2004년도 대한전자공학회 하계종합학술대회 논문집 27권 1호

후위순회 피보나치 원형군-짧은 지름을 갖는 새로운 상호연결망

김 용 석, 권 승 탁

서남대학교 컴퓨터정보통신학과
전화 : 063-620-0147 / 핸드폰 : 011-9045-9801

The Postorder Fibonacci Circulants-a new interconnection networks with lower diameter

Yong-Seok Kim, Seung-Tag Kwon

Dept. of Computer Science and Communications, Seonam University
E-mail : yskim@seonam.ac.kr

Abstract

In this paper, we propose a new parallel computer topology, called the postorder Fibonacci circulants and analyze its properties. It is compared with Fibonacci cubes, when its number of nodes and its degree is kept the same of comparable one. Its diameter is improved from $n-2$ to $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ and its topology is changed from asymmetric to symmetric. It includes Fibonacci cube as a spanning tree.

I. 서론

최근 컴퓨터 제조 기술의 눈부신 발전과 더불어 보다 높은 성능을 요구하는 응용 분야에 적합한 컴퓨터 개발의 필요성이 날로 증대하고 있으며, 이러한 필요성은 여러개의 프로세서들을 상호 연결하여 처리하는 병렬 컴퓨터로 발전하고 있다. 특히 대규모 프로세서들을 사용하여 구성이 가능한 메시지 전달 방식의 다중 컴퓨터가 선호되고 있는 실정이다[6]. 이러한 다중 컴퓨터에서 각 프로세서들을 연결하기 위해 상호 연결망이 사용되고 있는데 이는 전체 시스템의 성능을 결정하는데 중요한 역할을 한다. 따라서 지금까지 다수의 상호 연결망이 제안되고 연구되어져 왔다. 이들 중 가장 널리 알려져 있고 사용되고 있는 것 중의 하나가 하이퍼 큐브이다[5]. 그리고 이러한 하이퍼 큐브의 대안들 중 하나인 피보나치 큐브는 피보나치 수에서 영감을 얻은 새로운 상호연결망으로서 재귀적 구조와 배열, 특정 형태의 메쉬와 트리 그리고 하이퍼큐브를 직접 임베딩할 수 있고 지름과 연결도가 하이퍼큐브와 비슷한 복잡도를 갖는다[1-4].

본 논문에서는 n 개의 노드와 e 개의 에지를 가지면서 연결도가 최대인 원형군 그래프에서 피보나치 트리에 후위순회 방법으로 각 노드에 번호매김하여 얻어진 에지 번호들의 집합을 점프열로 하여 만들어진 후위순회 피보나치 원형군을 제안한다. 전체 노드개수가 f_n 일때 피보나치 큐브의 지름은 $n-2$ 인 것에 비해 후위순회 피보나치 원형군은 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 으로 개선되었다. 짧은 지름은 예상 통신 지연시간을 짧게하여 시스템의 성능을 향상시킬 수 있고 병렬 응용에서 중요한 방송시간을 단축시킨다. 그리고 비대칭적 위상인 피보나치큐브에 반해 대칭적이고 피보나치 큐브를 스패닝 트리로 갖는다. n 차원 후위순회 피보나치 원형군은 n 차원 후위순회 피보나치 여큐브와 n 차원 후위순회 피보나치 부분군의 합집합으로 이루어졌고 이때 n 차원 후위순회 피보나치 부분군은 두 개의 $n-2$ 차원 후위순회 피보나치 부분군과 한 개의 $n-3$ 차원 후위순회 피보나치 부분군으로 이루어졌다. 0 차원 후위순회 피보나치 원형군은 공집합이고 1 차원 후위 순회 피보나치 원형군은 하나의 노드를

갖는다.

본 논문에서는 후위순회 피보나치 원형군을 병렬 컴퓨터의 위상으로 이용하기 위한 연구를 하였다. 먼저 2장에서는 후위순회 피보나치 원형군의 정의 및 성질, 3장에서는 지름, 4장에서는 방송 마지막으로 5장에서는 결론 및 차후 연구과제에 대해 기술한다.

2. 후위순회 피보나치 원형군의 정의 및 성질

임의의 자연수는 피보나치 수들의 합으로 유일하게 표현할 수 있다[Zeckendorf의 정리]. $\alpha\cdot\beta$ 를 문자열 α 와 문자열 β 의 접합에 의한 스트링이라고 가정하고 λ 를 공백 문자열이라고 하면 $\lambda\cdot\alpha=\alpha\cdot\lambda=\alpha$ 라고 정의한다. 이를 일반화하여 만약 S 가 문자열들의 집합이라고 하면 $\alpha\cdot S=\{\alpha\cdot\beta:\beta\in S\}$ 이다. 그리고 F_n, $n\ge2$ 을 n 차원 후위순회 피보나치 코드들의 집합이라고 하고 $|F_n|$ 을 집합 F_n 의 크기로 나타내면, $|F_n|=f_n$, $n\ge2$ 이다. 그러므로 F_n 은 $\{a_1, a_2,\cdots, a_{f_n}\}$ 이고 이들 원소들 중에서 a_1 에서 a_i, $1<i\le f_{n-1}$ 까지의 원소들로 이루어진 부분 n 차원 후위순회 피보나치 코드들의 집합은 $[F_n]_1^i$ 로 표현한다.

정의 1(n 차원 후위순회 피보나치 코드): F_n 을 $n-2$ 개의 비트를 갖는 n 차원 후위순회 피보나치 코드들의 집합이라고 가정하면 $F_2=\{\lambda\}$, $F_3=\{0,1\}$ $F_n = (00\cdot F_{n-2}) \cup (01\cdot[F_{n-2}]_1^{f_{n-3}}) \cup (10\cdot F_{n-2})$, $n\ge4$ 이다.

정의 2(후위순회 피보나치 거리): 임의의 정수 i 와 j 사이의 피보나치 거리 $\Delta(i,j)$는 i 와 j 사이의 차이값을 후위순회 피보나치 코드표현으로 변환할 때 나타나는 1 의 개수이다. 즉 $\Delta(i;j) := n(|i-j|)_F$

정의 3(후위순회 피보나치 원형군): Σ_n 을 그래프 $G=(V,E)$이라고 하면 $V_n=\{0,1,\cdots,f_n-1\}$과 $E_n=\{(v,w)\mid v+f_i\equiv w \pmod{f_n}, 2\le i\le n-2\}$ 이다.

정의 4(n 차원 후위순회 피보나치 여큐브): $\Psi_n, n\ge4$을 그래프 $G=(V'_n, E'_n)$ 이라면

$V'_n = V_{n_1}\cup V_{n_2}=\{f_{n-1}, f_{n-1}+1,\cdots, f_n-1\}\cup\{0,1,\cdots, f_{n-2}-1\}$, $E'_n=\{(i,j)\mid i(\in V_{n_1})+a_{f_i}\equiv j(\in V_{n_2}), 2\le i\le n-2\}$ $|V'_n|=2\cdot f_{n-2}$ 이고 $a_n=\{f_{n-1}, f_{n-1}+1,\cdots, f_n-1\}=\{a_{f_{n-2}}, a_{f_{n-2}}-1,\cdots, a_1\}$

정의 5.(n 차원 후위순회 피보나치 부분군): $\delta_n, n\ge4$을 그래프 $G=(V_n, E''_n)$ 라고 하면 $V_n=\{0,1,\cdots, f_n-1\}$ 이고 $E''_n=\{(i,j)\mid i+f_k\equiv j(\le f_n-1),\ 2\le k\le n-2\}$ $= E_n - E'_n$ 이다.

Σ_n 과 여기에서 파생된 δ_n 과 Ψ_n 의 예는 **그림 1** 와 같다.

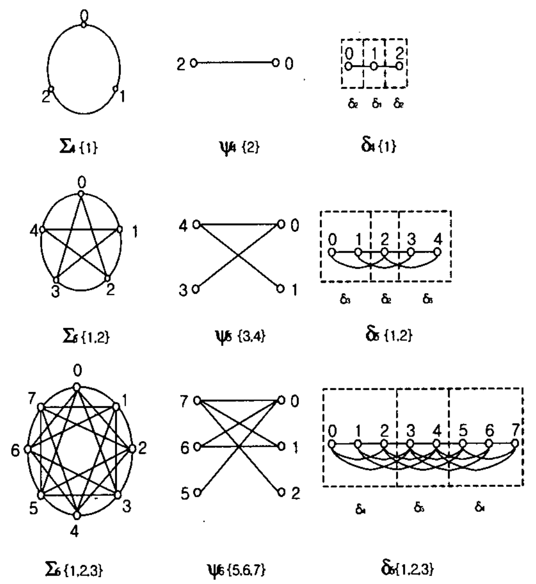

그림 1 Σ_n, δ_n 과 Ψ_n 의 예

3. 지름

Σ_n 에서 노드 번호 0 을 노드 번호 0 과 노드 번호 f_n 으로 분리하여 서로 같은 노드라고 가정하고 수직선 상의 양쪽 끝에 위치시켜 선형적으로 나열한 n 차원 후위순회 피보나치 선형군, Λ_n 을 그래프 G 라고 하면 아래와 같이 정의된다.

정의 6(n 차원 후위순회 피보나치 선형군,

Λ_n) : Λ_n 을 그래프 $G=(V,E)$라고 하면
$V_n=\{0,1,\cdots, f_n\}$
$E_n=\{(i,j) \mid i+f_k \equiv j(\le f_n), 2\le k\le n-2\}$
이다.

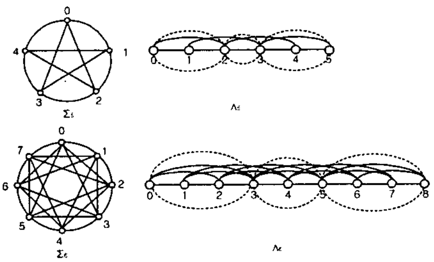

그림 4. Λ_n 의 예

정리 1. Σ_n , $n\ge 2$의 지름은 즉 $dia(\Sigma_n: f_n)=\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 이다.

증명) $dia(\Lambda_3)=dia(\Lambda_4)=dia(\Lambda_5)=1$ 이 성립한다. $n\le k,\ k\ge 6$ 인 경우에 $dia(\Lambda_k: f_k)=\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$ 인 경우에는 $dia(\Lambda_{k+1}: f_{k+1}) = dia(\Lambda_{k+1}; f_k)=1+dia(\Lambda_{k-2}: f_{k-2})$, $dia(\Lambda_{k+2}: f_{k+2})= dia(\Lambda_{k+2}; f_{k+1})=1+dia(\Lambda_{k-1})$, $dia(\Lambda_{k+3}) = dia(\Lambda_{k+3}; f_{k+2})=1+dia(\Lambda_k: f_k)$ 이다. 이때 $k-2=3$ 이라고 하면 $dia(\Lambda_{k-2}: f_{k-2})= dia(\Lambda_{k-1}: f_{k-1})= dia(\Lambda_k: f_k)=1$ 이 된다. 고로 $dia(\Lambda_n: f_n)=dia(\Sigma_n: f_n)=\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 이 성립한다.□

4. 통신

통신의 형태에서, 일대일(one-to-one) 통신은 라우팅(routing)이라고도 하며 임의의 한 출발지 노드가 메시지를 다른 하나의 목적지 노드에게 보내는 것을 말한다. 그리고 일대다(one-to-all) 통신은 일반적으로 말하는 방송(broadcasting)이며 임의의 한 출발지 노드에서 똑같은 메시지를 다른 모든 노드들에게 보내는 것을 말한다. 또한 방송은 LU-분할, 호주 변환(Householder transformation)과 같은 다양한 선형대수 알고리즘들에 사용되며 데이터베이스 질의나 이행적 폐쇄(transitive closure) 알고리즘에도 사용된다.

소정리 1 Σ_n 에서 임의의 두 노드들 사이에서 일대일 통신은 많아야 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 단계에 수행되고 이것은 최적이다.

증명) 정리 1에는 Σ_n 의 임의의 두 노드 사이의 최단거리 중에서 최대값인 지름은 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 이다 그러므로 일대일 통신은 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 단계가 필요하다.□

소정리 2 (방송): 각 노드는 한 단계에 하나의 에지위에서 전송 또는 수신한다고 가정하면 임의의 한 노드에서 다른 모든 노드들에게 메시지를 전송하는 방송은 Σ_n에서 $n-2$ 단계에 수행되고 이것은 최적이다.

증명) Σ_n 에서 l_n 을 메시지를 전송하는데 필요한 단계의 수라고 하면 Σ_1 과 Σ_2 에서는 노드의 개수가 1 이므로 $l_1=l_2=0$ 이 된다. 그리고 $n\le k,\ k\ge 3$ 인 경우 $l_k=MAX\{l_{k-1}+1,\ l_{k-2}\}=k-2$가 성립한다고 가정하면 $n=k+1$인 경우에 T_{k+1}은 Σ_{k+1}의 스패닝 트리이고 T_k 와 $T'_{k-1}(\cong T_{k-1})$을 부트리로 갖는다. 그리고 노드 번호 0은 T_{k+1}의 루트 노드이고 동시에 T_k의 루트 노드가 된다. 만약 루트 노드 번호 0 에서 모든 노드들에게 메시지를 전송한다면 먼저 인접한 T'_{k-1}의 루트 노드에게 메시지를 전송하고 다시 반복적으로 T_k과 T'_{k-1} 에서 각각 동시에 메시지를 전송한다. 이때 항상 l_k 가 l_{k-1} 보다 크거나 같고 T_k 의 루트 노드에서 인접한 T'_{k-1} 의 루트 노드에 메시지를 전달한 후 T_k 에서 메시지를 전달하므로 Σ_{k+1} 에서의 단계 수는 항상 l_k+1 이 된다. 그러므로 Σ_n 의 $l_n=n-2$ 가 성립한다. □

소정리 3 인접한 모든 에지들에게 동시에 전송 또

는 수신이 가능하다면 $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 단계에 수행되고 이것은 최적이다.

증명) Σ_n 에서 하나의 노드에서 똑같은 메시지를 다른 모든 노드들에게 동시에 보내는 방송 단계수를 b_n 이라고 한다면 Σ_1, Σ_2 에서는 노드의 개수가 1 이므로 $b_1 = b_2 = 0$ 이다. 그리고 $n \le k,\ k \ge 3$ 인 경우에 $b_k = MAX\{\ b_{k-1},\ b_{k-2}+1\} = \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ 이라고 가정하면 $n = k+1$인 경우에는 T_{k+1} 은 Σ_{k+1} 의 스패닝 트리이고 T_k과 $T'_{k-1}(\cong T_{k-1})$을 부트리로 갖는다. 노드 번호 0 은 T_{k+1} 의 루트 노드인 동시에 T_k 의 루트 노드가 된다. 만약 루트 노드번호 0에서 노드들에게 메시지를 전송한다면 먼저 인접한 T'_{k-1} 의 루트 노드와 동시에 T_k 의 루트 노드에 인접한 모든 노드들에게 메시지를 전달한다. 이때 b_k 와 b_{k-1} 은 항상 같거나 1 차이가 난다. 만약 1 차이가 날 경우는 T_k 와 T'_{k-1} 의 루트 노드들 사이에 인접한 에지가 있으므로 $b_{k-1}+1$ 이 T_{k+1} 의 방송 단계수가 되고, 같은 경우에도 $b_{k-1}+1$이 됨을 쉽게 알 수 있다. 그러므로 Σ_{k+1}의 방송 단계수는 $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ 이 된다.□

5. 결론

피보나치 큐브는 같은 크기의 노드 개수를 갖는 하이퍼 큐브에 비해 $\frac{1}{5}$ 정도 작은 에지 수를 갖지만 노드의 분지수가 다른 비정규형이고 비대칭적이다. 모든 노드의 분지수가 같은 연결망을 정규 연결망이라고 하고 노드 대칭성은 라우팅에서 노드 밀집율을 줄이는 요인이 되고 상호 연결망으로 병렬 컴퓨터를 설계할 때 모든 노드가 같은 역할을 수행하므로 한가지 종류의 처리기만 있으면 된다. 그리고 분지수는 주어진 연결망으로 병렬 컴퓨터를 설계할 때 처리기의 핀 수나 라우팅 제어 논리의 복잡도를 결정하는 요인이 된다. 그리고 지름은 연결망 전체에 정보를 전파하는데 드는 지연 시간의 하한값이다. 이때 피보나치 큐브와 같은 크기의 노드 개수를 갖는 경우에 분지수*지름을 비교해 보면 피보나치 큐브는 $(n-2)\times(n-2)$이고 후위 순회 피보나치 원형군은 $2(n-2)\times\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 이다.

향후 연구 과제는 첫째로 후위 순회 피보나치 원형군에서 하이퍼큐브의 임베딩에 관한 문제이다. 피보나치 큐브는 후위 순회 피보나치 원형군의 부그래프로 직접적으로 임베딩되고 n 차원 하이퍼 큐브는 $2n+1$ 차원의 피보나치 큐브에 임베딩된다. 둘째로 후위 순회 피보나치 원형군에서의 일반적인 트리와 임베딩에 관한 문제이다. 후위 순회 피보나치 원형군은 피보나치 트리를 스패닝 트리로 가지고 있지만 이진 트리, 이항 트리등 다른 일반적인 트리와의 임베딩 문제도 고려해 볼 수 있다.

6. 참고문헌

[1] W.-J. Hsu, "Fibonacci cubes-A new computer architecture for parallel processing," Tech. Rep. CPS-90-04, Michigan State Univ., Oct 1990.

[2] W.-J. Hsu and J.-S. Liu, "Fibonacci codes as formal languages," Tech. Rep. CPS-91-04, Michigan State Univ., May 1991.

[3] J.-S. Liu, and W.-J. Hsu, "On embedding rings and meshes in Fibonacci cubes," Tech. Rep. CPS-91-01, Michigan State Univ., Jan. 1991.

[4] X. Lin, L. M. Ni, and W.-J. Hsu, "a foundation for multicast communication in multicomputers," Tech. Rep. CPS-89-02(ACS-12), Michigan State Univ., Jan. 1989.

[5] L. N. Bhuyan and D. P. Agrawal, "Generalized hypercube and hyperbus structures for a computer network," IEEE. Trans. Compt., vol. C-33, pp. 323-333, 1984.

[6] D. P. Bertsekas and J. N. Tsitsiklis, Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989, ch. 1, pp. 27-68.