
파라메트릭 사영필터를 이용한 트러스 구조물의 손상 검출

Damage Detection of Truss Structures Using Parametric Projection Filter Theory

문 효 준*
Mun, Hyo-Jun

서 일 교**
Suh, Ill-Gyo

Abstract

In this paper, a study of damage detection for 2-Dimensional Truss Structures using the parametric projection filter theory is presented. Many researchers are interested in inverse problem and one of solution procedures for inverse problems that are very effective is the approach using the filtering algorithm in conjunction with numerical solution methods. In filtering algorithm, the Kalman filtering algorithm is well known and have been applied to many kind of inverse problems. In this paper, the Parametric projection filtering in conjunction with structural analysis is applied to the identification of damages in 2-D truss structures. The natural frequency and modes of damaged truss model are adopted as the measurement data. The effectiveness of proposed method is verified through the numerical examples.

Key words : Parametric projection filter, Inverse problem, Damage Detection, 2-D Truss Structures

1. 서 론

대부분의 구조물들은 외부의 환경과 접해 있으므로, 지진, 바람, 충격 등의 외부 하중에 의해 손상을 입게 된다. 부재의 국부적인 손상은 구조물 전체의 파괴와 연관될 수 있으므로 손상 부위를 사전에 파악하여 적절한 보수 및 보강을 통해 내력을 회복시킴으로서 구조물의 내구연한을 증진시키고 안전성을 확보하는 것이 중요하다. 이러한 측면에서 손상 부위를 추정하는데 역문제(inverse problem)의 해석이 매우 유용하여 최근 많은 관심을 끌고 있다.

역문제 해석법으로서 지금까지 필터이론이 많은 관심을 받아왔다. 특히 칼만 필터(Kalman filter)

^{3),4)}는 신호 · 통신, 시스템 제어 등의 많은 분야에서 적용되어 왔으며 그 유효성이 입증되었다. 그러나 트러스와 같이 부재수가 많은 구조물의 부재 손상 추정에 적용한 결과 많은 문제에서 수렴속도가 늦는 문제점이 지적되었다.^{1),2)}

따라서 본 논문에서는 화상복원 문제 등 많은 역문제에서 그 효용성을 인정받고 있는 사영(projection)필터⁵⁾을 변형한 파라메트릭(parametric) 사영필터⁵⁾을 비선형시스템에 대한 필터로 확장하여 구조물의 손상추정에 적용하여 보다 효율적이고 정밀한 해석이 가능한 역해석법의 개발을 목표로 한다.

대상 손상 추정문제로서 2차원 트러스 구조의 자유 진동 문제를 대상으로 하고 자유진동 시 관측된 고유 진동수와 고유 모드를 관측 데이터로 채택하여 손상부재의 위치를 찾고 손상정도를 추정

* 정회원, 제주대학교 건축공학과 석사과정

** 정회원, 제주대학교 건축학부 부교수, 공학박사

한다. 마지막으로 수치해석 예를 통하여 제안된 해석법의 유효성을 밝힌다.

2. 2차원 트리스 구조물의 손상추정

2.1 확장 파라메트릭 사영필터

확장 파라메트릭 사영(Extended parametric projection)필터 이론⁵⁾은 선형 시스템을 대상으로 하는 파라메트릭 사영필터이론을 비선형 시스템에 적용시킨 필터 이론이며, 다음의 이산시간 확률시스템을 대상으로 한다.

상태방정식

$$z_{t+1} = \phi_t(z_t) + w_t \quad (1)$$

관측방정식

$$y_t = m_t(z_t) + v_t, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

여기서 z_t, y_t, w_t, v_t 는 확률변수 벡터로서 각각 t 시간 스텝에서의 상태벡터, 관측벡터, 시스템 잡음벡터 및 관측 잡음벡터이다. 확률변수 벡터의 통계적 성질을 다음과 같이 가정한다.

$$E\{z_0\} = \bar{z}_0, \quad E\{w_t\} = E\{v_t\} = 0$$

$$E\left\{\begin{pmatrix} w_t \\ v_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_t & v_t \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \delta_{tt}$$

$$E\{(z_0 - \bar{z}_0)(z_0 - \bar{z}_0)^T\} = R_0$$

$$E\{w_t z_0^T\} = E\{v_t z_0^T\} = 0 \quad (t \geq 1) \quad (3)$$

여기서, E 는 기대치 연산기호, δ_{tt} 은 kronecker 델타이며, z_0 는 상태벡터 z_t 의 초기벡터, S, Q, R_0 는 각각 시스템 잡음 공분산 행렬, 관측 잡음 공분산 행렬 및 추정오차 공분산 행렬을 나타낸다. 여기서 $\phi_t(z_t), m_t(z_t)$ 는 비선형 벡터 함수이다. 상태벡터 z_t 에 대해 연속미분 가능하다고 가정한다.

다. 이 가정 하에서 z_t 는 추정량 $\hat{z}_{t+1/t}$ 의 주위에서 테일러(Taylor) 전개하고 고차항을 무시하면 다음과 같이 선형화된 확률 시스템이 얻어진다.

$$z_{t+1} = \Phi_t z_t + w_t + u_t \quad (4)$$

$$\eta_t = M_t z_t + v_t \quad (5)$$

여기서

$$u_t = \phi_t(\hat{z}_{t/t}) - \Phi_t \hat{z}_{t/t} \quad (6)$$

$$\eta_t = y_t - m_t(\hat{z}_{t/t-1}) + M_t \hat{z}_{t/t-1} \quad (7)$$

여기서 Φ_t 는 상태 遷移행렬(state transition matrix), M_t 는 관측행렬(observation matrix)로 기지의 확정행렬로 한다.

이상으로부터 비선형 시스템을 선형화함으로써 얻어진 식(4)와 (5)로써 나타낸 시스템에 대한 확장 파라메트릭 사영필터는 다음과 같다.

< 필터방정식 >

$$\hat{z}_{t/t} = \hat{z}_{t/t-1} + B_t [y_t - m_t(\hat{z}_{t/t-1})] \quad (8)$$

$$\hat{z}_{t+1/t} = \Phi_t(\hat{z}_{t/t}) \quad (9)$$

< Filter Gain >

$$B_t = M_t^T (M_t M_t^T + \gamma Q_t)^{-1}, \quad \gamma > 0 \quad (10)$$

< 추정오차의 공분산 행렬방정식 >

$$\hat{R}_{t/t} = \hat{R}_{t/t-1} + B_t (M_t \hat{R}_{t/t-1} M_t^T + Q_t) B_t^T - B_t M_t \hat{R}_{t/t-1} - \hat{R}_{t/t-1} M_t^T B_t^T \quad (11)$$

$$\hat{R}_{t+1/t} = \Phi_t \hat{R}_{t/t} \Phi_t^T + S_t \quad (12)$$

< 초기조건 >

$$\hat{z}_{0/-1} = \bar{z}_0, \quad \hat{R}_{0/-1} = R_0 \quad (13)$$

여기서 $\hat{z}_{t/t}$ 는 t 스텝에서의 관측벡터 y_t 에 의해

얻어지는 z_t 의 추정치이고, γ 는 추정치의 최량근사 부분과 잡음부분 간의 균형을 조정하는 파라미터이다. $\hat{R}_{t/t}$ 는 $\hat{z}_{t/t}$ 의 추정오차 공분산행렬이다. 식(10)에서 알 수 있듯이 파라메트릭 사영필터에는 칼만 필터와 달리 Filter gain에 공분산 행렬 $\hat{R}_{t/t}$ 가 포함되어 있지 않다.

2.2 감도행렬의 계산

선형화에 대응하는 감도행렬 M_t 는 다음과 같다.

$$M_t = \left(\frac{\partial m_t(z_t)}{\partial z_t} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z_1}, \frac{\partial y_1}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial y_1}{\partial z_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial z_1}, \frac{\partial y_2}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial y_2}{\partial z_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial z_1}, \frac{\partial y_m}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial y_m}{\partial z_n} \end{pmatrix} \quad (14)$$

식(14)은 각 스텝의 z_t 에 의존하기 때문에 필터링 과정에서 반복 계산되어야 한다. 감도행렬의 성분은 다음과 같은 차분근사에 의해 구하였다.

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial z_i} \right) \cong \frac{1}{\Delta z_i} \{ y_i(z_1, z_2, \dots, z_j + \Delta z_j, \dots, z_n) - y_i(z_1, z_2, \dots, z_j, \dots, z_n) \} \quad (15)$$

2.3 파라메타 γ 의 계산

파라메트릭 사영필터를 사용한 경우 상태량을 추정하는 과정은 식(8)과 식(10)에 의해서 이루어지며 칼만 필터계인 과는 달리 추정오차 공분산행렬 R_t 의 영향을 받지 않는다. 식(8)은 기울기가 B_t 인 직선 식으로 생각할 수 있고 이 기울기를 결정하는 것은 γ 임을 알 수 있다. 파라메타 γ 는 다음과 같은 식을 통해 이루어진다.

$$\hat{z}_{t/t-1} = B_t m_t(\hat{z}_{t/t-1}) \quad (16)$$

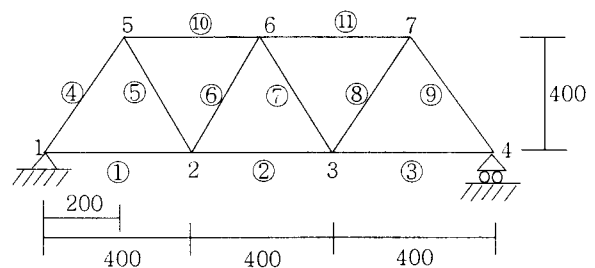
$$\gamma Q_t (M_t M_t^T)^{-1} M_t \hat{z}_{t/t-1} = m_t(\hat{z}_{t/t-1}) - M_t \hat{z}_{t/t-1} \quad (17)$$

구조물의 강성과 고유 진동수의 관계는 비선형관계이므로 뉴턴(Newton)의 선형보간법(linear interpolation)을 적용하여 식(8)을 원점(0, 0)과 추정된 점($y_{t/t}, z_{t/t}$)을 지나는 직선 식으로 식(16)과 같이 나타낼 수 있다. 이를 정리하면 식(17)과 같이 나타낼 수 있고 γ 을 계산할 수 있다. 이로써 B_t 을 결정할 수 있고 식(8)을 통해 다시 새로운 상태량을 추정할 수 있다. 따라서 반복 계산할 때마다 γ 는 상태량을 추정하기 위해 적절하게 변화한다. 이를 반복계산하면 관측 벡터 y_t 에 대한 상태량을 추정할 수 있다.

3. 수치해석 예

3.1 해석예제 1 - 모델 1

[그림 1]의 트러스 구조물을 해석 대상으로 하며 단면적 $A = 10cm^2$, 영계수 $E = 2.1 \times 10^6 kgf/cm^2$, 밀도 $\rho = 0.00787kg/cm^3$ 이다. 관측 데이터는 일반적으로 구조물의 진동을 모니터링해서 얻은 계측 데이터를 사용해야 하나 본 논문에서는 순해석에 의한 수치해를 측정 데이터로 사용하였다. 관측 데이터로서 고유진동수는 1차에서 6차까지의 6개의 고유 진동수와 1차 고유 모드에서 절점 2, 3의 x, y 방향 모드를 채택하였다. 채택하였다. 강성저하를 판단하는 강성비는 '손상 후 강성/손상 전 강성'으로 표시한다.



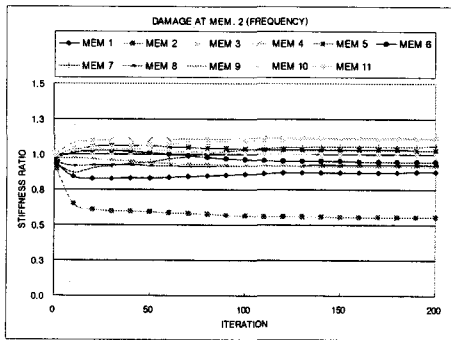
<그림 1> 해석 모델 1

본 모델에서는 [표 1] 에서와 같이 5가지의 손상 상태를 가정하였다. CASE 1 ~ CASE 3은 단일 부재 손상인 경우로서 부재 ②, ⑤ 그리고 ⑪이 각각 50%씩 손상된 경우이고 CASE4 ~ CASE5는 복수 부재 손상인 경우로서 부재 ②, ⑪ 이 각각 50%씩 손상되고 ②, ⑤, ⑪ 이 각각 30%, 50%, 70%씩 손상된 경우를 나타낸다.

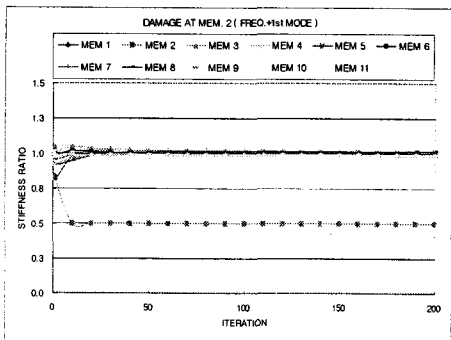
<표 1> Assumed damage rate

CASE	DAMAGED MEMBER		
	NO. 2	NO. 5	NO. 11
1	50%		
2		50%	
3			50%
4	50%		50%
5	30%	50%	70%

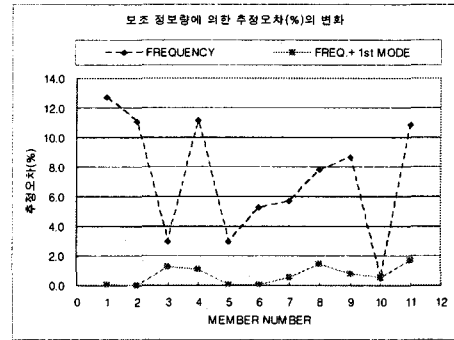
손상추정을 위한 확률분포로 관측 잡음은 관측치의 30%를 표준편차로 하는 분포로 가정하고 초기 조건으로 정상시의 강성을 초기 상태벡터로 한다. 또 감도행렬 계산을 위한 초기치는 정상시의 30%의 손상을 가정한다.



(a) Frequency



(b) Freq. + 1st Mode



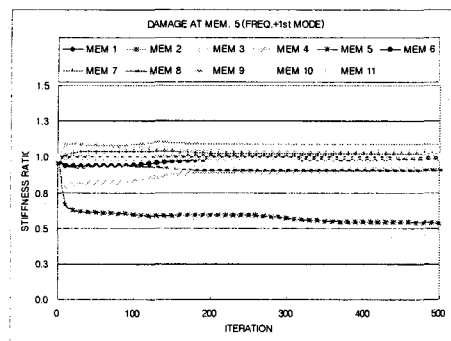
(c) 보조 정보량에 의한 추정오차의 변화

<그림 2> Case 1의 추정정도 변화

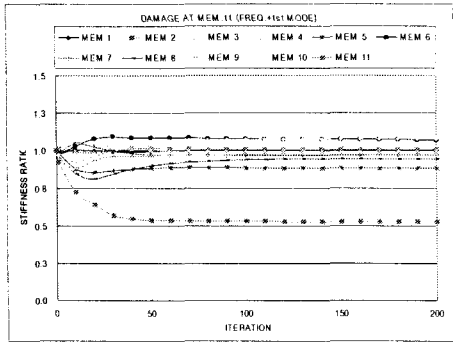
[그림 1]은 Case 1의 경우로 부재 ②번이 50% 손상된 경우를 나타낸다. 여기서 가로축은 반복계산 횟수를 나타내고 세로축은 손상전의 강성에 대한 추정된 강성의 비를 나타낸다. [그림 1]의 (a)는 고유 진동수만을 데이터로 이용한 경우로서 손상된 부재뿐만 아니라 다른 부재의 추정에 있어서 오차가 있음을 볼 수 있다. 그러나 [그림 1]의 (b)는 보조 정보량으로 1차 고유 모드를 추가한 경우로서 손상된 부재뿐만 아니라 다른 부재의 추정이 매우 안정되게 수렴하고 손상 정도와 손상 위치를 잘 추정하고 있는 것을 볼 수 있다. [그림 1]의 (c)는 (a)와 (b)의 경우의 각 부재별 추정 오차를 나타내며 다음과 같이 평가하였다.

$$\text{추정오차(\%)} = \left| \frac{z_t - \hat{z}_t}{z_t} \right| \times 100$$

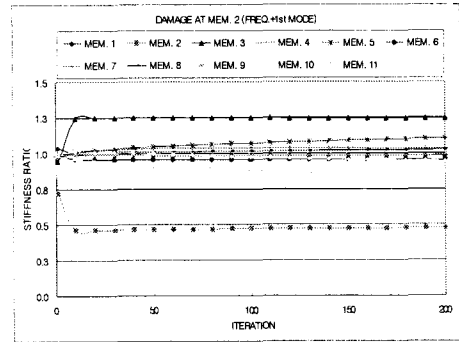
여기서 z_t 와 \hat{z}_t 는 각각 부재의 실제 강성값과 추정한 강성값을 나타낸다.



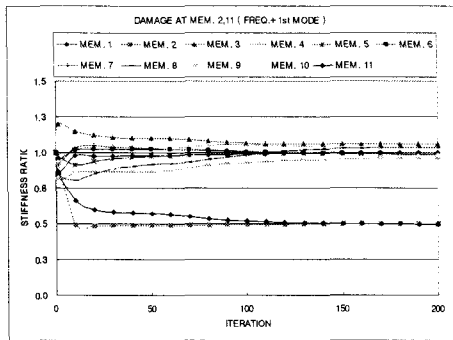
(a) Case 2



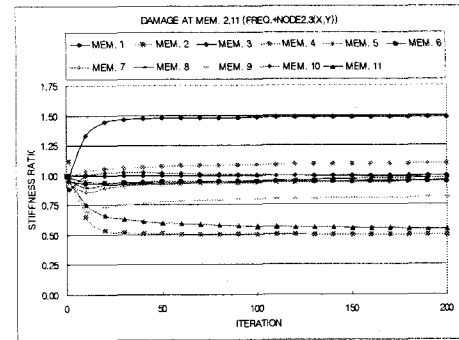
(b) Case 3



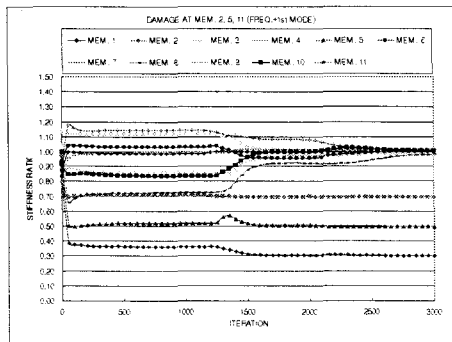
(a) Case 1



(c) Case 4

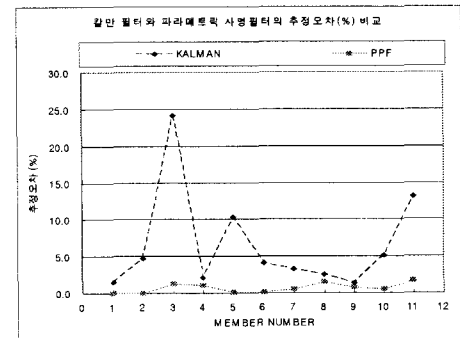


(b) Case 4

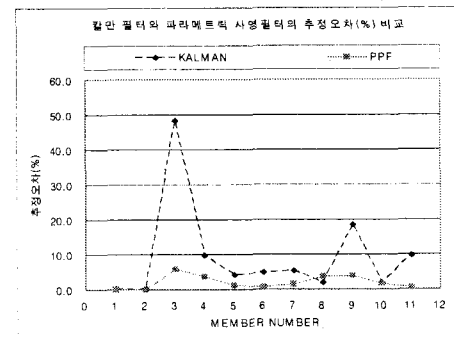


(d) Case 5

<그림 4> 칼만 필터에 의한 손상 추정



(a) Case 1



(b) Case 4

<그림 3> 고유 진동수와 1차 고유모드에 의한 손상추정 결과

[그림 3]은 Case 2 ~ Case 5 의 경우로서 고유 진동수에 1차 고유 모드를 추가한 경우의 추정 정도를 나타내고 있다. 단일 부재 손상인 경우 Case 2와 Case 3은 안정적으로 수렴은 하나 다른 부재들의 추정에 오차가 있음을 볼 수 있다. 복수 부재 손상인 경우 Case 4와 Case 5는 손상된 부재와 다른 부재들의 상태량을 잘 추정하지만 단일 부재에 비해 추정 속도가 느리고 추정 과정이 불안정한 것을 볼 수 있다.

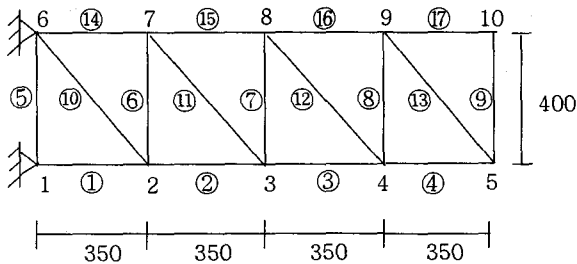
<그림 5> 칼만 필터와 파라메트릭 사영필터의 추정오차 비교

[그림 4] 은 Case 1 과 Case 4의 경우를 칼만 필터로 이용하여 실행한 결과이다. 손상된 부재의 상태량의 추정은 잘 이루어지나 다른 부재들의 상태량의 추정에 있어서 오차가 큼을 알 수 있다.

[그림 5] 은 Case 1 과 Case 4의 경우를 칼만 필터와 파라메트릭 사영필터로 실행한 결과의 추정 오차를 나타낸다. 파라메트릭 사영필터로 추정한 결과가 칼만 필터로 추정한 결과보다 오차가 작고 상태량을 잘 추정하는 것을 볼 수 있다.

3.2 해석예제 2 - 모델 2

[그림 6]에 나타난 모델 2는 모델 1과 마찬가지로 단면적 $A = 10cm^2$, 영계수 $E = 2.1 \times 10^6 kgf/cm^2$, 밀도 $\rho = 0.00787kg/cm^3$ 이다. 관측 데이터로서 고유진동수는 1차에서 6차까지의 6개의 고유 진동수와 1차 고유 모드에서 절점 2, 3, 4, 5 의 y 방향 모드를 채택하였다.



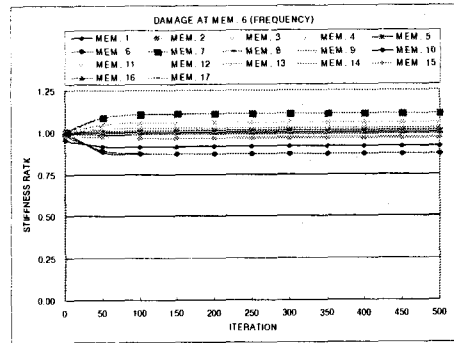
<그림 6> 해석 모델 2

본 모델2 에서도 모델1과 마찬가지로 5가지의 손상 상태를 가정하였다. CASE 1 ~ CASE 3은 단일 부재 손상인 경우로서 부재 ⑥, ⑫ 그리고 ⑮가 각각 50%씩 손상된 경우이고 CASE 4 와 CASE 5는 복수 부재 손상인 경우로서 각각 부재 ⑥, ⑫ 와 ⑥, ⑫, ⑮ 가 50%씩 손상된 경우를 나타낸다.

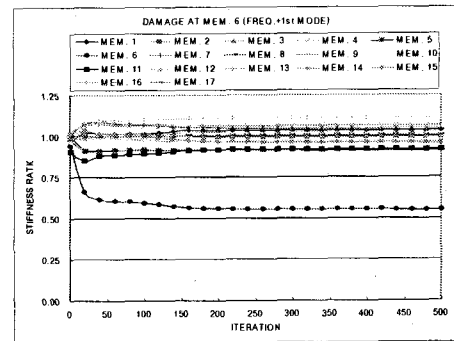
<표 2> Assumed damage rate

CASE	DAMAGED MEMBER		
	NO. 6	NO. 12	NO. 15
1	50%		
2		50%	
3			50%
4	50%	50%	
5	50%	50%	50%

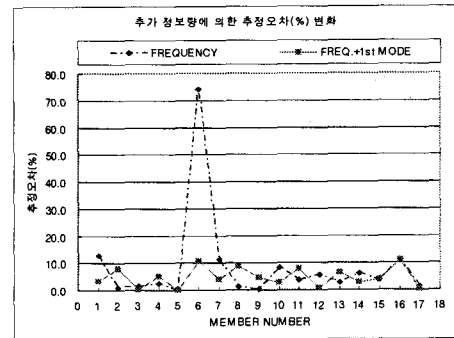
손상 추정을 위한 확률 분포의 가정은 모델 1과 같다.



(a) Frequency



(b) Freq. + 1st Mode

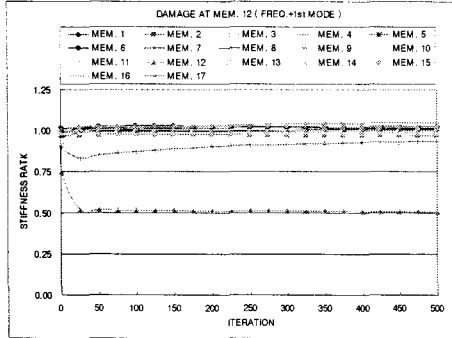


(c) 보조 정보량에 의한 추정오차의 변화

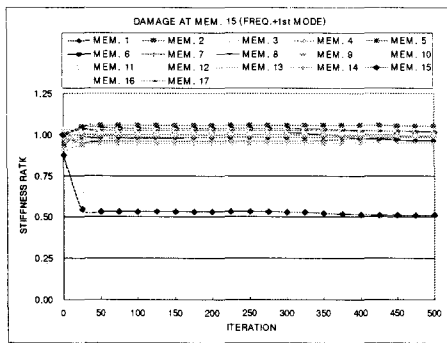
<그림 7> Case 1의 추정정도 변화

[그림 7]은 Case 1의 경우로 부재 ⑥이 50% 손상된 경우이다. [그림 7]의 (a)는 고유 진동수만을 데이터로 사용한 경우로서 손상된 부재뿐만 아니라 다른 부재들의 상태량의 추정이 잘 이루어지지 않음을 볼 수 있다. 그러나 [그림 7]의 (b)는 보조 정보량으로 1차 고유 모드를 추가한 경우로서 손상된 부재와 다른 부재들은 안정적으로 추정하지만 오차가 있음을 볼 수 있다. 1차 고유 모드의 추가에 따른 추정오차의 크기는 [그림 7]의 (c)에서 볼 수 있듯이 고유 진동수만을 데이터로 사용한 경우

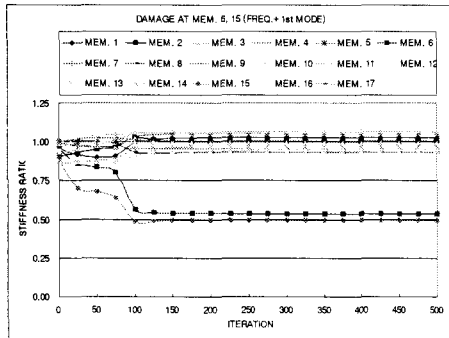
와 비교해 볼 때 다른 부재들의 상태량의 추정 오차는 거의 같으나 손상된 부재의 추정에 있어서는 오차가 많이 줄어든 것을 볼 수 있다.



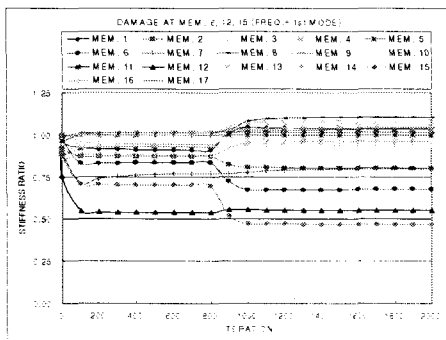
(a) Case 2



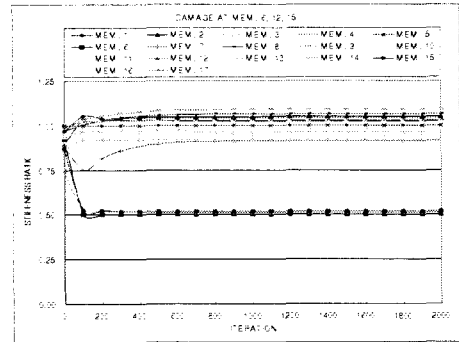
(b) Case 3



(c) Case 4

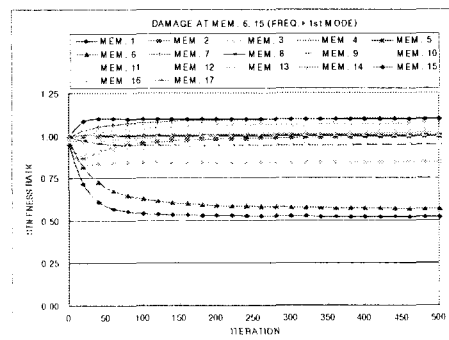


(d) Case 5



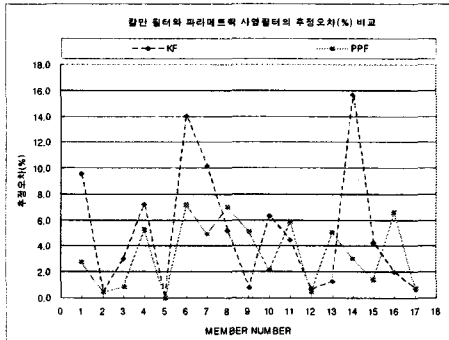
<그림 9> Case 5에 절점 7의 y 방향 모드를 추가한 경우

[그림 8]은 Case 2 ~ Case 5의 경우로 고유 진동수에 보조 정보량으로서 1차 고유 모드를 추가한 경우의 추정 정도를 나타내고 있다. 단일 부재 손상인 경우 Case 2와 Case 3은 다른 부재의 상태량의 추정에 다소 오차가 있기는 하지만 손상된 부재의 상태량의 추정에 있어서는 손상정도와 손상 위치를 안정적으로 잘 추정하는 것을 볼 수 있다. 복수 부재 손상인 경우 Case 4는 초기 추정 과정에서 다소 불안정한 면을 보였지만, 이후 손상된 부재뿐만 아니라 다른 부재의 상태량의 추정 정도가 좋음을 볼 수 있다. Case 5의 경우는 추정 과정이 불안정하고 손상된 부재와 다른 부재들의 상태량의 추정이 잘 이루어지지 않음을 볼 수 있다. 그러나 추가 정보량으로 절점 7의 y방향 모드를 추가한 경우 추정 과정이 안정적이며 다른 부재들의 추정에 오차가 있기는 하지만 손상된 부재의 상태량의 추정이 잘 이루어지는 것을 볼 수 있다. 이는 데이터의 개수에 따라 추정의 정확성이 높아질 수 있음을 보여주는 경우라 할 수 있다.



(a) 칼만 필터에 의한 손상 추정

<그림 8> 고유 진동수와 1차 고유모드에 의한 손상추정 결과



(b) 칼만 필터와 파라메트릭 사영필터의 추정오차 비교

<그림 10> Case 4를 칼만 필터로 추정된 결과와 파라메트릭 사영필터와의 오차 비교

[그림 10] 은 Case 4의 경우를 칼만 필터를 이용하여 실행한 결과와 파라메트릭 사영필터와의 추정 오차를 비교한 것이다. 파라메트릭 사영필터를 이용한 경우가 칼만 필터보다 수렴속도가 빠르고 안정적이며 부재의 상태량의 추정오차가 작음을 볼 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 파라메트릭 사영필터를 비선형 시스템에 대한 필터로 확장한 확장 파라메트릭 사영필터를 적용하여 구조물의 손상 추정을 위한 역해석법을 제안하였다. 먼저 선형 시스템에 대한 파라메트릭 사영필터에서 비선형 시스템에 대한 확장 파라메트릭 사영필터를 유도하였고 파라메트릭 사영필터를 이용한 손상 추정 역해석법 알고리즘을 제시하였다. 제안 해법의 유효성을 보이기 위해 2차원 트러스 구조물의 자유진동문제를 대상으로 하여 해석 예를 보였다.

2차원 트러스 모델은 대칭 구조물과 비대칭 구조물을 제시하였고 2개의 모델에 제안 해법을 적용하였다. 고유 진동수만을 데이터로 이용한 경우보다 보조 정보량으로 1차 고유 모드를 추가한 경우가 상태량의 추정 정도가 좋았고 추정 오차가 줄어드는 것을 볼 수 있었다. 단일 부재 손상인 경우에는 손상 정도와 손상 위치를 잘 추정하였다. 복수 부재 손상인 경우에는 손상 위치와 손상 정도

를 잘 추정하지만 추정 과정이 불안정한 경우도 있었다. 모델 2의 Case 5 같은 경우에는 상태량의 추정 정도가 좋지 않았지만 정보량을 늘린 경우 추정 정도 좋고 오차가 많이 줄어든 것을 볼 수 있었다. 또한 칼만 필터를 이용한 결과와 비교한 경우 파라메트릭 사영필터가 상태량의 추정이 안정적이고 빠르며 오차가 작음을 볼 수 있었다.

본 연구는 2차원 트러스 구조에 대한 결과만 다루었으나 추후 3차원 구조물에 대한 적용성과 다양한 관측데이터의 적용에 따른 상태량의 거동에 대해 연구할 예정이다.

참고문헌

1. 서일교, 1999, 확장 칼만 필터를 이용한 2차원 트러스 구조물의 손상추정, 대한건축학회 논문집, 제 15권 4호, pp. 3 - 12
2. 서일교, 임은지, 은희창, 2002, 사영필터이론을 이용한 트러스 구조물의 손상 검출, 濟州大學校 尖端技術研究所 論文集, 第13卷 1號, pp. 148 - 154
3. 片山 徹, 1983, 應用カルマンフィルタ, 朝倉書店
4. 西山 清, パソコンで解くカルマンフィルタ, 丸善株式會社, 1994
5. 小川英光, 1988, 信號と 畫像の 復元[III] (最適復元のための射影フィルタ族), 電子情報通信學會論文集, Vol. 71, No 7, pp. 739-748