerwise theory and the minimum potential energy principle. Mixed finite-element has been enforced through the thick direction, Z, of a laminated plate by considering six degree-of-freedom per node. Six degree-of-freedom are three displacement components in the coordinate axes directions and three transverse stress components σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} . The model maintain the fundamental elasticity relations that are stress-strain relation and displacement-strain relation, because the transverse stress components invoked as nodal degrees of freedom by using the fundamental elasticity relationship between the components of stress and displacement. Random vibration analysis of the model is performed by computing consistent mass matrix and computing covariance in frequency domain technique.

keywords : composite laminate plate, Mixed finite element, Random vibration

1. 서론

섬유강화 복합재료는 치수 안정성, 피로특성, 비강도 및 비강성 등에서 우수한 기계적 성질을 가지고 있다. 따라서 여러 구조물에 응용되고 있으며, 특히 경량화가 요구되는 항공기에 주로 사용되고 있다. 또한 섬유강화 복합재료는 적층판 각 층의 두께와 섬유방향, 그리고 적층 순서를 결정할 수 있는 이방성 재료의 특성을 가지고 있다. 그러나 국부파괴와 같은 결점으로 인해 복합재료의 구조적 거동은 복잡해지게 된다. 특히 복합적층판에 있어서 층간분리와 같은

현상들은 중요한 고려사항이다. 이런 복잡한 구조적 거동을 정밀하게 해석하는데는 lamina들 사이에 존재하는 층간응력이 중요한 요인이 된다.

기존의 Equivalent Single layer Theories, First Order Shear Deformation Theory 등과 같은 이론들은 얇은 복합적층판에 있어서 해석이 용이하고, 처짐이나 휨응력 해석과 같은 global analysis에 있어서는 만족스러운 결과를 산출하므로 주요 이론으로 적용되어 왔다. 그러나 두께가 두꺼워질수록 기존의 해석이론을 바탕으로 한 유한요소해석은 만족스러운 결과를 산출하지 못한다. 왜냐하면 두꺼운 복합적층판의 경우, 기존의 해석이론으로서는 실질적인 거동형상을 정확하게 유한요소로 모델화하지 못하기 때문이다.

* 영남대학교 대학원 석사과정

** 영남대학교 건축학부 교수

두꺼운 복합적층판은 구조부재로서 특유의 이방성을 가지면서, 3차원적으로는 복잡한 응력분포를 나타낸다. 두께가 두꺼워질수록 횡방향 응력이 3차원 응력해석에 있어서 그 비중이 증가하게 된다. 적층판의 두께 방향에 있어서 elasticity solution들은 횡방향 수직응력과 전단응력의 연속성 뿐만 아니라, 각 층간마다 연속적인 변위장을 가진다. 그러므로 layerwise이론에 의한 해석은 복합적층판 거동에 있어서 층간연속성을 유지하는데 유효하게 되었고, Reddy, Soldatos, Wu와 Kuo, Wu와 Hsu 등에 의해서 변위장을 기본으로 하는 Layerwise analysis를 이용한 다양한 유한요소해석모델이 제안되어졌다. 이 변위장을 기본으로 하는 layerwise 유한요소해석은 얇은 적층판이던 두꺼운 적층판던 처짐과 휨응력 등의 global analysis와 횡방향 응력과 같은 local value에 있어서 만족스러운 결과를 산출한다. 그러나 단지 두께 방향의 변위장이 연속성만 만족을 하고, 층간 횡방향 응력요소들의 연속성에 있어서는 만족스러운 결과를 나타내지 못한다.

두꺼운 복합적층판의 3차원 해석에 있어서, Shi와 Chen이 적층판의 전체와 부분에 있어서 변화를 기본으로 하는 3차원 혼합유한요소모델을 개발하였다. 이 모델은 기존의 변위장 변수의 유한요소와 함께 두께 방향으로 hybrid 응력요소의 혼합사용으로 정밀도가 높은 응력값을 산출할 수 있었다.

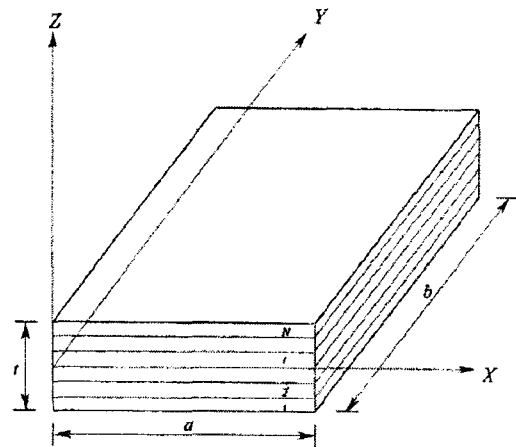
Desai는 최소포텐셜에너지원리를 이용한 mixed finite element을 정식화하였다.

Carrera는 Reissner's 혼합변분원리를 이용하여 C^0 Reissner-Mindlin plate element로 확장되는 mixed plate element를 개발하였다.

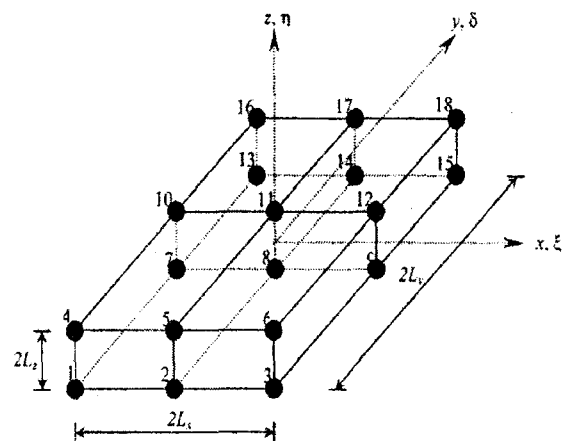
본 논문은 직교이방성인 lamina로 구성된 이방성 복합적층판에 대한 불규칙진동해석을 수행한다. 층간의 변위장과 응력요소들의 연속성을 고려하기 위해 3D mixed finite element를 정식화하고 그 요소를 기본으로 불규칙진동해석을 하려한다. 본 논문은 해석방법을 더욱 폭넓은 대상에 적용시키기 위해, 우선적으로 이론적 고찰 및 해석모델에 정식화를 수행하고, 차후에 다양한 적용방법 및 대상에 대한 해석결과의 분석을 수행하려한다.

2. 유한요소 정식화

유한요소모델은 <그림 1>와 같은 절점자유도를 6개 가지는 18절점 아이소파라메트릭 solid 요소이다. 두께 방향에 대한 응력의 연속성을 고려하므로 횡방향 응력인 σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} 은 탄성이론을 기본으로 하여 가정된 변위장으로부터 유도되었다. 유한요소 정식화에 있어서는 최소 퍼텐셜에너지 원리를 사용한다. 요소들간에 접촉면에는 다른 요소가 통과하지 않도록 모델화된다.



<그림 1> 적층판의 기하학적 형태



<그림 2> 18절점 3차원 유한요소의 형태

요소의 변위장인 $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ 는 면내방향으로는 2차 변분을 가지고, 두께 방향 즉, 횡방향으로는 3차 변분을 가진다.

가정된 변위장은 다음과 같다.

$$u_k(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_i h_j a_{0ijk} + z \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_i h_j a_{1ijk} + z^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_i h_j a_{2ijk} + z^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_i h_j a_{3ijk} \quad (1)$$

$$(k = 1, 2, 3)$$

$$g_1 = \frac{\xi}{2}(\xi - 1) \quad g_2 = 1 - \xi^2 \quad g_3 = \frac{\xi}{2}(1 + \xi) \quad \xi = \frac{x}{L_x} \quad (2)$$

$$h_1 = \frac{\delta}{2}(\delta - 1) \quad h_2 = 1 - \delta^2 \quad h_3 = \frac{\delta}{2}(\delta + 1) \quad \delta = \frac{y}{L_y} \quad (3)$$

$$u_1 = u \quad u_2 = v \quad u_3 = w \quad (4)$$

a 는 일반화된 좌표로 z 의 함수이고, 요소 좌표축 x, y, z 는 적층판의 좌표계 X, Y, Z 와 평행하다. 적층판의 좌표계에서 임의의 lamina의 응력-변형률 관계는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C11 & C12 & C13 & 0 & 0 & 0 \\ C21 & C22 & C23 & 0 & 0 & 0 \\ C31 & C32 & C33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C44 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C66 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$[D] = [T]^T [C] [T] \quad (6)$$

[T]: 변환행렬

[D]는 적층판 좌표축에 대한 임의의 lamina의 3차 원상의 탄성계수이다.

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (7)$$

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \ \tau_{yz}]^T \quad (8)$$

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz}]^T \quad (9)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{ij} & 0 \\ 0 & D_{lm} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i, j=1,2,3,4 \\ l, m=5,6 \end{matrix} \quad (10)$$

횡방향 응력성분들은 응력-변형률 관계식과 변형률-변위 관계식으로부터 다음과 같이 표현된다

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{55} & D_{56} \\ D_{56} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{55} & D_{56} \\ D_{56} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= D_{13}\varepsilon_x + D_{23}\varepsilon_y + D_{33}\varepsilon_z + D_{34}\gamma_{xy} \\ &= D_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + D_{23} \frac{\partial v}{\partial y} + D_{33} \frac{\partial w}{\partial z} \\ &\quad + D_{34} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

식(11), 식(12)에 $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z}$ 를 구하여 두계방향에도 자연좌표계로 변환시키고, 변위장 $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$ 을 절점변수로 표현하면 다음과 같다.

$$u_k(x, y, z) = \sum_{n=1}^{18} g_i h_j (f_n u_{kn} + f'_n u'_{kn}) \quad (13)$$

$$f_1 = \frac{1}{4}(2 - 3\eta + \eta^3), \quad f_2 = \frac{1}{4}(2 + 3\eta - \eta^3),$$

$$f_3 = \frac{L_z}{4}(1 - \eta - \eta^2 + \eta^3), \quad f_4 = \frac{L_z}{4}(-1 - \eta + \eta^2 + \eta^3)$$

$$\eta = \frac{z}{L_z}, \quad u'_{kn} = \frac{\partial u_{kn}}{\partial z}$$

$$(14)$$

여기서, n 은 요소의 절점번호이고, u_{kn}, u'_{kn} 은 절점변수이다.

$$\xi = -1, 0, 1 \text{에 대해 각각 } i = 1, 2, 3 \text{이고,}$$

$$\delta = -1, 0, 1 \text{에 대해 각각 } j = 1, 2, 3 \text{이다.}$$

$\eta=-1$ 에 대해 $q=1$, $p=3$ 이고, $\eta=1$ 은 $q=2$, $p=4$ 에 대응된다.

식(11)의 변위장은 다음과 같이 형상함수와 절점 자유도로 표현된다.

$$\{u\} = [M]\{q\} \quad (15)$$

$$\{u\} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, [M] = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n \ \dots \ N_{18}] \quad (16)$$

$[N_n]$ 은 부록 A에 표현되어 있다.

$$\{q\} = [q_1^T \ q_2^T \ \dots \ q_n^T \ \dots \ q_{18}^T]^T \quad (17)$$

$$\{q_n\} = [u_n \ v_n \ w_n \ (\tau_{xz})_n \ (\tau_{yz})_n \ (\sigma_z)_n]^T \quad (18)$$

적층판의 전체 포텐셜에너지 Π 는

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_V \{q\}^T \{p_b\} dV - \int_{\Sigma} \{q\}^T \{p_s\} ds \quad (19)$$

이고, $\{p_b\}$ 는 단위체적력벡터, $\{p_s\}$ 는 단위 표면의 표면력 벡터, Σ 는 표면력을 받는 요소의 면적을 표현한다.

변형률벡터와 응력벡터는 다음과 같이 표현된다

$$\{\epsilon\} = [B]\{q\} \quad (20)$$

$$[B] = [L][M] \quad (21)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\{\sigma\} = [D][B]\{q\} \quad (23)$$

$$[B] = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_n \ \dots \ B_{18}] \quad (24)$$

$$[B_n] = [L][N_n] \quad (25)$$

$[B_n]$ 은 부록 B에 표현되어 있다.

최소 포텐셜에너지 원리에 의해 요소강성행렬 $[K]^e$ 와 요소작용력벡터 $\{f\}^e$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$[K]^e = \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-L_y}^{L_y} \int_{-L_z}^{L_z} [B]^T [D] [B] dx dy dz \quad (26)$$

$$\{f\}^e = \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-L_y}^{L_y} \int_{-L_z}^{L_z} [M]^T \{p_b\} dx dy dz + \int_{\Sigma} [M]^T \{p_s\} ds \quad (27)$$

식(26), 식(27)을 적용하여 요소의 조합을 통해 전체좌표계로 확대시키면 전체강성행렬 $[K]$, 전체자유도벡터 $\{Q\}$ 그리고 전체작용력벡터 $\{F\}$ 로써 다음과 같은 방정식을 구할 수 있다.

$$[K]\{Q\} = \{F\} \quad (28)$$

3. 불규칙 진동해석

일반적인 다자유도 시스템의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$[M]\{\ddot{Q}\} + [C]\{\dot{Q}\} + [K]\{Q\} = \{P(t)\} \quad (29)$$

$[M]$ 은 전체질량행렬, $[C]$ 는 전체감쇠행렬이고 $\{P(t)\}$ 는 평균이 0이 되는 stationary Gaussian random excitation 벡터이다.

여기서, consistent mass matrix를 구성하면

$$[M] = \sum_e [M]^e, [M]^e = \rho \int [M]^T [M] dv \quad (30)$$

이고, ρ 는 재료의 밀도이다.

식(30)의 $[M]$ 과 $[C]$ 의 항에서는

$$\{Q\} = \frac{d\{Q\}}{dt}, \quad \{\dot{Q}\} = \frac{d^2\{Q\}}{dt^2} \quad (31)$$

이다.

스펙트럼밀도함수가 진동수 범위내에서만 0이 아닌 값을 갖는 진동을 협대역 진동이라 부른다. 이와는 대조적으로 광대역 진동은 스펙트럼밀도함수가 광대역 진동수 범위에 걸쳐 0이 아닌 값을 갖는 진동이다. 이때 이와 같은 진동의 시간이력은 전 진동수대역의 중첩으로 이루어지게 된다. 극한값으로 진동수대역이 $\omega_1=0$ 으로부터 $\omega_2=\infty$ 까지 확대될 때 이와 같은 스펙트럼을 백색잡음이라 부른다.

다중의 임의 가진력을 받는 N자유도계로 일반화된 스펙트럼밀도함수는 다음과 같다.

$$S_y(w_n) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \phi_{ij} \phi_{mk} \cdot \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \phi_{Ll} \phi_{mk} C_L(w_n) C_m^*(w_n) H_j(w_n) H_k^*(w_n) \quad (32)$$

여기서,

$C_L(w_n)$: 절점좌표 L에서의 하중에 대한 이산 Fourier 변환계수

$C_m^*(w_n)$: 계수 $C_L(w_n)$ 의 공액복소수

$H_j(w_n)$: 절점좌표 j에서의 복소수 진동수응답

$H_k^*(w_n)$: $H_k(w_n)$ 의 공액복소수 진동수응답

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(w) dw \quad (33)$$

식(33)로부터 백색 잡음의 제곱평균은 무한대이어야 한다. 그러므로 백색 잡음진동은 단지 이론적인 개념일 뿐이다. 실제로 진동수대

역폭이 주된 관심사가 되는 진동수를 훨씬 초과할 때의 진동을 백색 잡음진동(white noise process)이라 부른다.

4. 결론

층간 변위와 더불어 층간 응력의 연속성을 고려하기 위해 가정된 변위장으로부터 탄성이론에 의해 두께 방향의 응력 요소인 $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ 가 유도되었다, 그래서 요소에서 임의의 n번째 절점의 자유도

는 $\{q_n\} = [u_n \ v_n \ w_n \ (\tau_{xz})_n \ (\tau_{yz})_n \ (\sigma_z)_n]^T$ 가 되어 변위장 요소와 응력요소가 동시에 고려되는 mixed finite element가 된다. 18절점을 가진 요소의 강성행렬 $[K]$ 는 최소포텐셜에너지 원리를 이용하여 구해지는데, 108×108 행렬이 된다. 또한 consistent mass matrix 구성방법을 사용하여 요소의 질량행렬은 3×108 행렬이 구해진다.

차후 본 논문의 이론적 고찰 및 유한요소 정식화를 이용하여 다양한 복합적층판의 정하중에 대한 해석 및 동하중 특히, 불규칙 진동에 관한 정밀해석을 수행할 것이다. 이를 통해 두꺼운 복합적층판에서의 mixed finite element의 정확성을 탄성해석에 의한 정밀해석의 결과와 비교하고, 기존의 적층판 이론에 의한 정적, 동적 복합적층판 해석 결과와도 비교분석할 것이다.

참고문헌

1. Kang, J., "Nonlinear random vibration of laminated composite plates using high-order shear theory," Dissertation for the Degree of Ph.D. Michigan State University, 1998
2. Ramtekkar, G. S., "Mixed Finite-Element Model for Thick Composite Laminated Plates," Mechanics of Advanced and Structures, Vol.9, 2002, pp.133~156
3. Desai, Y. M., "Dynamic Analysis of Laminated Composite Plates Using A Layer-wise Mixed Finite Element Model," Composite structures, Vol.59, 2003, pp.237~249
4. S. V. Hoa, W. Feng, Hybrid Finite Element Method for Stress Analysis of Laminated Composites, Kluwer

-
- Academic Publishers, 1998, p.298
5. J. N. Reddy, Mechanics of Laminated Composite Plates-Theory and Analysis, CRC Press, 1997, p.782
 6. M. Paz, 구조동력학 4판-이론 및 계산, 예문사, 2001, p.948
 7. R. W. Clough, J. Penzien, Dynamics of Structures, McGraw-Hill, 1993, p.739
 8. Spilker. R. L., "Hybrid-Stress Eight-Node Elements for Thin and Thick Multilayer Laminated Plates," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.18, 1982, pp.801~828
 9. Reddy. J. N., "Modelling of Thick Composites Using A Layerwise Laminated Theory," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.36, 1993, pp.655~677
 10. Liou. W. J., Sun. C. T., "A Three-Dimensional Hybrid Stress Isoparametric Element for The Analysis of Laminated Composite Plates," Computers & Structures, Vol.23, No.2, 1987, pp.241~249

부록 A

$[N_n]=$

$$\begin{bmatrix} g_i h_j f_a & 0 & -g'_i h_j f_b & \frac{D_{66}}{\Delta} g_i h_j f_b & -\frac{D_{56}}{\Delta} g_i h_j f_b & 0 \\ 0 & g_i h_j f_a & -g_i h_j^* f_b & -\frac{D_{56}}{\Delta} g_i h_j f_b & \frac{D_{55}}{\Delta} g_i h_j f_b & 0 \\ -\frac{D_{13}}{D_{33}} g'_i h_j f_b & -\frac{D_{34}}{D_{33}} g'_i h_j f_b & g_i h_j f_a & 0 & 0 & \frac{1}{D_{33}} g_i h_j f_b \\ -\frac{D_{34}}{D_{33}} g_i h_j^* f_b & -\frac{D_{23}}{D_{33}} g_i h_j^* f_b & & & & \end{bmatrix}$$

$$g'_i = \frac{\partial g_i}{\partial x}, \quad h_j^* = \frac{\partial h_j}{\partial y}, \quad \Delta = D_{55} \times D_{66} - D_{56}^2$$

부록 B

$[B_n]=$

$$\begin{bmatrix} g_i h_j f_a & 0 & -g''_i h_j f_b & \frac{D_{66}}{\Delta} g_i h_j f_b & -\frac{D_{56}}{\Delta} g_i h_j f_b & 0 \\ 0 & g_i h_j^* f_a & -g_i h_j^{**} f_b & -\frac{D_{56}}{\Delta} g_i h_j^* f_b & \frac{D_{55}}{\Delta} g_i h_j^* f_b & 0 \\ -\frac{D_{13}}{D_{33}} g'_i h_j f_b & -\frac{D_{34}}{D_{33}} g'_i h_j f_b & g_i h_j f_a & 0 & 0 & \frac{1}{D_{33}} g_i h_j f_b \\ -\frac{D_{34}}{D_{33}} g_i h_j^* f_b & -\frac{D_{23}}{D_{33}} g_i h_j^* f_b & & & & \\ g_i h_j^* f_a & g_i h_j f_a & -2g_i h_j^* f_a & \frac{D_{66}}{\Delta} g_i h_j^* f_b & -\frac{D_{56}}{\Delta} g_i h_j^* f_b & 0 \\ & & & -\frac{D_{56}}{\Delta} g_i h_j f_b & +\frac{D_{55}}{\Delta} g_i h_j f_b & \\ g_i h_j f_a & -\frac{D_{13}}{D_{33}} g'_i h_j f_b & -\frac{D_{34}}{D_{33}} g'_i h_j f_b & -g_i h_j f_b & \frac{D_{66}}{\Delta} g_i h_j f_b & -\frac{D_{56}}{\Delta} g_i h_j f_b & \frac{1}{D_{33}} g_i h_j f_b \\ -\frac{D_{34}}{D_{33}} g_i h_j^* f_b & -\frac{D_{23}}{D_{33}} g_i h_j^* f_b & +g_i h_j f_a & & & & \\ -\frac{D_{13}}{D_{33}} g_i h_j^* f_b & g_i h_j f_a & -g_i h_j^* f_b & -\frac{D_{56}}{\Delta} g_i h_j f_b & \frac{D_{55}}{\Delta} g_i h_j f_b & \frac{1}{D_{33}} g_i h_j^* f_b \\ -\frac{D_{34}}{D_{33}} g_i h_j^{**} f_b & -\frac{D_{23}}{D_{33}} g_i h_j^{**} f_b & +g_i h_j^* f_a & & & \end{bmatrix}$$

$$g''_i = \frac{\partial^2 g_i}{\partial x^2}, \quad h_j^{**} = \frac{\partial^2 h_j}{\partial y^2}$$

$$f_a = \frac{\partial f_a}{\partial z}, \quad f_b = \frac{\partial f_b}{\partial z}$$