

## Kalman filter의 Quantization 영향분석

신상진\*,송택렬\*\*,곽영길\*\*\*,이강훈\*

한림에스티 기술연구소\*, 한양대학교 제어계측공학과\*\*, 한국 항공대학교 항공전자공학과

## A Study of Quantization Effect in Kalman Filtering

Shin Sang Jin\*, Song Taek Lyul\*\*, Kwag Yong Kil\*\*\*, Lee Kang Hun\*  
Hanrim ST R&D center\*, Hanyang Univ. \*\*, Hankuk Aviation Univ.

**Abstract** - Kalman filter를 필터링에 적용할 때 센서의 아날로그 신호에 들어오는 측정값의 잡음은 Gaussian 확률분포를 갖는다고 가정한다. 그러나 Kalman filter를 digital 컴퓨터에 적용할 경우에는 analog-to-digital converter에서 측정값의 잡음 이외에도 quantization 잡음이 존재하며 본 논문에서는 이러한 경우에 quantization 영향이 Kalman filter 알고리즘에 미치는 영향을 수치적으로 분석하여 quantization을 Kalman filter 구현에 고려해야 될 사항으로 분류하고자 한다.

## 1. 서 론

Analog 신호가 sampling 단계를 통해서 변환된 신호는 실제로 discrete가 아니고 digital 신호이다. 제어기 설계에서 digital 신호와 discrete 신호를 크게 구별하지 않고 사용하는 이유는 측정치에서 단지 quantization error가 발생함으로써 측정치의 정확도가 미약하게 상실되고 플랜트를 비롯한 전체 시스템을 구성하는데 아주 정확한 측정치와 그렇지 않은 측정치가 미치는 영향은 그리 크지 않기 때문일 것으로 판단된다. 제어기 설계에 시스템 상태변수의 정보가 필요한 현대제어에서는 센서에서 들어온 digital 신호를 처음으로 받는 곳은 제어기가 아니고 estimator이다. Luenberger observer[1]는 확률적 개념이 배제되었으므로 이를 사용할 경우에는 analog 신호를 digital 신호로 변환될 때 quantization error만 고려하면 된다. 그러나 확률적 개념을 기반으로 한 estimator 설계에서는 측정치의 analog 신호가 digital 신호로 변환될 때 quantization error에 의해 정밀도를 잃을 뿐 아니라 측정치가 가지고 있던 확률적 특성까지도 잃게 된다. 이 장에서 다루고자 하는 것은 이러한 확률적 특성의 변화가 MAP (maximum a posteriori) estimator인 Kalman filter에 어떤 영향을 미치는가를 수치적으로 보여줌으로써 estimator 구현에 대한 설계상 고려해야 할 점을 제공하는 것이다.

1960년에 R. E. Kalman이 'A new approach to linear filtering and prediction theory'란 제목으로 최적의 필터링 알고리즘을 발표한 이후 40여년간 많은 이공 학자들은 이 알고리즘을 주목하여 왔고 Kalman filter가 최적의 필터임을 여러 문헌에서 인용하고 있다. 그러나 이러한 최적의 필터는 많은 제약조건을 가지고 있다. 우선 필터링하는 대상체가 선형시스템이어야 하고 상태변수와 공정잡음을 비롯하여 측정 잡음까지 확률적 분포는 가우시안이어야 한다는 이론적 가정이 전제되어야 한다. 또한 이 Kalman filter는 디지털 컴퓨터로 구현되기 때문에 구현할 때에는 또 다른 가정이 추가되어야만 최적의 필터를 유지할 수 있다. 그러나 이러한 구현문제 관점에서 Kalman filter를 다룬 문헌은 찾아보기 힘들다. [2]은 컴퓨터를 사용하여 floating point 연산에 따른

round-off error에 대하여 수치적으로 안정된 방법을 제시하고 있다. [3]에서는 Kalman filter를 DSP(Digital Signal Processor)를 사용하여 구현하는데 있어서 자세한 알고리즘의 사용한 예를 보여주고 있으나 A/D(analog to digital) 변환에 있어서의 quantization error를 설계관점에서 고려하지 않았다. Adaptive filter 이론을 수록한 [4]에서는 A/D 변환에 대한 quantization error는 quantization level의 수가 충분히 클 때 신호에 독립적인 white Gaussian이 아닌 white uniform 노이즈로 모델링이 가능하다고 기술하고 있다. 이 장의 관심거리는 quantization 과정이 Bayesian rule을 이용하여 유도된 estimator인 Kalman filter에 어떤 영향을 미치는가를 보는 것이다. 이러한 영향에 대한 해석적 분석은 분석대상이 비선형특성이 짙게 나타나므로 인해서 용이하지 않으므로 수치적 방법에 의존하며 이를 가시적으로 보여줌으로써 estimator의 구현에 고려해야 할 점으로 제시하고자 한다.

## 2. Quantization 영향

## 2.1 칼만필터

Kalman filter 알고리즘의 유도 과정의 기원은 Andrei Nikolaevich Kolmogorov에 의해서 소개된 innovation-representation (whitening) approach[5]에서 찾아 볼 수 있다. 이 approach를 1960년에 Rudolf Emil Kalman이 discrete time system으로 확장하면서 linear MMSE estimation의 해를 찾아냈고 이후에 Thomas Kailath가 1968년에 continuous time system으로써 Kalman filter 알고리즘의 형태를 연구하였다. Kalman filter와 Wiener filter의 근본적인 차이점은 whitening function 알고리즘의 해를 구함에 있어서 spectral density function에 기초한 frequency domain 해법이 difference equation과 correlation에 기초한 time domain 해법으로 대체되었다는 것이다. 1970년에 [6]에서는 Kalman filter가 MAP(maximum a posteriori) estimator임을 증명하기 위해 measurement 획득이후에 a posteriori probability density function을 Bayesian rule을 써서 구하여 상태변수의 추정치와 공분산을 a posteriori probability density function의 평균과 공분산으로 설명하였다. 현재에 순수한 stochastic filter로써 Kalman filter를 다룬 문헌은 여러 곳에서 찾아볼 수 있고 이를 응용한 알고리즘들이 많은 문헌들로 발표되고 있다. 본 논문에서는 이러한 Kalman filter의 이론적 배경을 토대로 하여 현실적으로 적용할 경우에 발생하는 quantization이 Kalman filter에 어떠한 영향을 미치는가를 확률밀도함수를 사용하여 보여 주고자 한다.

## 2.2 Analog 신호와 Digital 신호

Analog 신호와 Digital 신호에 중간단계의 신호에는

discrete 신호가 있다. Discrete 신호란 시간에 따라 연속되지 않는 신호를 가리키는 용어으로써 수학적으로만 존재하는 것으로 실제 구현하는 문제에서 다루는 신호는 discrete 신호가 quantization 된 digital 신호이다.

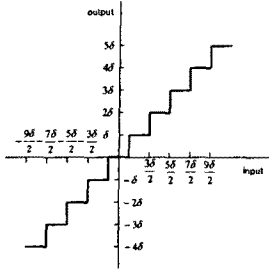


그림 1. Uniform Quantizer의 입출력 관계

Discrete system으로 설계된 필터링 알고리즘을 디지털 컴퓨터를 사용하여 구현할 때 두가지 무시하지 못할 점은 analog 신호가 digital 신호로 변환될 때 생기는 quantization error와 finite한 컴퓨터 word length에 의한 round-off error이다. 그림1은 일반적으로 ADC로 구현되는 uniform quantizer의 입출력 관계를 도시한 것이다. 여기서  $\delta$ 는 uniform step size이고 quantizing level은  $0, \pm\delta, +2\delta, \dots$ 에 해당된다. 만일 어떤 입력 신호가  $i\delta - \frac{\delta}{2}$ 와  $i\delta + \frac{\delta}{2}$  사이로 들어왔다면  $i\delta$ 값이 quantizer의 출력이 되고 여기서  $i$ 는 정수값이다. quantization error는 그 범위가 step size인  $\delta$  내부로 한정되어있고 신호의 출력이 언제나  $i\delta$ 로 주어지게 되므로  $\eta$ 를 quantization error라고 정의하면 quantizer의 입력은  $i\delta + \eta$ 로 표현될 수 있다. 여기서  $\eta$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$-\frac{\delta}{2} \leq \eta \leq \frac{\delta}{2} \quad (1)$$

[4]에서는 quantizer의 resolution이 높고 입력신호의 스펙트럼의 영역이 넓다면 quantization error  $\eta$ 를 입력신호에 추가적으로 부가된 independent white noise로 분류하여 모델링 하였다. 이때 quantization error  $\eta$ 의 확률밀도함수와 분산은 다음과 같은 표현이 가능하다.

$$f(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} & , -\frac{\delta}{2} \leq \eta \leq \frac{\delta}{2} \\ 0 & , \text{elsewhere} \end{cases} \quad (2)$$

$$\sigma^2 = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \frac{1}{\delta} \eta^2 d\eta = \frac{\delta^2}{12} \quad (3)$$

문헌[4]등에서는 quantization error를 고려하여 least-mean-square 알고리즘의 오차분석을 수록하였지만 이러한 quantization error를 고려하여 Kalman filter의 오차분석을 수행한 문헌을 찾아볼 수가 없다. 이러한 이유는 Kalman filter에 사용되는 확률분포가 더 이상 Gaussian 분포가 아니므로 해서 analytic solution을 구하는 것이 불가능하기 때문이다.

Quantization error를 고려하기 위해 다음과 같은 시스템 식을 생각해 보자.

$$\dot{x} = Fx + Gw \quad (4)$$

$$y_k = Mx_k + v_k \quad (5)$$

여기서 아래첨자  $k$ 가 없는  $x$ 와  $w$ 는 analog 신호이고 아래첨자  $k$ 가 있는  $y_k, x_k, v_k$ 는 discrete 신호이다. digital 컴퓨터에서 사용되는 digital 신호는 quantization error가 존재한다고 가정하고 위첨자  $D$ 를 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$y_k^D = Q[Mx_k + v_k] \quad (6)$$

여기서  $Q[\cdot]$ 는  $\cdot$ 을 quantization하는 양자화 함수이다. Bayesian rule을 사용한 Kalman filter의 유도방식은 다음과 같이 하고 있다.

$$f(x_k | Y_k) = \frac{f(x_k | Y_{k-1}) f(y_k | x_k, Y_{k-1})}{f(y_k | Y_{k-1})} \quad (7)$$

여기서  $x_k, y_k, Y_{k-1}$ 은 모두 discrete 신호의 표현이므로 실제 컴퓨터 내에서 계산할 수 있는 변수들이 아니다. Round-off error는 무시하고 quantization error만 생각하더라도 위의 식들은 다음과 같이 표현되어야 한다.

$$f(x_k | Y_k^D) = \frac{f(x_k | Y_{k-1}^D) f(y_k^D | x_k, Y_{k-1}^D)}{f(y_k^D | Y_{k-1}^D)} \quad (8)$$

Quantization error를 고려한 MAP estimator라는 것은  $f(x_k | Y_k^D)$ 의 확률분포를 구하는 것이 된다. 그러나 그러한 확률분포를 구한다는 것은 용이하지 않고 해석적인 recursive 알고리즘을 유도해 내는 것은 불가능하다

### 2.3 시뮬레이션

이 절에서는 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 확률밀도함수  $f(x_k | Y_k^D)$ 을 구하여 오차 분석을 수행한다. 시스템 상태방정식을 다음과 같은 스칼라 형태를 고려한다.

$$y_k^D = Q[x_k + v_k] \quad (9)$$

여기서  $v_k$ 는 평균이 '0'이고 분산이  $\sigma_v^2$ 인 white Gaussian 분포를 갖는 노이즈이고  $x_k$ 는 평균이  $\bar{x}_k=0$ , 분산이  $\sigma_x^2=1$ 인 가우시안 분포를 갖는 상태변수이다. 그림 2의 굵은 선과 가는 선중에서 가는 선은 그림 1에서  $\delta$ 가 0.8이고  $\sigma_R$ 가 0.4일 때  $f(x_k | y_k^D=0)$ 임을 도시한 것이다. 일반적인 Kalman filter를 컴퓨터로 구현하는데 있어서는 digital 신호인  $y_k^D$ 를 discrete 신호인 것처럼 받아드리므로 다음과 같은 계산을 수행한다.

$$\bar{x}_k = 0$$

$$\bar{P}_k = 1$$

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k(y_k^D - \bar{x}_k) \quad (10)$$

$$P_k = (I - K) \bar{P}_k \quad (11)$$

$$K_k = \bar{P}_k (\bar{P}_k + \sigma_R^2)^{-1} \quad (12)$$

위 계산을 통해서 구한 확률밀도함수는  $f(x_k | y_k^D=0)$ 을 마치  $f(x_k | y_k=0)$ 으로 가정한 것으로 계산한 것이고  $x_k$ 가  $x_k \sim N(\hat{x}_k, P_k)$ 임을 보여 주는 것이므로 이 경우에 있어서  $x_k \sim N(0, 0.1379)$ 의 값이 된다. 그림2의 굵은 선으로 표현된 것은  $x_k \sim N(0, 0.1379)$ 의 분포를 그린 것이다. 그림 2를 보면 quantization error를 고려했을 때 구한 가는 선의 확률밀도함수는 이를 고려하지 않은 굵은 선의 확률밀도함수보다 분산정도가 더 크다. 그림 3의 가는 선으로 표현된 것은 위와 같은 조건하에서  $f(x_k | y_k^D = \delta)$ 을 구한 경우이다. 그림 3의 굵은 선은  $y_k$ 의 값을  $\delta$ 값으로 받아드리며 마치 discrete 신호인 것처럼 식(10)-(12)식들을 사용하여  $f(x_k | y_k)$ 을 구한 확률밀도함수를 그린 것이다. 이때 식(10)-(12)을 통해서 구한 확률밀도함수는  $x_k \sim N(0.6897, 0.1379)$ 의 값으로 실제 확률밀도함수인 가는 선과 비교하면 분산 값도 다를 뿐만 아니라 평균값도 다르게 된다. 다시 말하면 quantization error는 필터의 추정치에 bias까지도 유발시킨다는 결론을 얻을 수 있다. 그림 4의 가는 선들은  $\sigma_R$ 가 0.1으로 하고  $\delta$ 를 1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4로 각각 변화시키

면서  $f(x_k, y_k^D=0)$ 를 도시한 것이다. 그림 4의 굵은 선은 식(10)-(12)을 이용하여 구한  $x_k \sim N(0, 0.0099)$ 을 나타낸다.  $\delta$ 값이 작아질수록 Gaussian 분포인  $N(0, 0.0099)$ 으로 가깝게 됨을 알 수 있다.

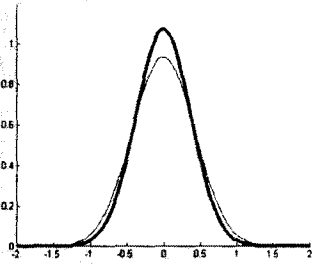


그림 2 확률밀도함수의 비교 1

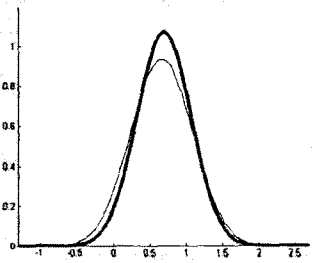


그림 3 확률밀도함수의 비교 2

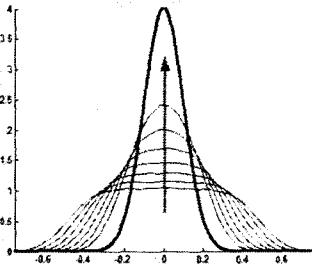


그림 4 확률밀도함수의 비교 3

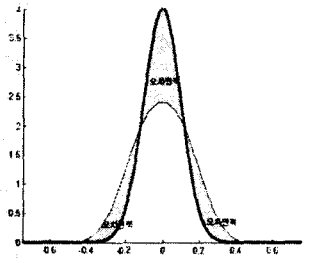


그림 5 확률밀도함수의 오차면적

Quantization error에 의해서 Gaussian 분포의 특성을 잃어버린 확률밀도함수와 이를 무시하여 Gaussian이라고 가정된 확률밀도함수와의 오차를 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 분석하기 위해서 그림 5와 같이 오차 면적

$A_e$ 을 정의한다. 이 오차 면적은 굵은 선으로 나타낸 확률분포와 가는 선으로 나타낸 확률분포의 차이를 나타낸 면적으로 오차면적의 범위는 두 확률밀도함수가 일치할 때는 '0'의 값을 갖고 완전히 일치하지 않을 때 '2'의 값을 갖게 된다. 그러나 실제로 이러한 경우는 발생하지 않으며  $A_e$ 는 다음과 같은 범위를 갖게 된다.

$$0 < A_e < 2 \quad (14)$$

또한 오차면적을 구할 때 측정치는  $y_k^D=0$ 을 사용한다. 그림 6은  $\sigma_k=0.02$ 이고  $\delta$ 가 0.02부터 0.9까지 변화할 때 생긴 오차면적을 도시한 것으로 가로축은  $\delta/2$ 을 나타내고 세로축은  $A_e$ 을 나타내고 있다.  $A_e$ 는  $\delta$ 에 대하여 단조증가함수가 되며  $A_e$ 가 급격히 증가하는  $\delta$ 값이 존재한다.  $A_e$ 가 큰 경우에는 시스템이 선형이고 공정잡음과 측정 잡음이 Gaussian 이더라도 Kalman 필터는 더 이상 최적 필터가 아니며 'best filter'도 될 수 없다.

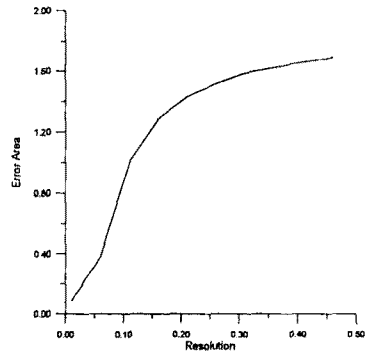


그림 6 오차면적

### 3. 결 론

센서에서 들어오는 아날로그 신호는 대부분 열잡음으로 인하여 Gaussian 확률분포로 모델링이 가능하다. 이러한 신호가 ADC에서 quantization 될 때에는 quantization 잡음이 섞이게 되며 Kalman filter에서 측정값은 quantizing level의 대푯값을 사용하게 된다. 본 논문에서는 이러한 경우에 Kalman filter를 그대로 사용할 경우에 그 추정값은 대부분 bias를 갖게 되고 공분산값도 실제값과 다르게 됨을 수치적 방법을 사용하여 증명하였다. Quantization이 있을 경우에는 측정 잡음을 비롯하여 상태변수의 확률분포도 더 이상 Gaussian이 될 수 없으며 이러한 경우는 해석적 방법으로 recursive한 알고리즘을 유도할 수 없는 것으로 판단된다.

### [참 고 문 헌]

- [1] Franklin, G. F. and Powell, J. D., Feedback Control of Dynamic Systems 3rd Edition, Addison Wesley, 1994
- [2] Grewal, M. S. and Andrews, A. P., Kalman Filtering : Theory and Practice Using MATLAB 2nd Edition, Prentice Hall, 1993
- [3] Lewis, F. L., Applied Optimal Control and Estimation, Prentice Hall, 1992
- [4] Haykin, S., Adaptive Filter Theory 2nd Edition, Prentice-Hall, 1991
- [5] Kolmogorov, A. N., "Interpolation and extrapolation of stationary random sequences,"Bull. Acad. Sci. USSR, Math. Ser., Vol. 5, pp.3-14, 1941
- [6] Jazwinski, A., Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, 1970