이항트리에서 S-에지번호 매김

김 용 석
서남대학교 컴퓨터정보통신학과
전화 : 063-620-0147 / 핸드폰 : 011-9045-9801

The S-Edge Numbering on Binomial trees

Yong-Seok Kim
Dept. of Computer Science and Communications, Seonam University
E-mail : yskim@seonam.ac.kr

Abstract

We present a novel graph labeling problem called S-edge labeling. The constraint in this labeling is placed on the allowable edge label which is the difference between the labels of endvertices of an edge. Each edge label should be $\{ a_n \mid a_n = 4a_{n-1}+1,\ a_{n-1}=0\}$. We show that every binomial tree is possible S-edge labeling by giving labeling schems to them. The labelings on the binomial trees are applied to their embedings into interconnection networks.

1. 서 론

대규모 계산수행을 필요로 하는 문제들의 대부분은 동시에 처리될 수 있는 더 작은 문제들로 분할될 수 있으며 분할된 문제들은 병렬처리 컴퓨터의 각 프로세서에서 병렬적으로 수행된다. 이러한 병렬 알고리즘의 시간 복잡도는 계산시간과 통신시간으로 나눌 수 있다. 계산시간은 각 프로세서에서 순차 프로그램을 수행하는데 걸리는 시간이며 통신시간은 프로세서들 사이에 데이터를 통신하는데 걸리는 시간이다. 프로세서의 성능이 증가하면서, 계산시간보다는 통신시간이 병렬 알고리즘에 미치는 영향이 더욱 커져 가고 있다. 방송은 상호연결망을 위한 가장 기본적인 데이터 통신 기법이며 병렬 알고리즘을 설계하는데 있어서 가장 기본이 되는 작업으로 한 프로세서에 있는 메시지를 네트워크에 있는 다른 모든 프로세서들에게 보내는 과정을 말한다. 효율적인 통신방법은 시스템의 고성능을 얻기위해 매우 중요하다.의 노드 v 에서 방송시간은 $b(v)$ 로 표기하고, 이는 노드 v 에서 시작한 방송을 완료하는데 필요한 최소 단위시간을 말한다. 단일포트 통신모델에서는 각 단위시간 동안 메시지를 가지고 있는 노드의 수는 많아야 두배씩 증가하므로, N 개의 노드를 가지는 그래프 G 의 임의의 노드 v 에서의 방송시간 $b(v) \geq \lceil \log_2 N \rceil$ 이다. N 개의 노드를 가지는 그래프 G 의 임의의 노드 v 에서의 방송시간 $b(v)$ 가 $\lceil \log_2 N \rceil$ 이면 이는 단일포트 통신모델에서 최소방송시간이며 최소방송시간을 가지는 방송을 최적방송이라 한다. 또한 루트에서 시작하여 최적방송이 가능한 트리를 최적방송트리(optimal broadcast tree)라 한다. 단일포트 통신모델에서 2^k 개의 노드를 가진 최적방송트리는 이항트리이다. 만약 노드 대칭적인 상호 연결망이 스패닝 부그래프로 이항트리를 갖는다면 그 상호연결망의 어떠한 노드도 이항트리의 루트가 되도록 스패닝 트리를 구성할 수 있다. 즉 단일포트 통신모델에서 그 상호연결망의 어떠한 노드에서도 스패닝 트리인 이항트리의 구조를 통해 최소시간에 방송을 완료할 수 있다. 이항트리는 하이퍼큐브와 같은 다양한 시스템에서 병

렬 응용을 위해서 가장 자주 사용되는 스패닝트리 구조중의 하나이다. 또한 병렬 분할정복 알고리즘의 이상적인 계산구조로 평가된다. 이항트리는 전위계산에 사용될 뿐만아니라 데이터 방송에 폭넓게 사용되어진다.

그래프 H 가 G 의 모든 노드를 포함하고 G 의 에지들로만 구성된 그래프이면 ($V(H)=V(G)$, $E(H)\subseteq E(G)$) 그래프 H 는 그래프 G 의 스패닝 부그래프이다. 만약 위 조건을 만족하는 H 트리이면 그래프 G 의 스패닝 트리라 한다. 그래프 G 에 속한 어떤 노드(에지)에서도 G 가 똑같이 보일 때 G 는 노드(에지) 대칭적이라 한다. 즉 그래프의 임의의 두 노드(에지) v 와 w 에 대해서 v 를 w 에 대응시키는 자기동형(automorphism)이 존재하면 그 그래프는 노드(에지) 대칭적이다.
여기서 어떤 그래프의 자기동형은 그래프 자신으로의 동형이성(isomorphism)이다. 동형이성은 두 그래프 G 와 G^* 의 노드집합 사이의 전단사 사상 h 로서, 이는 (v_i, v_j) 가 G 의 에지이면 $(h(v_i), h(v_j))$ 도 G^* 의 에지가 되는 성질을 갖고 있다. 이 경우 두 그래프 G 와 G^* 는 서로 동형적(isomorphic)이라 한다. 만약 T 가 노드 대칭적인 그래프 G 의 스패닝 트리라 한다면, 그래프 G 의 어떠한 노드도 T 의 루트가 되도록 스패닝 트리를 구성할 수 있다. 그래프 G 에 대한 번호매김이란 G 의 모든 노드들에 대해 서로 다른 정수 $\{1,2,\cdots|V|\}$ 를 일대일 대응시키는 것을 말한다. 그래프의 각 에지는 이러한 번호매김으로부터 얻을 수 있는 에지번호를 갖는다. 에지번호는 그 에지의 양끝 노드에 할당된 정수값의 차이이다. 그래프 G 에 대한 S-에지번호매김이란 에지번호가 $S_i=(4^i-1)/3$, $1\le i\le k$, $1\le k\le \lfloor(\log_2)/2\rfloor$ 차이나게 번호매김된 것이다. 그림 1. 에서와 같이 점프열이 S_i 인 상호연결망의 일종인 시그마 원형군의 예가 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는이항트리 대해서 살펴본다. 제 3장에서는 S-에지번호매김에 대해서 살펴본다. 마지막으로제 4장에서는 결론을 맺고 추후 연구 방향을 살펴본다.

2 이항트리

이항트리는 병렬망에서 매시지 방송과 병합우선순위

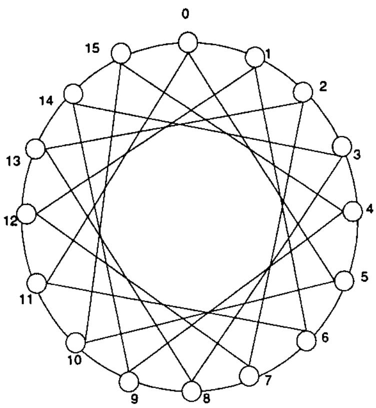


그림 1 시그마원형군의 예

큐를 구현하는데 중요한 역할을 한다. 이항트리는 다음과 같이 정의한다.

정의 1 이항트리 B_k

(1)하나의 정점을 갖는 이항트리는 B_0 이다.

(2) T_l 과 T_r 이 서로 분할된 B_{k-1}, $k\ge 1$ 이라고 하면 B_k 는 T_l 의 루트가 T_r 루트의 최좌측 자식이 되게 에지를 하나 추가함으로써 만들어진다.

정의 1에 의하면 B_k 는 2^k 개의 정점을 갖는다. 이항트리의 간단한 몇가지 경우와 S-에지번호매김의 예가 그림 1에 있다.

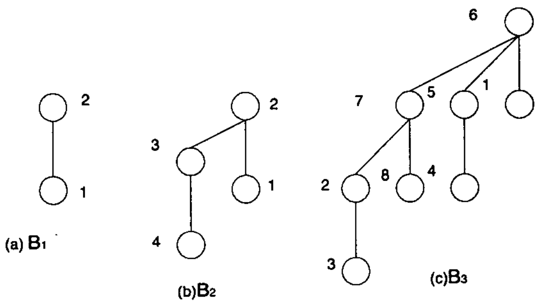


그림 1 이항트리에서의 S-에지 번호매김의 예

3 S-에지번호매김

그래프 $G(V,E)$ 에서 번호매김은 정점들의 집합에 양의 정수를 일대일 대응시킨다. 본 논문에서 고려하는 양의 정수들은 정점들의 집합에 일대일 대응된 $\{1,2\cdots,|V|\}$ 이다. 그래프의 각 에지는 번호매김에 의해 유도된 에지번호이다. 이러한 에지들의 에지번호는 그 에지의 양끝정점번호들 사이의 절대차이다.

본 논문에서 정해진 에지번호만을 갖는 제약조건의 새로운 그래프 번호매김 문제를 제안한다. 임의의 그래프 G 에서 S-에지번호 매김은 에지번호들의 집합이 $\{ a_n \mid a_n = 4a_{n-1} + 1,\ a_0 = 0, n \ge 1 \}$ 의 부분집합이 된다. 이때 각 에지번호는 $\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} 4^i \right\}$ 의 부분집합이 된다.

임의의 이항트리에서 S-에지번호 매김은 B_1 과 B_2 에서는 간단하다. 그림 2의 예에서와 같이 B_1 과 B_2 는 선형적이므로 $a_1 = 4a_0 + 1 = 1$ 인 에지번호만을 사용하여 번호매김을 얻을 수 있다. 그러나 B_3 는 주요하다. 이것은 S-에지번호매김을 하는데 기본형태가 된다. 편의를 위해 각 정점들을 임의로 번호매김하는 대신에 연속적인 위치로 선형배열하고 각 정점들의 위치에 왼쪽에서 오른쪽으로 1부터 번호매김을 했다. B_3 의 경우에 정점들의 개수가 2^3 이므로 정점번호는 $1, 2, \cdots, 2^3$ 이 사용된다.

정의 2 B_3 의 선형배열에서 $\sigma(k)$ -형태는 정점번호가 1 에서 3 인 양그룹(Male Group)과 4에서 8까지인 음그룹(Female Group)으로 구성된다.

정의 3 B_3 의 선형배열에서 $\sigma(k)$ -형태는 MG에서 정점번호 2는 음(female)노드이고 나머지는 양(male)노드이며 FG에서는 정점번호 4와 8은 양노드이고 나머지는 음노드이다.

$\sigma(k)$ -형태에 대한 예는 다음 그림 3에 나타나있다.

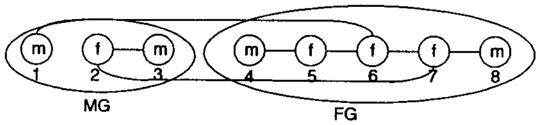
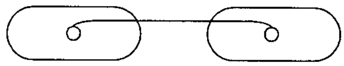


그림 3 $\sigma(k)$ -형태에 대한 예

그림 3에서와 같이 모든 음노드들은 양노드들과 서로 인접하다. 즉 양그룹의 노드번호2인 음노드는 같은 그룹의 양노드인 노드번호3과 인접하고 음그룹의 노드번호5인 음노드는 같은 그룹의 양노드인 노드번호4와 인접하다. 그러나 특이하게도 음그룹의 노드번호6인 여왕노드는 다른 그룹인 양그룹의 양노드인 노드번호1과 인접하고 같은 그룹의 음노드들인 노드번호5와 7과도 인접하다. 그리고 부여왕 노드인 노드번호7도 같은그룹의 양노드인 노드번호8과 인접하고 다른그룹인 양그룹의 음노드인 노드번호2와 인접하다. 반면에 양그룹의 킹노드인 노드번호1은 음그룹의 여왕노드하고만 인접하다.

이러한 성질은 여왕노드는 B_3 의 오른쪽 부트리의 루트노드와 전체루트노드가 되고 부여왕노드는 B_3 의 왼쪽 부트리의 루트노드가 된다. 그리고 모든 음노드는 양노드와 인접하다. 즉 노드번호2와 3이 인접하고 노드번호7과8, 4와5 그리고 킹노드와 여왕노드가 인접하다. 여기에서 여왕노드는 같은 그룹내에 인접한 양노드는 없고 대신에 두개의 음노드들과 인접하다 반면에 부여왕 노드는 같은 그룹내에서 양노드와 인접하고 다른 그룹내의 음노드와 인접하다. 그러나 양그룹의 양노드인 킹노드는 오직 여왕노드하고만 인접하다. 그러므로 외부에지는 여왕노드가 킹노드와 인접할 때와 부여왕노드가 다른 그룹내의 음노드와 인접할 경우에만 존재하게 된다.

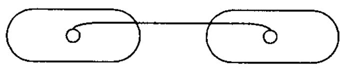
이러한 B_3 에서의 $\sigma(k)$ -형태와 B_4 에서는 그림 4와 같이 $\sigma(k)$ -형태와 $\sigma(k)$ -형태의 역선형배열인 $\sigma(k)'$ -형태가 연속적으로 위치한다.



$\sigma(k)$ -형태 $\sigma(k)'$ -형태

그림 4 B_{2m+2} 의 예

B_4 에서의 B_{2m+2} -형태는 B_5 에서는 그림 5와 같이 B_{2m+2} -형태와 B_{2m+2} -형태가 연속적으로 위치한다.



B_{2m+2} B_{2m+2}

그림 5 B_{2m+3} 의 예

4.결론

노드 대칭적인 상호 연결망이 스패닝 부그래프로 이항트리를 갖는다면 그 상호연결망의 어떠한 노드도 이항트리의 루트가 되도록 스패닝 트리를 구성할 수 있다. 즉 단일포트 통신모델에서 그 상호연결망의 어떠한 노드에서도 스패닝 트리인 이항트리의 구조를 통해 최소시간에 방송을 완료할 수 있다. 이항트리는 하이퍼큐브와 같은 다양한 시스템에서 병렬 응용을 위해서 가장 자주 사용되는 스패닝트리 구조중의 하나이다. 또

한 병렬 분할정복 알고리즘의 이상적인 계산구조로 평가된다. 이항트리는 전위계산에 사용될 뿐만아니라 데이터 방송에 폭넓게 사용되어진다.

본 논문에서는 이항트리가 S-에지번호 매김이 가능하다는 것을 보임으로써 이항트리를 스패닝 부그래프로 포함하는 상호연결망을 설계할 수 있다. 향후 연구과제로서는 이러한 상호연결망들의 망척도 면에서의 상호비교가 필요하다.

5. 참고문헌

[1]L. H. harper, "Optimal assignment of numbers to vertices," J. Soc. Indust. Appl. Meth. 12 (1964) pp. 131-135.

[2]L. H. harper, "Optimal numbering and isoperimetric problems on graph," J. Combiantorial Theory 1 (1966) pp. 385-393.

[3]S. W. Golomb,"How to number a graph," Graph Theory and Computing, Academic Press, New York (1972) pp. 23-37.

[4]Y. -S. Kim and H.-S. Lim "Sigma Connection Networks with Low Diameter and with Low Node Degre," JTC_CSCC'95 (1995) pp. 2229-232.

[5]S. N. Bhatt, F. R. K. Chung, F.T. Leighton, and A. L. Rosenberg, "Efficient embeddingof trees in hypercubes," SIAM J. Comput. 21 (199) pp. 151-162.

[6]F. T. Leighton, Introduction to parrallel algorithms and architectures:arrays, trees, hypercubes, Morgan Kaufmann publishers, San Mateo, California, 1992

[7]B. Monien and I. Sudborough, "Simulating binary tree s on hypercubes," VLSI Algorithms and Architectures, Lecture Notes in Computer Science 319, Springer-Verlag, Berlin, New York (1989) pp. 503-520.

[8]A. Wagner, "Embedding arbitrary binary trees in a hypercubes," J. Parrallel and Distrib. Compt. 7 (1989) pp. 503-520.