

후위순회 피보나치 원형군에 대한 임베딩

김 용 석, 권 승 탁

서남대학교 컴퓨터정보통신학과

전화 : 063-620-0147 / 핸드폰 : 011-9045-9801

The Embeddings on Postorder Fibonacci Circulants

Yong-Seok Kim, Seung-Tak Kwon

Dept. of Computer Science and Communications, Seonam University

E-mail : yskim@seonam.ac.kr

Abstract

In this paper, we consider the embedding problem of postorder Fibonacci circulants. We show that Fibonacci cubes and Hypercube are a subgraph of postorder Fibonacci circulants. And the postorder Fibonacci circulants of order n can be embedded into the Fibonacci cubes of order n with expansion 1, dilation $n-2$ and congestion $O(n-1)$, the Hypercube of order $n-2$ with expansion $\frac{f_n}{2^{n-2}}$, dilation $n-2$ and congestion $O(n-2)$.

I. 서론

최근의 컴퓨터 시스템은 하드웨어 기술의 발달과 함께 단일 프로세서 중심의 처리 구조에서 여러개의 프로세서를 상호 연결하여 처리하는 병렬처리 컴퓨터 구조로 발전해 가고 있다[1-6]. 이와 같은 컴퓨터 구조에 있는 분을 차지하게 되는데, 이러한 상호 연결망으로는 선형 배열, 링, 메쉬, 트리, 하이퍼큐브, 피보나치 큐브, 피보나치 원형군등이 있다. 특히 후위순회 피보나치 원형군은 노드 수와 분지수가 피보나치 큐브[7-9]와 같지만 지름은 피보나치 큐브가 $n-2$ 인 반면에

피보나치 원형군은 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 으로 그리고 비대칭적인 위상이 노드 대칭적인 위상으로 개선되었다. 여기에서 지름은 연결망에서 임의의 두 노드간의 최대 거리인데, 이는 연결망 전체에 정보를 전파하는데 드는 지연 시간의 하한값이다. 그리고 노드 대칭성은 라우팅에서 노드 밀집률을 줄이는 요인이된다. 또한 노드 대칭성이 있는 연결망으로 병렬 컴퓨터를 설계할 때는 모든 노드가 같은 역할을 수행하므로 한가지 종류의 처리기만 있으면 된다.

후위순회 피보나치 원형군에서 특정한 자료 구조나 계산 구조를 기반으로 하는 작업을 쉽게 처리하기 위해서는 그러한 자료 구조나 계산 구조를 후위순회 피보나치 원형군으로 사상하는 효율적인 방법이 필요하다. 이러한 사상을 임베딩(embedding)이라 하며 그래프 G 의 그래프 H 에 대한 임베딩 $f=(\phi, \rho)$ 는 다음과 같이 정의한다. ϕ 는 G 의 정점 v 에서 H 의 정점 $\phi(v)$ 로의 함수이고, ρ 는 G 의 에지 $e=(v, w)$ 에서 $\phi(v)$ 와 $\phi(w)$ 를 잇는 H 의 경로 $\rho(e)$ 로의 함수이다. 임베딩의 비용을 측정하는 척도로는 연장률(dilation), 밀집률(congestion), 확장률(expansion) 등이 있다. G 의 에지 e 의 연장률은 H 상에서의 경로 $\rho(e)$ 의 길이를 말하고, 임베딩 f 의 연장률은 G 의 모든 에지의 연장률 중 최대값이다. H 의 에지 e 의 밀집률은 e 를 포함하는 $\rho(e)$ 의 개수를 말한다. 임베딩 f 의 밀집률은

H 의 모든 에지의 밀집률 중 최대값이다. 임베딩 f 의 확장률은 G 의 정점의 개수에 대한 H 의 정점 개수의 비를 말한다.

임의의 그래프 G 를 후위순회 피보나치 원형군에 임베딩하기 위한 방법으로 그래프 번호 매김을 사용하였다. 그래프 G 에 대한 번호 매김이란 G 의 모든 정점들에 대해 서로 다른 정수 $\{1, 2, \dots, |V|\}$ 를 일대일 대응시키는 것을 말한다. 본 논문에서는 트리의 순회 방법 중 하나인 후위 순회 방법으로 각 정점들을 번호매김하였다. 그래프의 각 에지는 이러한 번호 매김으로부터 얻을 수 있는 에지 번호를 갖는다. 에지 번호는 그 에지의 양끝 정점에 할당된 정수값의 차이이다[13-18]. 그림 1. 예서와 같이 그래프 G 에 대한 f -에지 번호 매김이란 에지 번호가 피보나치 수 $f_n, n \geq 2$ 가 되게 번호 매김된 것이다. 후위순회 피보나치 원형군과 f -에지 번호 매김의 정의로부터 정점 수가 f_n 이하이고 f -에지 번호 매김이 가능한 그래프는 n 차원 후위순회 피보나치 원형군의 부그래프임을 알 수 있다.

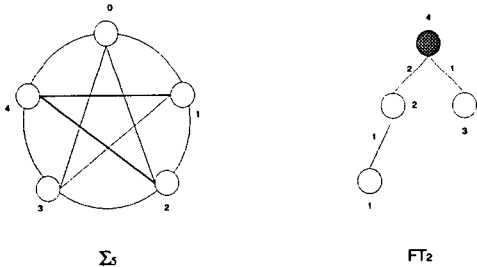


그림 1. f -에지 번호매김의 예

본 논문에서 다룬 피보나치 트리는 높이가 h 인 AVL 트리 중에서 정점 수가 가장 작은 경우로서 최악의 경우에도 탐색을 $O(\log n)$ 의 복잡도로 가능하다. 이러한 피보나치 트리를 후위순회 피보나치 원형군에 효율적으로 임베딩할 수 있다는 것은 후위순회 피보나치 원형군에서 피보나치 트리 형태의 자료 구조를 쉽게 시뮬레이션할 수 있으며 피보나치 트리를 기반으로 하는 분할 정복 알고리즘을 효율적으로 수행할 수 있음을 의미한다. 그리고 n 차원 피보나치 큐브는 $n-2$ 차원 하이퍼 큐브의 부그래프이고 n 차원 하이퍼 큐브는 $2n+1$ 차원 피보나치 큐브의 부그래프임이 이미 연구된 바 있다[7].

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 피보나치 큐브와 후위순회 피보나치 원형군간의 임베딩에 대해서 살펴본다. 제 3장에서는 하이퍼 큐브와 후위순회 피보나치 원형군간의 임베딩에 대해서 살펴본다.

마지막으로써 4장에서는 결론을 맺고 추후 연구 방향을 살펴본다.

2. 피보나치 큐브와 후위순회 피보나치 원형군 간의 임베딩

본 절에서는 피보나치 큐브가 후위순회 피보나치 원형군의 부 그래프이고 역으로 후위순회 피보나치 원형군이 피보나치 큐브에 임베딩됨을 보인다.

정리 2. Σ_n 은 Γ_n 을 부 그래프로 포함한다.

증명) $\Sigma_n = G(V_n, E_n)$

$\Gamma_n = G'(V'_n, E'_n)$ 이라고 하면 $1 \leq n \leq 3$ 인 경우에는 $G \cong G'$ 임을 쉽게 알 수 있다. 만약 $n < k$ 인 경우에 성립한다고 가정하면 $n = k$ 인 경우에는 $V_k \equiv V'_k$ 이고 $E_k = \{(v, w) \mid v + f_i \equiv w \pmod{f_k}, 2 \leq i \leq k-2\}$

이다. 그리고 Γ_k 는 $\Gamma_{k-2}, \Gamma_{k-3}$ 그리고 Γ'_{k-2} 로 분할 할 수 있고 이들 Γ_{k-2} 와 Γ'_{k-2} 두 부그래프는 $LINK(k) = \{(i, j) \mid |i-j| = f_{k-1}, (i, j) \in E_k\}$ 에 의해서 연결된다.

그러므로 Γ_k 를 f_k 개의 노드들의 집합으로 유도된 부 그래프를 S_k 라고 하면 Σ_k 는 S_{k-2}, S_{k-3} 그리고 S'_k 로 분할되고 가정에 의

해 S_{k-2} 와 S'_{k-2} 는 Γ_{k-2} 을 S_{k-3} 는 Γ_{k-3} 을 부그래프로 포함한다. 그리고 S_{k-2} 의 노드들과 S'_{k-2} 의 노드들 사이에 인접한 에지를 갖는다면 노드

대칭적이고 피보나치 수의 성질 $f_{k-1} = f_k - f_{k-2}$ 에 의해서 반시계 방향으로 최대 점프값 f_{k-2} 가 시계 방향으로 점프값 f_{k-1} 로 치환되어 $LINK(k)$ 와 같게된다. 그러므로 Σ_k 는 Γ_k 를 부 그래프로 포함한다.□

정리 3. Σ_n 은 Γ_n 에 확장률 1, 연장률 $n-2$, 밀집률 $O(n-1)$ 에 임베딩된다.

증명) 1) 확장률 전체 노드 개수는 서로 같다.

2) 연장률 Σ_4 은 Γ_4 에 연장률 2에 임베딩된다.

$n \leq k, k \geq 5$ 인 경우에 Σ_k 은 Γ_k 에 연장률 $k-2$ 에 임베딩된다고 가정하면 $n = k+1$ 인 경우

에는 Γ_{k+1} 는 Γ_{k-1} , Γ_{k-2} 그리고 Γ'_{k-1} 로 분할할 수 있다. 이때 Γ_{k-2} , Γ'_{k-1} 의 경로가 최대값을 갖는다. 그리고 Γ_{k-2} 에서 각 노드들은 Γ_{k-1} 의 노드들 중 하나와 인접한 에지를 갖고 Γ_{k-1} 에서의 각 노드들은 Γ'_{k-1} 의 노드들 중 하나와 인접한 에지를 갖는다. 그리고 Γ_{k-2} 의 임의의 한 노드에서 Γ'_{k-1} 의 임의의 한 노드까지의 경로의 길이는 2 이고 Γ'_{k-1} 내에서의 경로의 길이는 가정에 의해서 $k-3$ 이므로 Γ_{k-1} 의 연장장을 $dil(\Gamma_{k-1})$ 이라고 표현하면 $2 + dil(\Gamma'_{k-1}) = 2 + dil(\Gamma_{k-1}) = 2 + (k-3) = k-1$ 이다. 그러므로 항상 Σ_n 은 Γ_n 에 연장장 $n-2$ 로 임베딩 된다.

3) 밀집물 Σ_k 가 Γ_k 에 임베딩될 때의 밀집률을 $con(\Sigma_k \rightarrow \Gamma_k)$ 이라고 하면 Γ_3 , Γ_4 와 Γ_5 의 최소 분지수는 1 이므로 최소 분지수를 갖는 노드가 다른 노드들과 인접한 에지를 가질려면 이용할 수 있는 에지가 하나이므로 그때의 밀집률은 Σ_3 , Σ_4 와 Σ_5 의 노드 분지수인 1, 2 와 4 가 된다.

$n \leq k, k \geq 6$ 일 경우에는 $con(\Sigma_k \rightarrow \Gamma_k) = 2(k-3) - con(\Sigma_{k-3} \rightarrow \Gamma_{k-3}) = (k-1) - \lfloor \frac{k - (-1)^{\lfloor \frac{k+1}{3} \rfloor}}{k} \rfloor$ 라고 가정하면

$n = k+1$ 인 경우에는 Σ_{k+1} 이 Γ_{k+1} 에 임베딩될 때 Γ_{k+1} 은 Γ_{k-1} , Γ_{k-2} 그리고 Γ'_{k-1} 으로 분할되고 Γ_{k-2} 의 각 노드들은 Γ_{k-1} 의 노드들 중 하나에 인접한 에지를 갖고 Γ_{k-1} 의 각 노드들은 Γ'_{k-1} 의 각 노드들 중 하나에 인접한 에지를 갖는다. 그리고 Σ_{k+1} 의 분지수는 $2(k-2)$ 이다. 이때 Γ_{k-2} 의 임의의 노드가 Γ'_{k-1} 의 노드들 중 하나와 인접한 에지를 갖는다면 Γ_{k-2} 에서 Γ_{k-1} 을 거쳐서 Γ'_{k-1} 로 간다. 그리고 항상 Γ_{k-2} 의 노드들 중 하나가 최소 분지수를 가지므로 Σ_{k+1} 의 밀집률은 Σ_{k+1} 의 분지수 $2(k-2)$ 에서 Γ_{k-2} 의 밀집

률을 뺀 $2(k-2) - con(\Sigma_{k-2} \rightarrow \Gamma_{k-2}) = (k-1) - \lfloor \frac{k+1 - (-1)^{\lfloor \frac{k+2}{3} \rfloor}}{k+1} \rfloor$ 이다. 그러므로 $O(k-1)$ 이 된다. □

3. 하이퍼 큐브와 후위순회 피보나치 원형군 간의 임베딩

본 절에서는 n 차원 하이퍼 큐브, Q_n 가 $2n+1$ 차원 후위순회 피보나치 원형군, Σ_{2n+1} 의 부그래프이고 역으로 Σ_n 이 Q_{n-2} 에 임베딩됨을 보인다. 지금까지 다수의 상호 연결망들이 제안되어져 왔다. 그리고 이들 중 가장 널리 알려지고 사용되고 있는 것 중의 하나가 하이퍼큐브이다. Q_n 는 2^n 개의 노드를 갖고, 분지수는 n 이다. 그리고 각 노드를 이진수로 표현했을 때 정확히 한 비트 서로 다른 노드들 사이에 에지를 둔 연결망이다. Q_n 는 여러 가지 측면, 즉 정규성, 재귀적 구조, 분할 가능성, 강한 연결도, 많은 다른 구조들의 시뮬레이션의 가능성 등의 좋은 특성을 가진다.

정리 4. $\Sigma_{2n+1}, n \geq 1$ 은 Q_n 을 부 그래프로 포함한다.

증명) 그림 9.에서와 같이 $n=2$ 인 경우 Q_2 는 두 개의 Q_1 이 서로 매칭되는 형태이다. 그리고 Σ_5 에서는 두 개의 S_3 와 하나의 S_2 로 분할할 수 있는데 이때 S_3 는 Q_1 과 서로 동형이고 이들 두 S_3 사이에 서로 매칭되므로 Σ_5 는 Q_2 를 부 그래프로 포함한다. $n \leq k$ 인 경우 Σ_{2n+1} 이 Q_n 을 부 그래프로 포함한다고 가정하면 $n = k+1$ 인 경우에는 Σ_{2k+3} 은 두 개의 S_{2k+1} 과 하나의 S_{2k} 로 분할되고 각각의 S_{2k+1} 에는 Q_k 가 포함된다. 그리고 이들 두 S_{2k+1} 사이에는 Σ_{2k+3} 의 최대 점프값 f_{2k+1} 로 매칭된다. 그러므로 Σ_{2k+3} 은 Q_{k+1} 을 부 그래프로 포함한다. □

정리 5. Σ_n 은 Q_{n-2} 에 확장률 $\frac{f_n}{2^{n-2}}$, 연장률 $n-2$, 밀집률 $O(n-2)$ 에 임베딩된다.

증명) $n \geq 5$ 인 경우에는 쉽게 증명되고, $n=6$ 인 경우에 Σ_6 은 Q_4 에 밀집률 4 와 연장률 4 에

임베딩된다. $n = k$ 인 경우에 연장률 $n - 2$, 밀집률 $O(n - 2)$ 에 임베딩된다고 가정하면 $n = k + 1$ 인 경우에는 Q_{k-1} 는 Q_{k-2} 에 비해 노드 수는 2배 증가하고 분지수는 1이 증가된 $k - 1$ 이 되고 Σ_{k+1} 는 Σ_k 에 비해 노드 수가 약 1.6 배 증가되고 분지수는 2배 증가된다. 그러므로 Σ_k 는 Q_{k-2} 의 전체 노드 개수 중 절반에 유도된 부 그래프에 임베딩 되고 Q_{k-1} 는 Q_{k-2} 에 비해 노드 개수는 2배 증가되고 분지수는 1 증가되므로 Q_{k-2} 에서 사용되지 않았던 절반의 부분으로의 에지와 Q_{k-1} 로 되면서 증가된 부분으로의 에지를 합하면 2 가 되므로 새로 추가되는 밀집률과 연장률 없이 임베딩할 수 있다. □

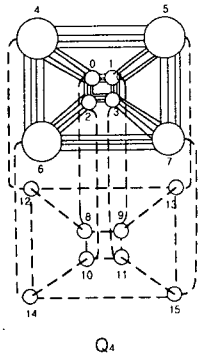
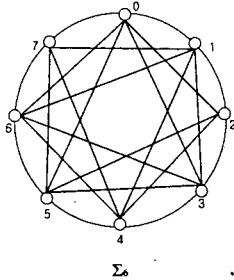


그림 2 밀집률의 예

4. 결론

본 논문에서는 후위순회 피보나치 원형군에 피보나치 큐브 그리고 하이퍼큐브를 임베딩하였다. Q_n 가 Σ_{2n+1} 의 부그래프임을 보였다. 역으로 Σ_n 이 Q_{n-2} 에 확장률 $n - 2$ 와 밀집률을 $O(n - 2)$ 에 임베딩할 수 있음을 보였다. 그리고 Γ_n 는 Σ_n 의 부 그래프임을 보였고 역으로

대칭적인 Σ_n 을 비대칭적인 Γ_n 에 임베딩하는 문제는 연장률은 $n - 2$ 에 밀집률은 $O(n - 1)$ 이다. 그러므로 후위순회 피보나치 원형군은 하이퍼큐브의 대안으로 제안된 피보나치 큐브를 스펀닝 트리로 가지고 있으면서도 피보나치의 단점인 비대칭성을 개선하여 대칭성을 갖고 하이퍼큐브를 부그래프로 갖는다.

향후 연구 과제로서는 이진 트리 또는 일반 트리의 후위순회 피보나치 원형군에 대한 임베딩 문제 그리고 VLSI 구현에서, 후위순회 피보나치 원형군의 에지들의 가로 지름 (crossings)과 총 공간(total space)을 최소화하는 평면꼴(planar) 임베딩 문제를 고려할 수 있다.

5. 참고문헌

- [1] D. F. Reed and R. M. Fujimoto, Multicomputer Networks: Message-based Parallel Processing, MIT Press, 1987.
- [2] F. T. Leighton, Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: arrays, trees, hypercubes, Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, California, 1992.
- [3] L. N. Bhuyan and D. P. Agrawal, "Generalized hypercube and hyperbus structures for a computer network," IEEE Trans. Comput., vol. C-33, pp. 323-333, 1984.
- [4] D. P. Bertsekas and J. N. Tsitsiklis, Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods. Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1989, ch. 1, pp. 27-68.
- [5] J. P. Hayes, Computer Architecture and Organization, 2nd ed. in New York: McGraw-Hill, 1988, ch. 4.
- [6] IEEE Comput. Mag., Special Issues on Interconnection Networks, vol. 20, 1987.
- [7] W.-J. Hsu, "Fibonacci cubes-A new Interconnection Topology," IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, vol. no. 1, Jan. 1993.
- [8] W.-J. Hsu, "Fibonacci cubes-A new computer architecture for parallel processing," Tech. Rep. CPS-90-04, Michigan State Univ., Oct 1990.
- [9] W.-J. Hsu and J.-S. Liu, "Fibonacci codes as formal languages," Tech. Rep.CPS-91-04, Michigan State Univ., May 1991.