

LQR 제어기의 과도 상태 개선 방법에 관한 연구

박민호, 홍석교
아주대학교 전자공학부

A Study on the Improvement of Transient State of LQR Controller

Min-Ho Park, Suk-Kyo Hong
School of Electronics Engineering, Ajou University

Abstract - 이 논문은 최적 제어 설계방법 중 하나인 LQR 제어기의 과도 상태를 개선하는 방법에 관한 연구이다. 적절한 상태가중행렬과 제어가중행렬을 설정한 후 대수 Riccati 방정식을 풀면 LQR 제어가 설계된다. 그런데 이 가중행렬은 시행착오 방법을 이용하여 설정하기 때문에 설계된 제어기의 과도 상태를 개선하기 하기가 매우 어렵다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 방법으로 closed-loop 근과 가중행렬과의 상관관계를 수학적으로 표현하고, 이를 바탕으로 설계조건을 만족하도록 시스템의 근을 이동시키는 가중행렬을 구하는 방법을 제시한다. 원운동형 도립진자(rotary type inverted pendulum)를 통해 matlab 모의실험으로 그 타당성을 검증한다. 얻어진 결과를 이용하면 원하는 극점을 갖는 LQR 제어기를 체계적으로 설계할 수 있다.

1. 서 론

선형 시불변 시스템이 제어가능하고 관측가능한 경우에 LQR 제어기는 설계 매개변수인 가중행렬(weighing matrix) Q와 R의 값에 관계없이 여유 이득과 위상 이득을 보장하는 장점이 있다. 그러나 closed-loop 근과 가중행렬과의 관계가 단순하게 표현되지 않기 때문에 설계 조건을 만족하는 응답을 얻기 위해 수많은 시행착오를 통해 가중행렬을 선택해야하는 단점이 있다.

Kalman이 이러한 문제를 처음 제시하였고[1], Anderson은 동일한 closed-loop 근에 대해서 여러 개의 가중행렬이 존재한다는 것을 밝혔다[2]. 그리고 Soheim은 시스템이 서로 다른 실근으로 이루어진 경우에 제한적이지만 원하는 실근을 갖도록 하는 가중행렬을 구하는 방법 발표하였지만 복소수 근에 대해서는 그 해답을 명확하게 밝히지 못했다[3]. 그 이후 다른 연구자들은 복소수 근을 어느 일정범위를 벗어나지 않는 범위에서 허수축 방향으로 근을 이동시키는 방법에 대해서도 연구를 하였고, 최근에 T. Fujinaka는 시스템의 복소수 근을 실수축 방향으로 이동시키는 방법에 대해서 연구하였다 [4,5]. 그러데 T. Fujinaka가 제시한 방법은 입력이 하나인 경우에는 적용 할 수 없다는 문제점을 가지고 있다.

closed-loop 복소수 근과 가중행렬과의 상관관계에 대한 새로운 관계식을 정립하고, 임의의 방향으로 이동시키도록 하는 가중행렬을 수학적으로 찾는 방법을 제시한다. 그리고 이 방법을 원운동형 도립진자에 적용하여 과도응답(transient response)이 개선되는 것을 matlab 모의실험으로 확인한다.

이 논문 각장의 내용은 다음과 같다. 서로 다른 근을 가지는 시스템의 근중에서 실근을 이동시키는 방법은 제 2-1장 살펴보고, 제2-2장에서는 복소수 근을 이동시키는 새로운 방법을 제시한다. 예제로 제3장 예제에서는 원운동형 도립진자에 제시한 방법을 적용하여 모의실험하고 결과 분석한다. 제4장에서는 결론을 제시한다.

2. 최적 제어 이론

선형 시불변 시스템은 아래와 식 1)과 같이 표현한다.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

상태피드백(state feedback) 형태의 LQR 제어가 설계를 위해 시스템은 제어가능하고, 관측가능하다고 가정한다. 최적제어는 식 2)로 표현되는 성능함수(performance index)를 최소화하는 제어법칙 식 3)을 찾아내는 것이다. 여기서 상태가중행렬 Q는 양의 반한정대칭행렬(positive semi-definite symmetric matrix)이고 제어가중행렬 R은 양의 한정대칭행렬(positive definite symmetric matrix)이다. 이 논문에서는 R은 고정된 값으로 가정한다.

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \tag{2}$$

$$u = -Kx = -R^{-1}B^T Px \tag{3}$$

식 4)의 Hamiltonian 시스템으로부터 제어법칙의 변수 P는 가중행렬에 의해서 결정되는 대수 Riccati 방정식의 유일한 해이다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \tag{4}$$

여기서 시스템 행렬 A는 서로 다른 근을 가지는 경우로 제한을 둔다.

$$|sI - A| = \lambda_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{5}$$

이런 경우에 Hamiltonian 시스템의 특성방정식의 근은 시스템 근이 n이면 아래와 같이 2n로 나타난다.

$$|sI - F| = \pm \lambda_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{6}$$

2. 극점 이동 방법

2.1 실근 이동

시스템 행렬 A는 시스템에 따라 다양한 형태로 표현되어 일반화하기 어렵기 때문에 변환행렬(Transformation matrix) T를 이용해서 다루기 편하고, 일반화하기 적당한 대각행렬(Diagonal matrix)로 변환한다.

$$x = Tz \tag{7}$$

식 1)의 시스템은 식 8)과 같은 대각행렬 형태로, 성능함

수와 Hamiltonian 시스템은 아래와 같이 변환된다.

$$\dot{z} = Az + T^{-1}Bu, A = T^{-1}AT \quad (8)$$

$$J = \int_0^{\infty} (z^T \tilde{Q}z + u^T Ru) dt \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -\tilde{V} \\ -\tilde{Q} & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} = \tilde{F} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\tilde{V} = T^{-1}BR^{-1}B^T T^{-T} \quad (11)$$

여기서 $(\tilde{\cdot})$ 은 대각행렬에 관한 변수를 나타낸다. 시스템의 eigenvalue가 모두 실근이고, 한 번에 하나의 실근만을 원하는 위치로 이동시키는 상태가중행렬 \tilde{Q} 는 식 12)처럼 정의한다.

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \tilde{q}_{jj} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

그러면 Hamiltonian 시스템의 특성방정식은 식 13)으로 표현된다.

$$|sI - \tilde{F}| = [(s + \lambda_j)(s - \lambda_j) - \tilde{q}_{jj} \tilde{v}_{jj}] \prod_{i=1, i \neq j}^n (s + \lambda_i)(s - \lambda_i) \quad (13)$$

이 특성방정식의 근은 아래와 같이 나타난다.

$$s_i = \pm \lambda_i, i \neq j, i = 1, 2, \dots, n$$

$$s_j = \pm \sqrt{\lambda_j^2 + \tilde{q}_{jj} \tilde{v}_{jj}}$$

아래 두 조건에서 \tilde{Q} 를 구하는 식을 유도하면 식 14)가 된다.

조건 1 : $|sI - \tilde{F}| = |sI - F|$
 조건 2 : 상태가중행렬 \tilde{Q} 에 의해서 이동되는 근이 설계조건에 만족하는 근과 같다.

$$\tilde{q}_{11} = \frac{s_j^2 - \lambda_j^2}{\tilde{v}_{jj}} \quad (14)$$

제한 조건 식 15)는 상태가중행렬 \tilde{Q} 가 양의 반한정대칭행렬이라는 조건으로부터 얻어진다.

$$s_j < -|\lambda_j| \quad (15)$$

2.2 복소수 근 이동

한 쌍의 복소수 근 $\alpha \pm j\beta$ ($\beta \neq 0$)을 가지는 대각행렬 A 를 고려해보자.

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha + j\beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha - j\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

이 경우에 변환행렬 T 도 복소수가 된다. 복소수의 행렬은 다루기가 어려워서 식 17)으로 나타나는 다른 변환행렬 L 을 적용하여 실수를 갖는 행렬로 변환한다. 그러면

대각행렬 A' 은 식 18)로 표현되고, 상태가중행렬 \tilde{Q} 는 식 19)로 정의한다.

$$L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{j}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{j}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$A' = L^{-1}AL = \begin{bmatrix} -\alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\ -\beta & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 & \tilde{q}_2 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{q}_2 & \tilde{q}_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

식 11)에 행렬 L 을 적용하면 \tilde{V} 는 식 20)이 된다.

$$\tilde{V} = L^{-1}T^{-1}BR^{-1}B^T T^{-T} L^{-T} \quad (20)$$

복소수 근과 관련되는 부분만을 표시하면 아래와 같다.

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_{11} & \tilde{v}_{12} \\ \tilde{v}_{12} & \tilde{v}_{22} \end{bmatrix} \quad (21)$$

조건 1 : $|sI - \tilde{F}| = |sI - F|$
 조건 2 : \tilde{Q} 에 의해서 이동되는 복소수 근 $\gamma \pm j\delta$ 은 설계 조건을 만족하는 근과 같다.

가중행렬 \tilde{Q} 의 변수를 $\tilde{q}_1 = \rho \cos^2 \theta$, $\tilde{q}_2 = \rho \cos \theta \sin \theta$, $\tilde{q}_3 = \rho \sin^2 \theta$ 로 정의의 하고, 위의 두 조건과 식 13)의 특성방정식을 이용하면 식 22)과 식 23)의 수식이 유도된다.

$$e_{11} \tilde{q}_1 + e_{12} \tilde{q}_2 + e_{13} \tilde{q}_3 = 2(\gamma^2 - \delta^2 - \alpha^2 + \beta^2) \quad (22)$$

$$e_{21} \tilde{q}_1 + e_{22} \tilde{q}_2 + e_{23} \tilde{q}_3 = (\gamma^2 + \delta^2)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)^2 \quad (23)$$

여기서 $e_{11} = \tilde{v}_{11}$, $e_{12} = 2\tilde{v}_{12}$, $e_{13} = \tilde{v}_{22}$
 $e_{21} = \alpha^2 \tilde{v}_{11} + 2\alpha\beta \tilde{v}_{12} + \beta^2 \tilde{v}_{22}$
 $e_{22} = 2(\alpha^2 \tilde{v}_{12} + \alpha\beta(\tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{11})) - \beta^2 \tilde{v}_{12}$
 $e_{23} = \alpha^2 \tilde{v}_{22} - 2\alpha\beta \tilde{v}_{12} + \beta^2 \tilde{v}_{11}$

식 22)과 식 23)의 방정식으로부터 closed-loop 근과 상태가중행렬 \tilde{Q} 와의 관계가 식 24)의 θ 로 유도된다.

$$\theta = \text{atan}\left(\frac{-e_2 \pm \sqrt{e_2^2 - 4e_1 e_3}}{2e_3}\right) \quad (24)$$

여기서 $e_1 = e_{14} e_{21} - e_{24} e_{11}$
 $e_2 = e_{14} e_{22} - e_{24} e_{12}$
 $e_3 = e_{14} e_{23} - e_{24} e_{13}$

그리고 θ 는 실수이기 때문에 식 25)는 제한조건이 된다.

$$e_2^2 - 4e_1e_3 \geq 0 \quad (25)$$

ρ 는 식 22)과 식 24)으로부터 얻어진다.

$\gamma \pm j\delta$ 로 표현되는 임의의 복소수 근이 제한조건 식 25)를 만족하고, 설계조건을 만족하는 영역에 있는 존재하면 시스템의 복소수 근을 원하는 복소수 근으로 옮기는 상태가중행렬 \tilde{Q} 가 존재한다.

2.3 Q 계산

LQR 제어기 설계에서 초기값 Q_0 가 있는 경우에 최종적으로 얻어지는 상태가중행렬 Q 는 식 26)로 표현된다.

$$Q = Q_0 + T^{-T} \tilde{Q} T^{-1} \quad (26)$$

3. 예 제

원운동형 1축 도립진자를 이용하여 위에서 제시한 방법을 적용해 본다. 원운동형 1축 도립진자의 시스템 행렬은 아래와 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -15.8479 & 0 \\ 0 & 27.72 & 10.3326 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 16.5864 \\ -10.8141 \end{bmatrix}$$

가중행렬 Q, R 을 아래와 같이 설정하면 대수 Riccati 방정식으로 계산되는 상태피드백 이득 K_0 는 식 28)이다.

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1 \quad (27)$$

$$K_0 = [-3.1623 \quad -40.1679 \quad -3.6953 \quad -7.6710] \quad (28)$$

그리고 closed-loop 근을 계산하면 아래와 같다.

$$\text{eig}(A - BK_0) = \begin{matrix} -2.3110, \\ -25.4496 \\ -4.8751 \pm j0.9767 \end{matrix} \quad (29)$$

복소수 근을 이동시키는 상태가중행렬 \tilde{Q} 를 계산하기 위해서 한 쌍의 시스템 근이 아래와 같이 이동한다고 가정을 하자.

$$-4.8751 \pm j0.9767 \rightarrow -7.0195 \pm j3.7789 \quad (30)$$

식 24)으로부터 계산되는 θ 는 두 개가 존재한다.

$$\theta = 0.2219, 0.4413 \quad (31)$$

첫 번째 $\theta = 0.2219$ 로 Q 를 계산하면 식 32)이 된다.

$$Q = Q_0 + T^{-T} \tilde{Q} T^{-1} = \begin{bmatrix} 66.0912 & 31.6871 & 21.7468 & 29.9365 \\ 31.6871 & 27.9008 & 12.2852 & 16.9118 \\ 21.7468 & 12.2852 & 9.4313 & 11.6065 \\ 29.9365 & 16.9118 & 11.6065 & 16.9775 \end{bmatrix} \quad (32)$$

그리고 두 번째 $\theta = 0.4413$ 에 의한 Q 는 식 33)와 같다.

$$Q = Q_0 + T^{-T} \tilde{Q} T^{-1} = \begin{bmatrix} 66.0912 & 221.4716 & 31.2039 & 51.2781 \\ 221.4716 & 884.4622 & 123.2061 & 202.4673 \\ 31.2039 & 123.2061 & 18.3590 & 28.5263 \\ 51.2781 & 202.4673 & 28.5263 & 47.8780 \end{bmatrix} \quad (33)$$

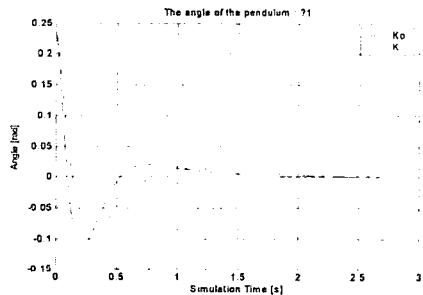
그리고 제어법칙 K 와 이때의 closed-loop 근은 식 34)과 식 35)로 나타난다.

$$K = [-8.1297, -62.3870, -6.5886, -12.5052] \quad (34)$$

$$\text{eig}(A - BK) = \begin{matrix} -2.3110 \\ -25.4496 \\ -7.0195 \pm j3.7789 \end{matrix} \quad (35)$$

식 30)으로 기술되는 극점 이동 조건은 정상상태 (steady state)에 도달하는 시간을 줄이고, Overshoot를 증가시키기 위해서 시스템의 복소수 근의 ζ 는 -0.1을 줄였고, ω_n 은 3을 증가 시키는 것이다.

도립진자가 약간 기울어진 상태를 초기 조건 ($x_0 = [0, 0.233, 0, 0]$)으로 하여 모의실험 결과가 그림1에 나타내었다. 이 그림은 상태가중행렬 Q 에 의해서 Overshoot가 증가했고, 정상상태에 도달 시간이 빨라진 것을 보여주고 있다.



[그림 1] 도립진자의 위치 변화

3. 결 론

LQR 제어기 설계 과정에서 시행착오 방법으로 가중행렬을 설정하거나 시스템의 복소수 근을 실수축 또는 허수축 방향으로 제한된 범위로 극점을 이동시키는 가중행렬을 계산하였다. 이 논문에서는 극점과 가중행렬의 새로운 관계식을 정립하고, 이 수식으로부터 극점을 임의로 이동시킬 수 있는 가중행렬을 수학적인 방법으로 계산하는 방법을 제시하였고, 원운동형 도립진자를 이용하여 그 타당성을 검증하였다.

이 결과가 갖는 의미는 LQR 제어기 설계에서 복소수 근을 임의의 복소수 근으로 이동시키는 상태가중행렬을 체계적으로 계산하는 방법을 제시한 것이다.

이 논문에서는 시스템의 복소수 근을 다른 두 개의 실근으로 옮기는 것을 다루지 못하고 있다. 이 문제는 향후 연구 과제로 남겨 둔다.

[참 고 문 헌]

- [1] R. E. Kalman, "When is a linear control system optimal?" Tran. ASME J. Basic Engineering, vol. 86, pp. 1 10, 1964
- [2] B. D. O. Anderson, J. B. Moore, Optimal Control, Prentice-Hall, 1989
- [3] O. A. Solheim, "Design of optimal control systems with prescribed eigenvalues", Int. J. Control, vol. 15, pp. 143 160, 1972
- [4] T. Fujinaka, H. Shibata, "Admissible Region for pole positioning with optimal regulator", Proc. IEEE CDC, Kobe, Japan, pp. 3631 3635, 1996
- [5] T. Fujinaka, S. Omatsu, "Pole placement using optimal regulators", T.IEE Japan, vol. 121 c, 2001