

# LDPC 코드를 이용한 위상 동기 알고리즘

이주형, 김남식, 박현철, \*김판수, \*오덕길, \*이호진

한국정보통신대학원대학교  
\*한국전자통신연구원

## Carrier phase recovery algorithm for LDPC coded system

Juhyung Lee, Namshik Kim, Hyuncheol Park, \*Pansu Kim, \*Dukgil Oh, \*Hojin Lee

Information and communication University (ICU)  
\*Electronics and Telecommunications Research Institute (ETRI)

### Abstract

In this paper, we present a carrier phase estimation algorithm for LDPC coded systems. LDPC coded system can not achieve the ideal performance if phase offset is introduced by channel. However, the estimation of phase offset is very hard since the operating point of LDPC is very low SNR. To solve this problem, the algorithm using the tentative soft decision value and based on Maximum Likelihood (ML), was proposed in [2]. But this algorithm has problem which works only under constant phase offset. If phase offset is time variant, it has a severe degradation in performance. To solve this problem, we propose two types of estimators, symbol by symbol estimator: Unidirectional estimator (UDE) and bi-directional estimator (BDE), and sub-block estimator (SBE).

### I. 서론

1962년 Gallager에 의해 발표된 Low-Density Parity Check (LDPC) 부호[1]는 당시 하드웨어적인 구현의 어려움으로 잊혀져 왔다. 1996년 Mackay와 Neal 그리고 Sipser와 Spilman에 의해 우수성이 재발견되었다. 그러나 성능이 뛰어난 LDPC 코드라도 위상 오프셋에 대한 정확한 보상 없이는 좋은 성능을 기대하기 어렵다. 따라서 LDPC의 동작 범위인 낮은 SNR에서 위상을 추정해 주는 위상 동기 방식이 필요하다. 그러나 기존의 위상 동기 방식은 낮은 SNR에서 성능의 열화가

커 동작을 하지 않는다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 LDPC 코드를 이용한 새로운 위상 추정 방식[2]이 제안되었다. 그러나 위상 오프셋이 일정할 경우에는 성능의 열화가 거의 없으나 위상 오프셋이 시간에 따라 크게 변하는 경우는 성능의 열화가 커지는 문제점을 가지고 있다. 본 논문에서는 이러한 기존 방식의 문제점을 해결하기 위하여 적응적 위상 추정 방식을 제안하였다. 2, 3절에서는 시스템 모델과 LDPC 코드의 기본적인 복호 방식에 대해 알아 보고 4절에서는 기존의 추정 방식을 보완한 3가지의 적응적 위상 추정 알고리즘을 제안하였다. 그리고 5절에서는 기존의 방식들과 제안된 방식의 성능을 비교 분석하고 마지막으로 6절에서는 본 논문의 결론을 맺도록 하겠다.

### II. LDPC system with the carrier phase offset

위상 오프셋이 LDPC 코드 시스템에 존재할 경우 이를 추정 보상하기 위한 제안된 위상 동기 블럭도는 다음과 같다.

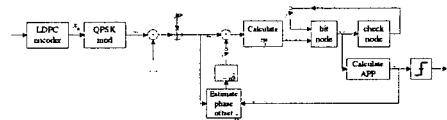


그림 1 기존의 LDPC 코드 시스템

$K$ 는 정보 비트의 개수고  $N$ 은 LDPC 부호어의 길이이다. 타이밍 동기과 프레임 동기가 정확하게 추정 보상

되고 ISI (Intersymbol interference) 가 존재 하지 않을 때의 정합필터의 출력은 다음과 같이 표현된다.

$$r_t = a_t e^{j\theta_t} + w_t \quad (1)$$

위 그림 1에서 변조된 신호는  $\mathbf{a} = [a_1, a_{2\Lambda}, a_{N/\log_2 N}]$  이고 부호어는  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]$  라 하자. 그리고  $M$  은 심벌당 비트 수 이다.

### III. Belief propagation decoding algorithm

이 절에서 Belief Propagation 방식의 복호 과정을 간략하게 기술하겠다. LDPC 코드의 복호 과정은 확률값을 이용하는 방식으로, 복호과정은 수신된 신호에 대한 전송된 신호의 확률이 최대가 되는 신호를 구하는 과정이다. 즉  $P(\tilde{\mathbf{x}}|\mathbf{r})$  의 값이 최대가 되는 정보비트  $\tilde{\mathbf{x}}$  을 구하는 것이다. 순차적 복호화 알고리즘인 Belief Propagation을 정리하여 나열한 것이다.

1. 초기화:  $\Lambda_{q_{mn}} = \Lambda_{f_n} = \ln(f_n^1 / f_n^0)$   
단,  $f_n^i$  은  $n$  번째 비트가 1 일 사전 확률이다.
2. Check Node Update: 각각  $m, n$  에 대하여 check node 를 다음과 같이 갱신한다.

$$\Lambda_{r_{mn}} = \ln \left( \frac{\prod_{n' \in N(m)/n} -\tanh\left(\frac{\Lambda_{q_{mn'}}}{2}\right)}{1 + \prod_{n' \in N(m)/n} -\tanh\left(\frac{\Lambda_{q_{mn'}}}{2}\right)} \right)$$

단,  $N(m)$  은  $m$  번째 행의 1 의 위치 index 들의 집합과 같다

3. Bit Node Update: 각각의  $m, n$  에 대하여 다음과 같이 bit 값을 갱신한다.

$$\Lambda_{q_{mn}} = \Lambda_{f_n} + \sum_{m' \in M(n)/n} \Lambda_{r_{m'n}}$$

단,  $n$  번째 신호 bit 를 포함하는 check 방정식 index 들의 집합을  $M(n)$  이라 정의한다.

4. Pseudoposterior probability : 다음과 같이 bit node 의 pseudo-probability 를 갱신한다.

$$\Lambda_{q_{mn}} = \Lambda_{f_n} + \sum_{m' \in M(n)} \Lambda_{r_{m'n}}$$

5. Tentative Decoding: bit node 의

pseudo-probability 를 이용하여 다음의 과정을 수행한다

$$\tilde{x}_n = \begin{cases} 0 & \text{if } \Lambda_{q_n} < 0 \\ 1 & \text{if } \Lambda_{q_n} > 0 \end{cases}$$

만일 단  $\mathbf{H} \tilde{\mathbf{x}} = 0$  이 아니면, 2번 부터 다시 수행한다.

### VI. 제안된 방식

제안된 알고리즘은 매 심벌마다 위상을 추정 보상하는 UDE (Uni-Directional Estimator), BDE (Bi-directional Estimator) 방식과 sub block 단위로 위상을 추정 보상하는 SBE (Sub-block estimator)로 나뉘어진다.

#### A. Symbol by symbol estimator

위상 옵셋이 시간에 관계없이 일정할 경우 다음과 같이 위상을 추정 보상 할 수 있다 [2].

$$\hat{\theta}^{(k)} = \arg(\mathbf{r}^H \tilde{\mathbf{a}}) \quad (2)$$

$$\tilde{\mathbf{a}} = \int_{\mathbf{a}} \mathbf{a} p(\mathbf{a} | r, \theta^{(k-1)}) d\mathbf{a} \quad (3)$$

위 식 (2)에서 QPSK 변조 방식이 사용되었을 경우  $\tilde{\mathbf{a}}$  은 다음과 같이 구해진다.

$$\tilde{\mathbf{a}} = [\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_{N/2}]$$

$$\tilde{a}_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \tanh\left(\frac{\Lambda_{2n}}{2}\right) + j \tanh\left(\frac{\Lambda_{2n+1}}{2}\right) \right) \quad (4)$$

식 (2)을 이용하여 추정된 위상 값은 다음과 같이 보상 된다.

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k-1)} e^{-j\hat{\theta}^{(k)}} \quad (5)$$

수신 신호가 보상 되면  $\Lambda_{f_n}$  을 다시 구하고 이 값을 이용하여  $\Lambda_{q_{mn}}$  을 갱신 시킨다. 이 방식은 위상 옵셋이  $[-30^\circ, 30^\circ]$  구간에서 시간에 관계없이 일정할 경우에는 낮은 SNR 에서도 좋은 위상 추정 성능을 보이나 위상 오프셋이 잔여 주파수 옵셋의 영향으로 시간에 따라 변하는 경우는 성능의 열화가 심하다. 따라서 위상 오프셋이 시간에 따라 변하는 경우 이러한 성능 열화의 문제점을 해결하기 위해 다음의 적응적 위상 동기 추정 방식이 제안되었다.

만약 위상 오프셋이 잔여 주파수 옵셋의 영향에 의해

시간에 따라 변한다면 위상을 기존의 방식처럼 부호어 블록 단위로 추정하는 것이 아니라 심벌 단위로 적응적으로 추정을 하여야 한다. 식 (2)는 다음과 같은 방식으로 다시 정리 할 수 있다.

$$\hat{\theta}^{(k)} = \sum_{i=1}^{N/\log_2^M} \arg(r_i^* \tilde{a}_i e^{-j\theta^{(i-1)}}) \quad (5)$$

식 (6)은 다음과 같이 적응적이고 반복적인 위상 추정 방식으로 표현할 수 있다.

$$e_i^{(k)} = \arg[\tilde{a}_i r_i^* e^{-j\hat{\theta}^{(k)}}] \quad (6)$$

$$\hat{\theta}_i^{(k)} = \hat{\theta}_{i-1}^{(k)} + \gamma e_i^{(k)} \quad (7)$$

단,  $\gamma$ 는 step size 이다. 식 (13)에서  $\hat{\theta}_i^{(k)}$ 는 시간  $t=1$ 에서 시간  $t=N/\log_2^M$ 로 즉 한 방향으로 위상을 추정 보상한다. 따라서 본 논문에서는 이러한 방식을 Uni-Directional Estimator (UDE)라 하였다. 제안된 시스템에서 LDPC 복호기의 입력 값으로 들어 오는 신호는 위상 옵셋에 대한 보상이 되지 않았기 때문에 신호의 왜곡이 심하다. 신호의 왜곡이 심한 경우에는 UDE 방식은 오류전달(error propagation) 현상에 의하여 그 성능이 떨어지게 된다. 이러한 오류전달의 문제점을 해결하기 위하여 다음의 Bi-directional Estimator (BDE) 방식이 제안되었다. LDPC 복호는 부호어 길이만큼의 심벌을 다 받은 다음에 가능하다. 따라서 적응적 위상 추정이  $t=1$ 부터 시작 할 수 있을 뿐만 아니라  $t=N/\log_2^M$ 부터도 시작 할 수 있다. 즉 위상의 추정 방향이 한 방향이 아닌 양방향일 수 있는 것이다. 이러한 경우의 위상 추정 방식은 다음과 같다.

$$e_i^{(k)} = \arg[\tilde{a}_i r_i^* e^{-j\hat{\theta}^{(k)}}] \quad (8)$$

a.  $k$ 가 홀수 일 경우

$$\hat{\theta}_i^{(k)} = \hat{\theta}_{i-1}^{(k)} + \gamma e_i^{(k)} \quad (9)$$

b.  $k$ 가 짝수 일 경우

$$\hat{\theta}_i^{(k)} = \hat{\theta}_{i+1}^{(k)} + \gamma e_i^{(k)} \quad (10)$$

제안된 BDE 방식은 오류 전달의 영향을 줄여주기 때문에 UDE 방식에 비해 성능이 뛰어나다 [3].

## B. Sub block estimator (SBE)

LDPC 코드의 장점중의 하나는 병렬 처리가 가능하다는 것이다. 그러나 제안된 방식은 매 심벌마다 적응적으로 위상을 추정하여야 하기 때문에 병렬 처리가 불가능하다. 따라서 적응적 위상 추정 방식에 의해 발생하는 지연을 해결하여야 한다. 이러한 문제점은 위상 옵셋을 Sub block 단위로 추정 보상 함으로서 해결 할 수 있다. UDE이나 BDE 방식이  $N/\log_2^M$  번의 위상 업데이트를 필요로 한다면 Sub block 단위로 위상을 추정 보상하게 될 경우에는  $N/\log_2^M/L$  번의 업데이트만을 필요로 한다. 단,  $L$ 은 Sub block의 길이이다.  $L$ 은 잔여 주파수 옵셋에 따라 그 길이가 길어지거나 작아질 수 있다. SBE의 위상 추정 방식은 다음과 같다.

$$e_l^{(k)} = \arg \sum_{i=1}^L [\tilde{a}_{L-(l-1)+i} r_{L-(l-1)+i}^* e^{-j\hat{\theta}_l^{(k)}}] \quad (11)$$

a.  $k$ 가 홀수 일 경우

$$\hat{\theta}_l^{(k)} = \hat{\theta}_{l-1}^{(k)} + \gamma e_l^{(k)} \quad (12)$$

b.  $k$ 가 짝수 일 경우

$$\hat{\theta}_l^{(k)} = \hat{\theta}_{l+1}^{(k)} + \gamma e_l^{(k)} \quad (13)$$

단,  $l$ 은 sub block 인덱스 이다.

## V. 실험 결과

제안된 방식의 성능을 평가하기 위하여 블록길이가 1008 이고 부호률이 0.5 인 LDPC 코드가 사용 되었고 최대 반복 복호 횟수는 50 이다. 변조방식으로는 QPSK 이다. 초기 위상 옵셋을 0 이라고 가정을 하였고, 잔여 주파수 옵셋  $\Delta f \cdot T = 2.47 \times 10^{-4}$  이다. 그림 5 는 제안된 UDE, BDE 방식과 기존의 위상 추정 방식의 성능을 비교한 성능 곡선이다. 위 성능 그래프에서 볼 수 있듯이  $E_b/N_0 = 10^{-4}$  에서 기존의 위상 추정 알고리즘은 이상적인 성능곡선보다 0.75dB 의 성능 열화가 생긴 반면 UDE, BDE 방식은 각각 0.5dB, 0.3dB 의 성능 열화가 발생함을 알 수 있다.

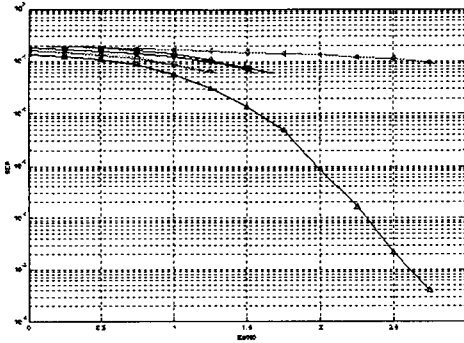


그림 2. BER between ODE and BDE

그림 6에서는 SBE 방식의 성능을 Sub block 크기  $L$ 에 따른 BER 성능을 비교하였다.

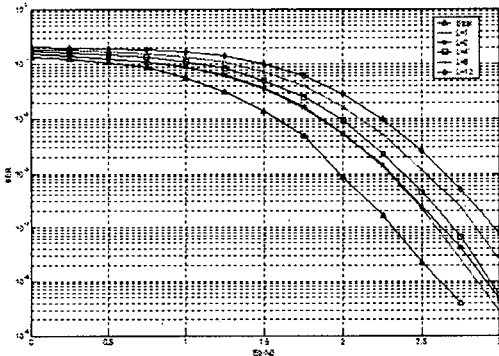


그림 3. BER for the each sub block size

위 성능 그래프에서  $L$ 의 크기가 커질수록 성능의 저하가 심하다는 것을 알 수 있다.  $L=2, 4$  그리고 8 일 때  $E_b/N_0 = 10^{-4}$ 에서 제안된 방식의 성능은 이상적인 성능 곡선에 비해 각각 0.3, 0.4 그리고 0.6dB의 성능 저하를 보임을 확인할 수 있다. 이러한 성능의 저하는  $L$ 의 크기가 커질수록 더해 질 것이다. 마지막으로 그림 6에서는  $L$ 의 크기에 따른 MSE (mean square error) 성능을 기존에 제안된 방식과 프리앰블을 사용하여 위상을 추정하였을 때와 비교하였다. MSE가  $10^{-2}$ 에서  $L$ 이 1일 때의 경우가  $L=2, L=4$ 일 때보다 0.2dB, 1dB 성능이 뛰어나다. 그리고  $E_b/N_0$ 가 증가할수록 제안된 방식이 프리앰블을 사용하여 위상을 추

정하였을 경우에 근접함을 알 수 있다.

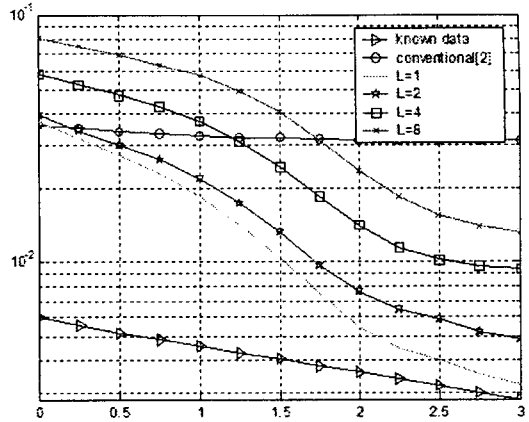


그림 4 Mean square error for each sub block size

## VI. 결론

본 논문에서는 위상 옵셋이 존재할 경우 LDPC 코드를 이용하여 위상을 추정 보상하는 방식에 대하여 알아 보았다. 기존의 위상 추정 방식은 위상 옵셋이 시간에 따라 변하지 않는 경우는 그 성능이 우수하나 잔여 주파수 옵셋에 의해 위상 옵셋이 시간에 따라 변하는 경우는 성능의 열화가 심하다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 UDE, BDE 그리고 SBE 위상 추정 방식을 제안 하였다. 제안된 방식이 위상 옵셋이 시간에 따라 변하는 경우는 기존의 알고리즘에 비해 그 성능이 뛰어난을 실험을 통하여 알 수 있었다.

## VII. 참고 문헌

- [1] R.G Gallager, *Low-Density Parity-Check Codes*. Cambridge, MA : M.I.T.Press, 1963.
- [2] Steendam, N. Noels, M. Moeneclaey, "Iterative carrier phase synchronization for low-density parity-check coded systems", *ICC'03*, vol.5, pp.3120-3124, 2003
- [3] Juhung Lee, Namshik Kim, Jaebum Kim and Hyuncheol Park, "Adaptive carrier phase synchronization for low density parity check coded systems", submitted to *Globecom 2004*