

공간트러스구조의 탄소성 후좌굴 해석

Elasto-Plastic Postbuckling Analysis of Space Truss Structures

이 상 환* 권 익 노** 김 응 교***
Lee, Sang Hwan Kwun, Ik No Kim, Eung Kyo

Abstract

The primary objective of this paper is to trace the post-buckling behavior of space trusses in the inelastic range. Modeled member material behavior characteristics of struts in the post-critical elasto-plastic stage are determined and three types of idealized hardening rules are described. To perform this analysis, the present work is used the the current stiffness parameter method combined with the cylindrical arc-length method. Numerical examples are presented to illustrate the accuracy and the application of the numerical solutions introduced above.

keywords : Post-critical elasto-plastic stage, Isotropic, Independent, Kinematic

1. 서 론

공간트러스는 장애물이 없이 넓은 공간이 요구되는 구조에 유용한 시스템으로 전체 및 국부적인 불안정에 민감한 구조물이다. 따라서 공간트러스구조의 거동은 기하학적인 비선형 뿐만 아니라 부재의 항복이나 인장에 의한 파괴까지 고려되어서 평가되어야 한다. 즉 공간트러스 구조물의 극한하중까지의 거동을 파악하기 위해서는 응력이 선형탄성 범위에 있더라도 큰 변형이 발생하면 하중-변위 관계가 비선형 곡선형태를 취하는 기하학적 비선형거동 뿐만 아니라, 세장비가 작을 경우 탄소성거동을 고려한 재료적 비선형해석을 함께 수행하여야 한다.

이 분야의 연구로서, Powll & Simons^[1]은 변위

증분법을 사용하여 평면트러스의 탄소성해석을 수행하였고, Kim & Chang^[2]은 변위 및 하중증분법을 개발하여 공간트러스의 기하학적 비선형 해석을 수행하였으며 Hill등^[3]은 Arc-Length method에 Modified Newton-Raphon iteration법을 결합시켜 비탄성해석을 수행하였다.

본 연구에서는 Cylindrical Arc-Length method에 current stiffness parameter를 접목시킨 방법을 사용하여 국부좌굴과 탄소성거동을 고려한 공간트러스 구조물의 극한거동을 추적한다.

2. 탄소성 해석

트러스부재의 세장비가 작아서 단주에 해당되면 부재는 좌굴보다는 탄소성 거동에 의해 구조물붕괴가 일어날 수 있다. 압축력을 받는 트러스 요소에 대해 응력-변형도 곡선은 그림 1에 나타낸 것과 같이 항복점까지는 선형탄성이고 그 이후에는 선형경화

* 정회원 · 디에스케이 엔지니어링(주) 구조기술사

** 정회원 · 디에스케이 엔지니어링(주) 공학박사

*** 정회원 · 디에스케이 엔지니어링(주) 공박, 구조기술사

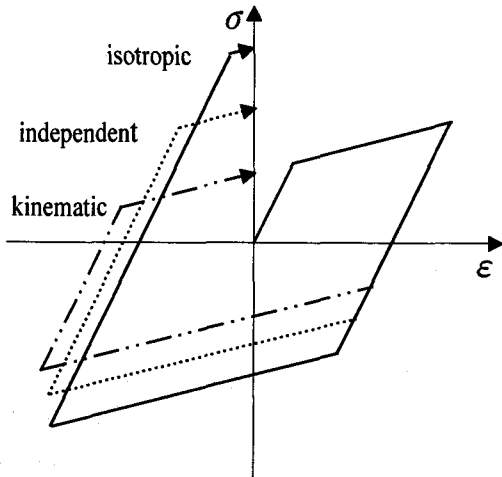
거동 (Linear-hardening behavior)을 나타내는 것으로 가정한다.

즉, 접선계수는 상수로 가정되며 응력-변형도 관계는 아래의 식과 같이 두개의 직선으로 근사화될 수 있다.

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{for } \sigma \leq \sigma_{y0} \quad (1)$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E+} \frac{1}{E_t} (\sigma - \sigma_{y0}) \quad \text{for } \sigma > \sigma_{y0} \quad (2)$$

여기서, E 와 E_t 는 각각 초기탄성계수와 접선계수이며 ϵ , σ 와 σ_{y0} 는 각각 변형도, 응력과 항복응력이다.



<그림 1> Idealized hardening models

본 연구에서는 다음과 같은 세가지의 경화 모델에 대해 탄소성 해석이 수행된다.

2.1 Isotropic hardening rule

인장항복점이 증가할 때 압축항복점이 대칭적으로 증가하는 경화모델로서 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$|\sigma| = |\sigma(x)| \quad (3)$$

2.2 Kinematic hardening rule

인장항복점이 커진만큼 압축항복점이 감소하는 모델로서 σ_y^t 는 인장력을 받을 때의 항복응력, σ_y^c 는 압축력을 받는 경우의 항복응력이라 놓으면,식(4)와 나타낼 수 있다.

$$\sigma_y^t(x) - \sigma_y^c(x) = 2\sigma_{y0} \quad (4)$$

여기서, σ_{y0} 는 초기항복응력이며 인장과 압축에 대한 초기의 항복응력은 같다고 가정한다.

2.3 Independent hardening rule

인장력과 압축력에 대한 항복응력이 각각 독립적으로 나타나는 경화모델로서 인장력과 압축력에 의해 누적된 소성변형이 각각 인장항복응력과 압축항복응력에 영향을 주는 형태이다.

이때 인장력과 압축력에 대한 두개의 경화파라미터를 x^t 와 x^c 로 표현하면 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\sigma = \sigma_y^t(x^t) \quad \text{for } \sigma > 0 \quad (5)$$

$$\sigma = \sigma_y^c(x^c) \quad \text{for } \sigma < 0 \quad (6)$$

3. 공간트러스의 비선형해석

이 장에서는 공간트러스요소에 대한 비선형해석을 수행하기 위해 Updated Langrangian Formulation에 따른 Newton-Raphson 방법을 채택하였으며 변형도-변위 관계식은 다음과 같다.

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (7)$$

식(7)을 이용하여 탄성강성매트릭스 $[k_E']$ 와 기하학적 강성매트릭스 $[k_G']$ 을 구할 수 있으며 요소의 부재력벡터는 식(8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{F'\} = ([k_E'] + [k_G']) \{p'\} \quad (8)$$

$$\text{여기서, } [k_E'] = \frac{E_T A}{l} \begin{bmatrix} I_1 & -I_1 \\ -I_1 & I_1 \end{bmatrix},$$

$$[k_G'] = \frac{F}{l} \begin{bmatrix} I & -I \\ -I & I \end{bmatrix} \text{이며 } A, l, F \text{와}$$

$E_T (= d\sigma/d\varepsilon)$ 는 각각 단면적, 부재길이, 축력과 접선계수를 의미한다.

식(8)에서 좌표변환에 의해 전체좌표계에 대한 요소력벡터는 식(9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\{F^e\} = [k^e] \{p^e\} \quad (9)$$

여기서, $[k^e]$ 와 $\{p^e\}$ 는 전체좌표계에서 정의된 강성매트릭스와 변위벡터를 표시한 것이다.

식(10)은 $m+1$ 하중단계의 i 반복단계에서 구조물의 강성 변화에 대한 전체좌표계에서의 요소력을 나타낸 것이다.

$${}^{m+1}\{F^e\}^{(i)} = {}^{m+1}[R]^{(i)} {}^{m+1}\{F'\}^{(i)} \quad (10)$$

여기서, ${}^{m+1}[R]^{(i+1)}$, ${}^{m+1}\{F'\}^{(i+1)}$ 은 각각 $m+1$ 하중단계에서 $i+1$ 번째 반복에 대한 요소의 회전매트릭스와 부재력벡터이다.

4. 비선형해석 방법

기하학 및 재료적 비선형성을 가진 공간트러스의 극한거동을 평가하기 위해서 Cylindrical Arc-Length method가 사용되었으며 새로운 하중증분의 크기를 결정하기 위해 Current Tiffness Parameter

를 도입하였다.

증분에 대한 기본방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}^m[K_T]\{\delta p\}^{(i)} = \delta \lambda^{(i)}\{P\} + \{R\}^{(i)} \quad (11)$$

$$\{R\}^{(i)} = {}^{m+1}\lambda^{(i-1)}\{P\} - {}^{m+1}\{F\}^{(i-1)} \quad (12)$$

여기서, ${}^m[K_T]$, $\{p\}$, $\{P\}$, $\{F\}$, λ , δ , $\{R\}$ 는 각각 하중증분단계 m 에서의 접선강성매트릭스, 변위벡터, 외력벡터, 내력벡터, 하중파라미터, 반복에 대한 변화, 불평형력벡터를 의미한다.

$m+1$ 하중증분단계에서 i 번째 반복에 대해 누적된 변위와 하중파라미터는 다음과 같다.

$${}^{m+1}\{p\}^{(i)} = {}^{m+1}\{p\}^{(i-1)} + \{\delta p\}^{(i)} \quad (13)$$

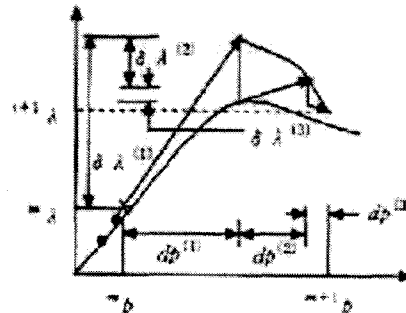
$${}^{m+1}\lambda^{(i)} = {}^{m+1}\lambda^{(i-1)} + \delta \lambda^{(i)} \quad (14)$$

$i-1 = 0$ 일 때, 식 (10), (13)과 (14)에서의 변수들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}^{m+1}\{p\}^{(0)} = {}^m\{p\} \quad (15a)$$

$${}^{m+1}\lambda^{(0)} = {}^m\lambda \quad (15b)$$

$${}^{m+1}\{F^e\}^{(0)} = {}^m\{F^e\} \quad (15c)$$



<그림 2> Cylindrical arc-length method

구조물의 자유도 총수를 N 이라고 하면 i 번째 반복계산에서 결정해야 하는 미지수는 $N+1$ 이고 방정수의 식은 N 이므로 하나의 추가적인 조건이 필요하다.

Cylindrical Arc-Length method에서는 다음과 같은 구속조건을 적용한다.

$$[dp]^{(i)}\{dp\}^{(i)} = \Delta l^2 \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } \{dp\}^{(i)} &= {}^{m+1}\{p\}^{(i)} - {}^m\{p\} \\ &= \{dp\}^{(i-1)} + \{\delta\}^{(i)} + \delta\lambda^{(i)}\{\delta_T\} \end{aligned} \quad (16b)$$

불평형하중벡터 ($\{R\}^{(i)}$) 과 비례하중벡터 ($\{P\}$)에 의해 증분된 변위벡터 ($\{\delta\}^{(i)}$) 와 ($\{\delta_T\}$)는 다음 식과 같다.

$$\{\delta\}^{(i)} = {}^m[K_T]^{-1}\{R^{(i)}\} \quad (17)$$

$$\{\delta_T\} = {}^m[K_T]^{-1}\{P\} \quad (18)$$

식(13)을 식(16)에 대입하여 정리하면 식 $\delta\lambda^{(i)}$ 에 대한 2차방정식을 얻는다.

$\delta\lambda^{(i)}$ 에 대한 해를 얻기 위해 다음의 조건을 이용한다.

(a) 2차방정식의 근이 허근인 경우에는 ${}^m\lambda$ 의 크기를 줄이고 이전에 확립된 평형상태에서 다시 반복계산한다.

(b) 두 근이 실근인 경우에는, 다음의 식에서 δ 가 큰 값을 이용한다.

$$\delta = [dp]^{(i-1)}\{dp\}^{(i)} \quad \text{for } i > 1 \quad (19)$$

$$\delta = [dp]^{(0)}\{dp\}^{(1)} \quad \text{for } i = 1 \quad (20a)$$

$$[dp]^{(0)} = {}^m[dp] - {}^{m-1}[dp] \quad (20b)$$

반복과정에서 수렴되는 경우에, 새로운 증분단계에서 반복을 시작하기 전에 미리 하중증분의 크기를 결정해야 한다. 따라서 하중증분이 자동적으로 생성되는 알고리즘을 생각하기 위해 Current Stiffness Parameter (S_p)를 이용한다. S_p 는 구조물의 초기 상태와 현재상태와의 비율을 의미하며 각 증분단계에서 S_p 를 계산하고 이 값에 의지하여 비선형성이 심한 구간에서는 하중증분의 크기를 작게, 그리고

선형구간에서는 크게 하는 등의 하중증분간격을 조절하므로써 불안정점을 통과하는 방법으로 내용은 다음과 같다.

$$S_p = \{\delta_T\}^m [K_T] \{\delta_T\} \quad (21)$$

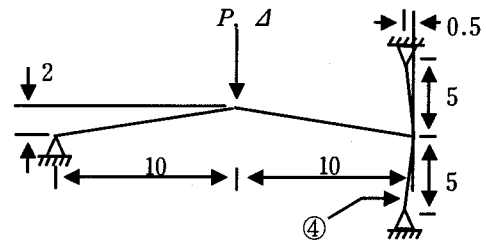
$$S_p = {}^0S_p / {}^mS_p \quad (22)$$

여기서, $\{\delta_T\}$ 는 하중벡터 ($\{P\}$)에 의한 증분변위벡터를 나타내며 ${}^0(\)$, ${}^m(\)$ 의 왼쪽 윗첨자들은 시간 0과 m에서의 값을 의미한다. 각 극한점을 통과한 후에 S_p 는 이전 증분단계와는 반대로 바뀐다.

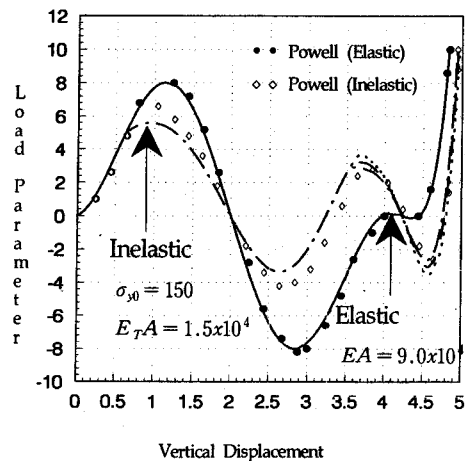
5. 수치해석 예

5.1 Two-bar arch

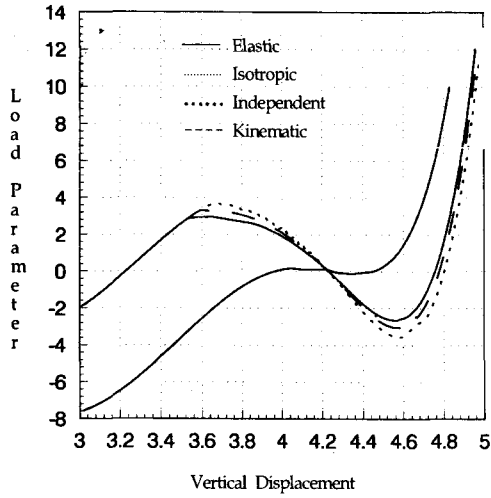
그림 3은 두 번의 snap through 거동을 나타내는 아치트러스를 나타낸 것이다.



<그림 3> Two-bar arch



<그림 4> Snap through response

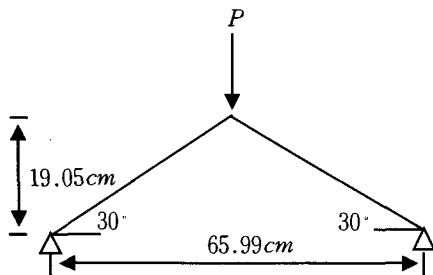


<그림 5> Detail of second snap through

해석은 (a) 모든 부재가 탄성인 경우, (b) 4번 부재가 비탄성인 경우의 두가지에 대해 수행하였다. 그림 4와 5에 나타낸 것과 같이 (a)의 경우에는 Powell과 Simons의 수치결과와 잘 일치하고 있으나 (b)의 경우에는 비교되는 결과를 나타내고 있다.

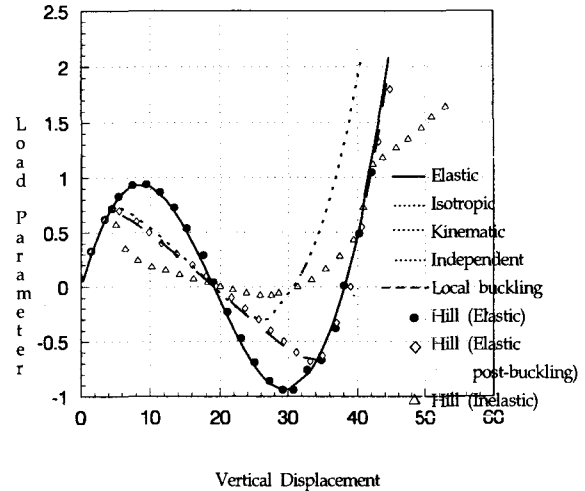
5.2 Toggle truss

그림 6은 단면적 $A = 96.77\text{cm}^2$, 길이 38.1cm , 탄성계수 $7.03 \times 10^5 \text{kg/cm}^2$ 인 두 개의 부재로 구성된 트러스구조물이다. 지점은 횡방향으로 구속되었으며 트러스의 정점에 연직방향으로 집중하중을 받는다. 식(2)에서 $E_T = \pi^2 EI / (2l^3)$ 을 적용하여 국부좌굴해석이 수행되었으며 그림 7은 탄성 및 비탄성에 대한 snap-through 거동을 나타낸 것이다.



<그림 6> Geometry and loading for toggle truss

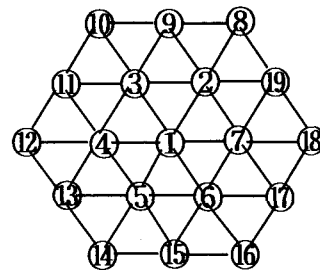
현재의 결과에서 탄성해석시 극한하중은 $3.68 \times 10^6 \text{kg}$ 으로 Hill등^[3]에 의한 하중 $3.855 \times 10^6 \text{kg}$ 와 유사한 결과를 나타내고 있다. 또한 EPB해석 결과도 $3.064 \times 10^6 \text{kg}$ 으로 Hill등에 의한 $2.927 \times 10^6 \text{kg}$ 과 거의 값은 값을 얻었다.



<그림 7> Snap through response

5.3 Shallow dome truss

그림 8은 단면적 $A = 0.1\text{cm}^2$, 탄성계수 $2.034 \times 10^7 \text{N/cm}^2$ 의 42개 부재로 구성된 돔트러스이다.



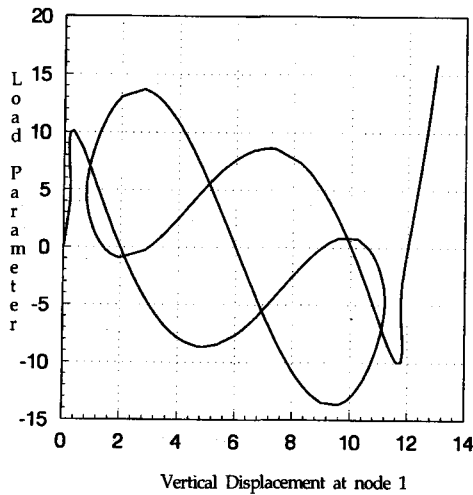
<그림 8> Shallow dome truss

<표1> 절점좌표

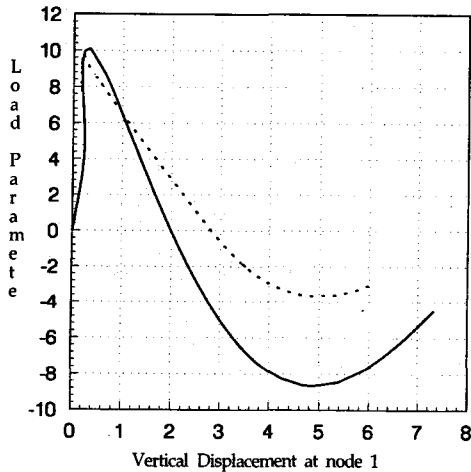
Node	X	Y	Z
1	0.0	0.0	6.0
3	-15.0	25.9807	4.5
4	-30.0	0.0	4.5
9	0.0	60.0	0.0
10	-30.0	51.9615	0.0
11	-51.9615	30.0	0.0
12	-60.0	0.0	0.0

탄소성 거동을 추적하기 위해 $E_T = 0.001E$, $\sigma_y = 40,000N/cm^2$ 로 가정하였다.

그림 9는 구속되지 않은 7개의 절점에 연직방향으로 100N의 하중을 적용했을 때의 평형경로이며 그림 10은 구조물의 정점에서 발생된 탄소성 거동을 나타낸 것이다.



<그림 9> Multiple equilibrium paths



<그림 10> Elasto-plastic behavior

6. 결론

국부좌굴 및 비탄성영역에서 공간트러스구조물의 후좌굴해석이 수행되었으며 탄소성 거동에 대한 이상화된 경화모델은 Isotropic, Kinematic과

Independent rule을 이용하였다. 또한 현재의 비선형해석방법은 비탄성 후좌굴해석 및 기하학적 비선형에 대해 다양한 평형경로를 갖는 공간트러스구조에 대해서도 완벽한 거동을 추적할 수 있음을 입증하였다. 제시된 해석의 타당성을 입증하기 위해 문헌의 결과와 비교하였으며 문헌의 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

참고문헌

1. Powell, G. and Simons, J. (1981), "Improved Iteration Strategy for Nonlinear Structures" Int. J. for Numerical Methods in Engineering., Vol.17., pp.1455-1467.
2. Kim, M.Y., and Chang, S.P. (1990), "Geometric Non-linear Finite Element Analysis of the Space Truss", K.S.S.C., Vol.2, No.1, pp.164-174
3. Hill, C.D. Blanford, G.E., and Wang, S.T. (1989), "Post-Buckling Analysis of Steel Space Trusses" J. Struct. Engrg., ASCE, 115, pp.900-919.
4. Ramesh,G. and Krishnamoorthy, C. S. (1994), "Inelastic Post-Buckling Analysis of Truss Structures by Dynamic Relaxation Method" Int. J. for Numerical Methods in Engineering., Vol.37., pp.3633-3657.
5. Bergan, P.G. et al. (1978), "Solution techniques for non-linear finite element problems" Int. J. for Numerical Methods in Engineering., Vol.12., pp.1677-1696.
6. Crisfield, M. A. (1978), "A Fast Incremental/iterative procedure that handles Snap-Through" Computer & Structures, Vol. 13, pp.55-62.
7. Bellini, P.X. and Chulya, A. (1987), "An Improved Automatic Incremental Algorithm for The Efficient Solution of Nonlinear Finite Element Equations" Computer & Structures., Vol.26, pp.99-110.
8. Chen, W.F. (1991), Structural Plasticity : Theory, Problems, and CAE Software, Springer-Verlag, New York, 1-51