

# 단층 래티스 돔의 단면산정에 있어서의 형상초기불완전의 영향

## Effects of geometrical initial imperfection in proportioning member sections of single layer reticulated dome

김종민\*      황보석\*\*      한상을\*\*\*      권택진\*\*\*\*  
Kim, Jong-Min      Hwangbo, Seok      Han, Sang-Eul      Kwun, Teak-Jin

### Abstract

First author proposed a proportioning method for member sections of a single layer reticulated dome subjected to uniform and non-uniform load without any geometrical initial imperfection, and discussed the validity and effectiveness of the method which was based on linear buckling stress and a knock down factor. However, buckling of a single layer reticulated dome is strongly affected by initial imperfection. It is well known that geometrical initial imperfections reduce the nonlinear buckling capacity of a single layer reticulated dome. Thus, structural engineers may be recommended to reflect the effects of geometrical initial imperfections in proportioning member sections.

In this paper, firstly, the presented proportioning method by first author is applied to dome without consideration of any imperfections and the thickness and diameter of each member are determined. Secondly, the load bearing capacities of the proportioned domes are checked with the imperfection, by the inelastic buckling analysis.

**keywords** : Single layer reticulated dome, Proportioning method for member sections, Generalized slenderness ratio, Buckling stress, Elasto-plastic buckling, Geometric initial imperfection

## 1. 서론

단층 래티스 돔은 3차원 곡면구조가 갖는 셸구조의 원리로, 적은 재료로 장스팬 구조를 실현시킬 수 있는 대표적인 대공간 구조형식의 하나이다. 그러나, 단층 래티스 돔의 구조설계에는 좌굴이 중요한 문제가 되며, 이 좌굴현상은 돔의 형상, 지지조건, 접합부 특성, 구성부재의 세장비, 부재半開角, 하중조건 등에 매우 영향을 받으며, 돔에 형상초기불완전(이하 초기부정)이 존재할 경우, 돔의 내력은 민감하게 저하하는 것으로 알려져 있다. 이와 같은 요인

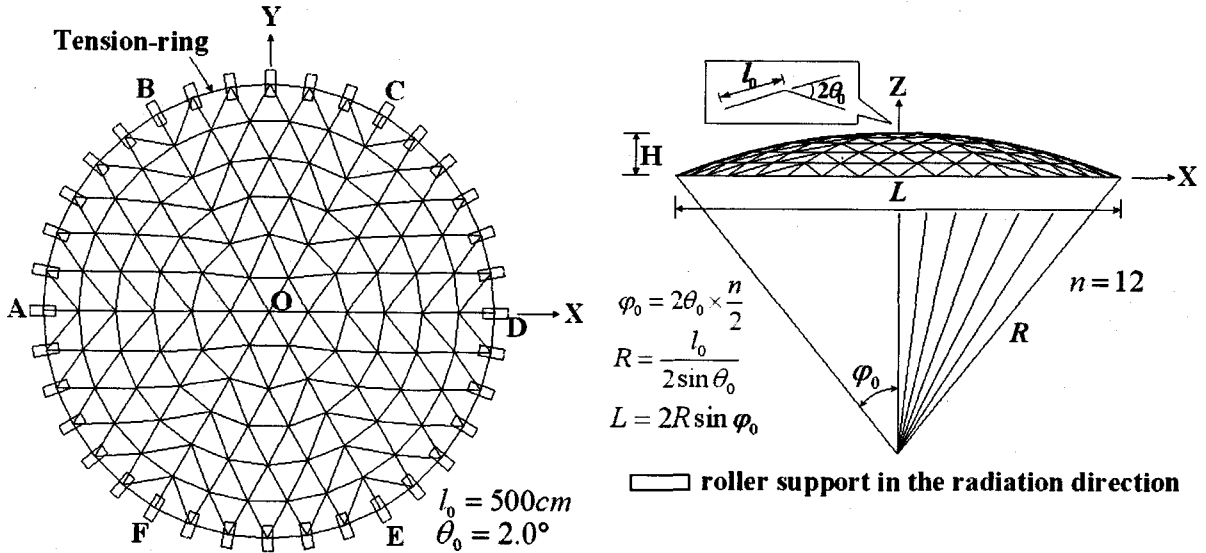
들이 래티스 돔의 좌굴에 미치는 영향에 관해 여러 측면에서의 연구가 진행되어, 단층 래티스 돔의 역학적 거동이 규명되고 있다. 기존의 연구<sup>8)</sup>에서는 삼각형 네트워크를 갖는 평편한 단층 돔을 대상으로 하여, 부재 중간하중을 포함한 복수의 하중조건하에서, 돔의 설계시 필요불가결한 돔의 내력 추정법 및 단면산정법에 관해 검토되었다.

본 연구에서는 형상초기부정을 고려한 단층 래티스 돔(이하 돔)의 단면산정법을 제안하기 위한, 그 기본연구로서, 형상초기부정이 존재하지 않는 완전형상으로 단면 산정된 돔을 대상으로 하여, 설계된 돔에 초기부정을 도입할 경우, 돔의 내력(탄소성좌굴하중)이 형상초기부정에 의해 어떻게 저하될 것인가를 분석하여, 돔의 단면산정시에 초기부정의 영향을 어떻게 고려할 것인가를 검토한다.

\* 비회원·(주)ES건축구조엔지니어링 팀장, 공학박사  
\*\* 정회원·(주)ES건축구조엔지니어링 대표이사, 공학박사  
\*\*\* 정회원·인하대학교 건축공학과 교수, 공학박사  
\*\*\*\*정회원·성균관대학교 건축공학과 명예교수, 공학박사

## 2. 해석모델, 하중조건, 가정단면

### 2.1 래티스 돔의 형상 및 경계조건



<그림 1> 단층 래티스 돔과 경계조건

대상으로 하는 해석모델을 <그림1>에 나타낸다. 래티스 돔의 분할수는稜線(<그림1>의 AOD, BOE 등)의 부재수를  $n$ 으로 나타내어,  $n$ 이 12, 최대스팬이 약 60m 정도의 원형평면으로 가정한다. 부재반개각  $\theta_0$ 는  $2.0^\circ$ 에 대하여 검토한다. 경계조건은 <그림1>에 나타난 것과 같이 放射방향에 Roller 지지로 가정하고, 원주방향과 연직방향의 변위는 구속한다. 부재는 강관(탄성계수  $E = 2,100\text{tf/cm}^2 = 20,594\text{ kN/cm}^2$ , 항복응력도  $\sigma_y = 2.4\text{tf/cm}^2 = 23.5\text{ kN/cm}^2$ 로 상정하고, 절점은 강점으로 가정한다. 능선부재길이  $l_0$ 은 500cm로 고정한다. 따라서 래티스 돔의 스패  $L$ , 중앙부의 높이  $H$ , 돔의 곡률반경  $R$ 은 표1과 같다.

표1 래티스 돔의 스패  $L$ , 라이즈  $H$ , 곡률반경  $R$

$\theta_0$ (deg.)	$L$ (cm)	$H$ (cm)	$R$ (cm)	$\varphi_0$ (deg.)	$H/L$
2.00	5827	619	7193	24	0.11

( $l_0 = 500\text{cm}$ )

### 2.2 부재의 기본 세장비 $\lambda_0$

래티스 돔의 부재의 휨 특성을 표현하기 위해, 표

2와 같이 능선부재에 대하여 기본세장비(이하, 세장비)  $\lambda_0$ 을 설정하고, 이것을 참조하여 강관부재의 표준직경  $d_0$ 을 식(1)로 정한다.

$$d_0 = 2\sqrt{2} \frac{l_0}{\lambda_0} \quad (1)$$

세장비  $\lambda_0$ 로서 40, 60, 80, 100을 검토한다. 또한 Tension Ring 부재는 내부의 래티스 재에 비해, 현저하게 큰 인장력이 생기기 때문에 Tension Ring 재의 초기직경은 래티스 재의 표준직경의 2배로 한다. 단면산정에 있어서 표준직경  $d_0$ 을 각부재의 초기치로서 사용하지만, 단면산정후의 각부재의 직경  $d_i$ 는 이 표준직경과 다르다고 생각해도 좋다.

표2 설정한 부재세장비  $\lambda_0$ , 초기직경  $d_0$

$\lambda_0$	40	60	80	100
$d_0$ (cm)	35.36 (70.71)	23.57 (47.14)	17.68 (35.36)	14.14 (28.28)

(괄호안은 Tension Ring 재의 초기직경)

### 3. 완전형상의 래티스 돔의 단면산정

#### 3.1 단면산정법의 개략

본 논문에서 채용되는 단면산정법은 기하강성매트릭스법에 의해 선형좌굴하중과 선형좌굴축력을 계산하고, 이들을 근거로 하여 단면산정용의 부재좌굴출력을 정하여, 이것을 이용하여 돔의 단면을 산정하는 방법이다<sup>7)</sup>. 본고에서는 지면관계상 상세는 생략한다. 단, 선형좌굴해석은 좌굴하중의 정도를 확보하기 위해, 1부재2요소로 분할하여 계산하고, 설계용 최소단면력계수  $\gamma$ 는 0.5로 한다. 표1(<그림 1>)의 부재반개각, 표2의 세장비를 갖는 4종의 래티스 돔을 상정하고, 부재의 초기단면은 구성부재의 초기치로서 표2의 표준치  $d_0$ 을, Tension Ring부재는 모두 동일한  $2d_0$ 로 한다. 각 부재의 초기강관두께  $t_i$ 는 2cm로 한다. 부재  $i$ 의 단면성능은, 단면의 직경  $d_i$ , 강관두께  $t_i$ 를 이용하여 식(2)로 근사한다.

$$A_{pi} = \pi \cdot d_i \cdot t_i, \quad I_{pi} = \frac{\pi \cdot d_i^3 \cdot t_i}{8} \quad (2a,b)$$

$$N_{pi} = \sigma_y \cdot A_{pi}, \quad M_{pi} = \sigma_y \cdot d_i^2 \cdot t_i \quad (2c,d)$$

여기서,  $A_{pi}$ ,  $I_{pi}$ ,  $N_{pi}$ ,  $M_{pi}$ 는 각각 부재  $i$ 의 단면적, 단면2차 모멘트, 항복축력, 전소성모멘트를 나타낸다. 단, 강관비에 관해서는 특별한 제한을 두지 않는다.

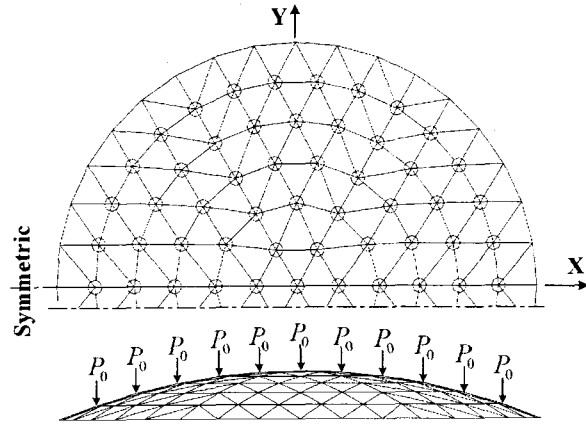
#### 3.2 단면산정용하중조건

단면산정용의 하중은, <그림2>에 나타난 고정하중비례형의 등분포하중으로 한다. 단위단면적당 단면산정용하중  $p_{ultd}$ 는  $18.5tf/m^2$ 로 산정하고, 1절점당의 단면산정용하중  $P_{ultd}$ 는 식(3)으로 계산한다.

$$P_0 = P_{ultd} = p_{ultd} \times (\sqrt{3}/2) \times l_0^2 \quad (3)$$

능선의 부재길이  $l_0$ 는 500cm이므로, 1절점당 하중  $P_{ultd}$ 은 40.0tf가 된다. 주변이외의 전체 절점에 연직아래방향으로 등분포하중으로 작용시킨다. 이 절

점하중에 대해서  $P_{ultd}$ 을 만족하도록 단면을 산정한다.



O는 하중점

<그림 2> 단면산정용 하중조건

#### 3.3 단면산정에 사용되는 특정부재의 좌굴응력도 $\sigma_{cr(m)}$ 의 설정법

래티스 돔의 설계에 있어서, 내력의 추정은 불가결한 문제이다. 단층 래티스 돔을 구성하는 많은 부재 중에서 어느 부재를 택하여 탄소성좌굴축력을 구하는가가 중요한 문제이다. 기존의 연구에서는 단층 래티스 돔을 구성하는 전체 부재 중에서 선형좌굴축력과 부재항복축력의 비  $N_{cr i}^{lm} / N_{pi}$ 가 최대가 되는 부재를 특정부재(m)으로 선택하고, 이 특정부재(m)에 대해서 정규화 세장비  $\Lambda_{(m)}$ 가 정의되어,  $\Lambda_{(m)}$ 의 함수로서 부재의 탄소성좌굴응력도를 추정하고 있다. 본 연구에서도 동일한 방법을 채용한다. 따라서, 축력과 하중의 관계가 선형이라고 가정할 경우, 전체 부재중에서  $\Lambda_{(m)}$ 가 최소가 되는 특정부재는 최초로 소성화한다고 생각할 수 있다.

$$\Lambda_{(m)} = \sqrt{\frac{N_{P(m)}}{N_{cr(m)}^{lm}}} \quad (4)$$

제1저자의 기존의 논문에서는, 좌굴저감계수  $\alpha_0$ 를 취하여 수정 Dunkerler식(5a)에서 탄소성좌굴축

력의 추정치를 구해, 식(5d)로부터 구해지는 좌굴응력도를 부재의 좌굴응력도로서 다른 전체의 압축부재에 적용하고 있다. 식(5b)는 선형좌굴응력도, 식(5c)는 탄성좌굴응력도, 식(5d)는 소성변위까지를 고려한 좌굴응력도이다. 따라서 선형좌굴응력도는 해석치, 탄성좌굴응력도는 추정치이다.

$$\frac{1}{\alpha_0 / \Lambda^2(m)} \left( \frac{es N_D^{pl}(m)}{N_{p(m)}} \right) + \left( \frac{es N_D^{pl}(m)}{N_{p(m)}} \right)^2 = 1.0 \quad (5a)$$

$$\sigma_{cr(m)}^{lin} = \frac{N_{cr(m)}^{lin}}{A_{p(m)}}, \quad \sigma_{cr(m)}^{el} = \frac{\alpha_0 N_{cr(m)}^{lin}}{A_{p(m)}}, \quad \sigma_{cr(m)}^{es} = \frac{es N_D^{pl}(m)}{A_{p(m)}} \quad (5b,c,d)$$

### 3.4 저감계수 $\alpha_0$ 의 설정법

단층 래티스 돔의 좌굴은 좌굴전의 기하학적비선형과 여러 가지 초기부정에 영향을 받아, 탄소성좌굴하중  $P_{cr}^{el}$ 은 선형좌굴하중 보다  $P_{cr}^{lin}$  저감한다. 좌굴저감계수  $\alpha_0$ 는 선형좌굴하중에 대한 탄성좌굴하중의 비를 나타내는 계수이다. 단면산정을 행하기 위해서는 저감계수  $\alpha_0$ 를 파악할 필요가 있다.

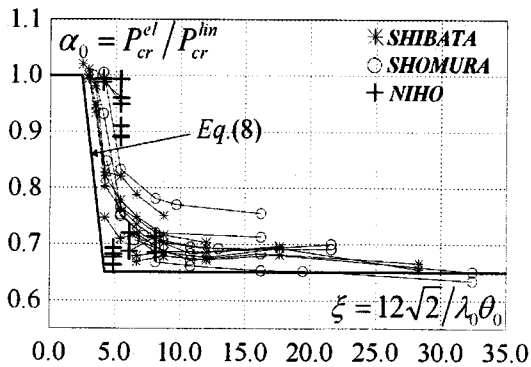
$$\alpha_0 = P_{cr}^{el} / P_{cr}^{lin} \quad (6)$$

$$\xi = \frac{12\sqrt{2}}{\lambda_0 \theta_0} \quad (7)$$

$$4.2 < \xi ; \alpha_0 = 0.65 \quad (8a)$$

$$2.4 \leq \xi \leq 4.2 ; \alpha_0 = 0.65 + 0.35 \frac{(4.2 - \xi)}{1.8} \quad (8b)$$

$$\xi \leq 2.4 ; \alpha_0 = 1.0 \quad (8c)$$



〈그림 3〉 좌굴저감계수  $\alpha_0$ 와  $\xi$ 의 관계

본 논문에서는 기존의 결과에 입각하여 좌굴응력곡선에 사용되는  $\alpha_0$  보정함수  $\xi$ 와의 관계로 분석한 (8)식의 경험식을 좌굴응력도 계산에 이용한다.

## 4. 초기부정을 도입한 돔의 분석

### 4.1 형상초기부정의 가정

단층 래티스 돔의 좌굴내력은 형상초기부정에 대해 민감히 저하하므로, 단면산정에 있어서 형상초기부정에 대해서 검토할 필요가 있다. 본 연구에서는 서론에서 언급한것 처럼 초기부정이 없는 완전 형상으로 단면산정된 돔에 초기부정을 도입할 경우, 돔의 내력(탄소성좌굴하중)이 형상초기부정에 어떻게 저하하는지 분석한다.

형상초기부정을 도입하는 방법으로는, 어느 1절점에 부정을 주는 방법과 돔 전체에 형상초기부정을 주는 방법이 있다. 형상초기부정의 분포형상에 의한 내력의 저하에 관한 연구<sup>6)</sup>에 의하면, 영향이 최대가 될 것으로 생각되어지는 1절점에 초기부정을 주는 경우에 비하여, 돔의 전체에 형상초기부정이 존재하는 경우가 좌굴하중이 크게 저하한다.

따라서, 본 연구에서는 완전형상의 돔이 탄소성좌굴시(최대내력시)의 증분의 변위비례형의 형상초기부정을 돔 전체에 주어, 초기부정에 대해 검토한다. 또한, 형상초기부정량은 식(9a)로 설정한다. 각 절점의 초기변위량  $\delta_i$ 는 식(9b)로 설정한다. 표3에 초기부정량  $\delta_0$ 을 나타낸다. 단,  $\epsilon_{im}$ 은 500, 1000, 1500에 대해 검토한다.

$$\delta_0 = \frac{L}{\epsilon_{im}} \quad (9a)$$

$$\delta_i = \frac{d_i}{d_{max}} \times \delta_0 \quad (9b)$$

여기서,  $L$  : 래티스 돔의 스패

$\epsilon_{im}$  : 초기부정량을 설정하기 위한 계수

$d_i$  : 최대내력시의 각 절점의 변위

$d_{max}$  : 최대내력시의 최대변위

$i$  : 절점번호

표 3 래티스 돔의 스패인, 초기부정  $\delta_0$

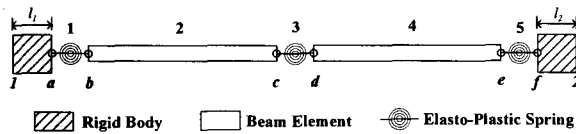
$\theta_0$ (deg.)	L(cm)	$\epsilon_{im}$	$\delta_0$ (cm)
2.0	5827.26	1500	3.88
		1000	5.83
		500	11.65

## 4.2 형상초기부정의 검토

### 4.2.1 탄소성좌굴해석

완전형상으로 단면산정된 돔에 형상초기부정을 도입할 경우, 돔의 내력의 변화를 검토하기 위하여, 탄소성좌굴해석을 수행하여, 내력(탄소성좌굴하중)  $P_{cr}^{pl}$  를 구하였다.

탄소성좌굴해석의 해석법은 문헌(5)와 동일한 방법으로 상세는 생략한다. 해석에 있어서의 각각의 부재는 그림 4에 나타난 것과 같이, 부재의 양단과 부재의 중앙에 부재의 항복을 표현하는 스프링 요소를 설치한 모델을 사용하였다.



〈그림 4〉 탄소성해석 부재모델

표 4 형상초기부정을 도입한 돔의 좌굴내력(tf/node)

$\theta_0$	$\lambda_0$	$\xi$	$\alpha_0$	$\Lambda$	$\epsilon_{im}$	$im P_{cr}^{pl}$	$\frac{im P_{cr}^{pl}}{P_{cr}^{pl}}$	$\frac{im P_{cr}^{pl}}{P_0}$
2.0	40	12.15	0.65	0.60	-	43.63	1.00	1.09
					1500	42.06	0.96	1.05
					1000	41.38	0.95	1.03
	60	8.10	0.65	0.76	-	47.21	1.00	1.18
					1500	43.46	0.92	1.09
					1000	41.65	0.88	1.04
	80	6.08	0.65	0.83	-	47.74	1.00	1.19
					1500	43.04	0.90	1.08
					1000	40.88	0.86	1.02
	100	4.86	0.65	0.87	-	35.17	0.74	<b>0.88</b>
					1500	48.53	1.00	1.21
					1000	43.78	0.90	1.09
					500	41.59	0.86	1.04
					500	35.72	0.74	<b>0.89</b>

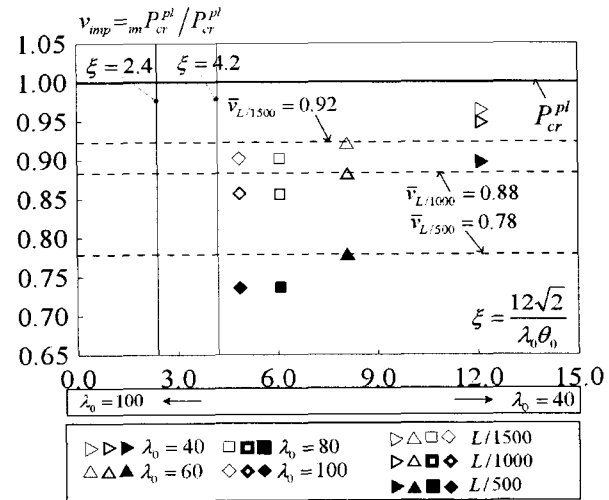
(단, 설계하중  $P_0 = P_{ult} = 40tf/node$ )

탄소성해석의 하중조건은 단면산정이 가정한 <그림 2>의 등분포비례형 하중이다.

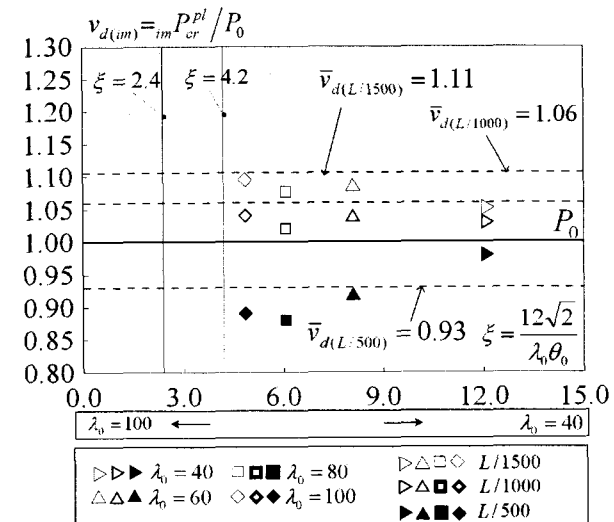
### 4.2.2 형상초기부정에 의한 좌굴하중의 변화

완전형상으로 단면산정된 돔에 형상초기부정을 도입한 돔의 탄소성좌굴하중  $im P_{cr}^{pl}$  을 표 4에 나타낸다. 표 4에서  $\epsilon_{im}$  는 부정량의 정도를 나타내며,  $\epsilon_{im}$  가 '-'로 표시된 것은 완전형상의 계산결과이다.

표 4와 <그림 5>에서  $im P_{cr}^{pl} / P_{cr}^{pl}$  는 완전형상의 내력에 대한 형상초기부정이 있는 돔의 내력의 저하율을 나타내며, 저하율의 평균치를 <그림 5>의



〈그림 5〉 형상초기부정에 의한 탄소성좌굴하중의 저하



〈그림 6〉 형상초기부정이 있는 돔의 탄소성좌굴

$\bar{v}_{L/500}, \bar{v}_{L/1500}, \bar{v}_{L/1000}$ 로 나타낸다. 형상초기부정에 의해 돔의 내력은  $L/500$ 에서 약30%저하하고, 돔의 내력의 저하율은 보축변수  $\xi$ 가 작을수록, 결국 부재세장비가 틀수록 형상초기부정에 의해 내력의 저하가 크게 나타내고 있다.

형상초기부정을 도입한, 탄소성좌굴하중  $m P_{cr}^i$ 와 설계하중  $P_0$ 과의 비를 <그림6>에 나타낸다.  $L/1500, L/1000$ 의 경우, 설계하중을 만족하지만,  $L/500$ 의 초기부정에는 설계하중을 만족하지 않는다. 따라서, <그림 6>에서 알 수 있는 것과 같이, 초기부정이  $L/500$ 이상인 경우, 돔의 단면산정시 초기부정의 영향을 고려하여, 설계할 필요가 있다.

## 5. 결 론

형상초기부정을 고려한 단층 래티스 돔의 단면산정법을 검토하기 위한 기본연구로서, 부재반개각  $2.0^\circ$ , 부재 세장비가 40, 60, 80, 100으로 한정된 주변 roller지지의 돔을 대상으로, 초기부정에 대한 좌굴하중(내력)의 변화를 검토하였다. 얻어진 결과는

(1) 형상초기부정에 의해 돔의 내력은  $L/500$ 에서 완전형상의 내력에 비해, 약30%저하하고, 돔의 내력의 저하율은 보축변수  $\xi$ 가 작을수록, 결국 부재세장비가 틀수록 형상초기부정에 의해 내력의 저하가 크며, (2)  $L/500$ 에서 돔의 내력이 단면산정시 가정한 설계하중을 만족하지 않는다.

본 연구에서 얻어진 초기부정에 대한 내력의 저하를 내력저감계수로 제안하여, 초기부정의 영향을 고려할 수 있는 돔의 단면산정에 관해서는 추후의 과제로 둔다.

## 참고문헌

[1] The Working Group on Spatial Structures, International Association for Shell and Spatial Structures : Analysis, Design and Realization of Space Frames a State-of-the-Art Report, Bulletin of I.A.S.S., Madrid, 1984  
 [2] Yang Y. B., Yang C. T., Chang T. P., Chang

P. K. Effects of member buckling and yielding on ultimate strengths of space trusses, Engineering Structures Vol. 19(2), 1997 : 179-191  
 [3] Kato S., Mutoh I. Influence of local imperfections on buckling strength of reticulated shells, Journal of structural engineering Vol.42A, 1996: 147-158  
 [4] Kato S., Niho Y. Proportioning method for single layer reticulated domes "Knock down factor for proportioning method and estimation ultimate loads", Proc. of Sixth Asian pacific conference on shell and spatial structures, Seoul, Korea, Oct. 2000, Vol.1: 189-98  
 [5] Kato S., Mutoh I., Shomura M. Collapse of semi-rigidly jointed reticulated domes with initial geometric imperfections, Journal of Constructional Steel Research 48, 1998: 145-68  
 [6] Kato, S., Kim, J.M., Niho, Y. Proportioning Method for Member Sections of Single Layer Reticulated Domes based on the Results of Linear Buckling Analysis, Proc. of Sixth Asian pacific conference on shell and spatial structures, Seoul, Korea, Oct. 2000, Vol.1: 25-32  
 [7] Ogawa, T., Kuwada, M. Effect of geometrical initial imperfections on the elasto-plastic buckling load of rigidly jointed single-layer latticed domes, Journal of Structural and Construction Engineering, Architectural Institute of Japan(in Japanese), No.531, 2000.5 pp.109-115  
 [8] Kato S, Kim JM, Cheong MC. A New Proportioning Method for Member sections of Single Layer Reticulated Domes subjected to Uniform and Non-Uniform Loads, Engineering Structures, 2003;25: p.1265-78, 2003.8