

블럭펄스함수를 이용한 모델축소의 대수적 접근방법에 관한 연구

조영호 · 심재선 · 민경설 · 임윤식

한국항공우주산업(주) · 삼척대학교 전기공학 · 지형엔지니어링 · 여주대학교 방송제작계열

A study on Algebraic Approach Method for Model Reduction Via BPF

Cho YoungHo, Shim JaeSun, Min GyeongSeol, Lim Yunsic  
Korea aerospace Industries LTD., Samcheok Univ. Jihyoung eng. Yeooju Univ.

**Abstract** - 본 논문은 고차 시스템의 응답에 가장 최적의 응답을 갖는 저차 시스템의 응답을 갖도록 최적응답 방법에 블럭펄스 함수를 적용하여 대수적인 방법으로 저차 시스템의 파라미터를 구하는 알고리즘을 제시하였다.

의 파라미터를 구하는 알고리즘을 제시하고자 한다.

1. 서 론

2. 블럭펄스 함수 변환

로봇이나 항공기 등과 같이 복잡하고 통합된 첨단 기술의 발달로 실제적인 물리계는 고차 시스템으로 표현되는 경우가 대부분인데 시스템이 차수가 커지면 그 시스템의 동작을 이해하기가 어렵고 또한 제어기 설계가 복잡해진다. 따라서 고차 전달함수의 차수를 줄이거나 상태 행렬의 배열을 감소시켜 고차 시스템의 유사한 특성을 지니는 저차 시스템을 얻는다면 시스템의 해석과 제어기 설계가 용이해 질 것이다. 그래서 모델 축소에 관한 연구는 많이 진행되어 왔고 현재도 활발히 연구되고 있다. 시스템의 지배극은 유지시키고 무의미한 극은 제거시켜 축소된 모델을 얻는 지배극 유지(dominant pole retention)방법은 시스템이 응답 초기에만 영향을 미치고 유지된 극들이 시스템의 전체동작에 영향을 미치기 때문에 축소된 모델의 응답이 고차 시스템의 응답과 유사하게 나타난다. 하지만 이 방법은 먼저 선행 조건으로 고차 시스템의 지배 극을 구해야 되는데 시스템의 차수가 커지면 커질수록 지배 극을 결정하기가 어려워지고 어떤 시스템은 지배극 자체를 규정하기가 어려운 경우도 있다. 따라서 이 방법은 일반적인 모델 축소방법이라고 할 수 없다[1]. 고차 시스템을 연분수 전개하여 고차 시스템과 유사한 응답을 갖는 항은 남기고 나머지 항은 제거시켜 축소된 모델을 얻는 연분수 전개(continued fraction) 방법 있는데 이 방법은 고차 시스템이 안정할 때 축소된 모델이 항상 안정하다는 보장을 할 수 없는 단점이 있다[2]. 그래서 고차 시스템의 응답에 가장 최적의 응답을 갖는 저차 시스템을 얻는 방법으로써 Anderson이 시간 영역에서 최소 차승오차를 최소로 줄이는 저차 시스템을 얻기 위해 직교 투영법에 기초한 기하학적 접근방법에서 시작되었다. 또한 Shih와 Phlle는 두 시스템의 응답 사이의 오차를 최소화하기 위한 matrix psedoinverse의 응용을 제시하였다[5].

블럭펄스 함수는 연속계를 이산계로 변환하는데 편리하며 컴퓨터 연산에 직접 적용할 수 있는 계산상의 잇점이 있다. 블럭펄스 함수

$\Psi_k(t)$ 는 구간  $0 \leq t < t_f$ 에서 식(2.1)과 같이 정의되며, 식(2.2), (2.3)을 만족하는 직교함수이다[4-8].

$$\Psi_k(t) = \begin{cases} 1 & (k-1)\frac{t_f}{m} \leq t < k\frac{t_f}{m} \\ 0 & \text{그 외 구간} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\Psi_k(t) \Psi_l(t) = \begin{cases} \Psi_k & k=l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\int_0^{t_f} \Psi_k(t) \Psi_l(t) dt = \begin{cases} \frac{t_f}{m} & k=l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (2.3)$$

블럭펄스 함수  $\Psi_k(t)$ 는 k번째 세부구간에서만 +1 값을 갖고, 나머지 구간에서는 모두 0이므로 절대 적분 가능한 임의의 함수  $x(t)$ 는 블럭펄스 함수로 다음과 같이 유한급수 전개된다.

$$x(t) \cong \sum_{k=1}^m X_k \Psi_k(t) \quad (2.4)$$

$$X_k \cong \frac{1}{2} [ x(k\frac{t_f}{m}) + x((k-1)\frac{t_f}{m}) ] \quad (2.5)$$

단,  $k=1, 2, \dots, m$   
블럭펄스 함수의 정방향 적분은 다음과 같이 주어진다[4][5].

$$\int_0^{t_f} \Psi(\tau) d\tau \cong P \Psi(t) \quad (2.6)$$

여기서 블럭펄스 함수의 정방향 적분 연산행렬은 다음과 같다.

$$P = \frac{t_f}{m} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

3. 블럭펄스 함수에 의한 모델 축소 기법

다음과 같은 n차의 시스템을 축소 모델로 변형시킬 경우

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

다음과 같이 r차의 축소된 시스템으로 가정하면

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r u_r(t) \\ y_r(t) &= H_r x_r(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

단,  $r < n$

저차의 출력  $y_r(t)$ 가 임의의 입력에 대해 고차의 출력  $y(t)$ 에 접근 하도록 파라미터 ( $A_r, B_r, C_r$ )을 결정해야 한다. 임의 입력에 대한 고차와 저차의 출력 간의 오차는 다음과 같다.

$$e(t) = y(t) - y_r(t) \quad (3.3)$$

다음과 같은 자승 형태의 평가 함수를 고려하여

$$J = \int_0^{t_f} e^2(t) dt \quad (3.4)$$

이 평가 함수를 최소화하는 저차 시스템의 파라미터를 결정하는 것이 최적 응답 방법이다.

고차의 출력  $y(t)$ 와 저차의 출력  $y_r(t)$ 를 블록펄스 급수 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$y(t) = \sum_{k=1}^m C_k \Psi_k(t) \quad (3.5)$$

$$y_r(t) = \sum_{k=1}^m C_{rk} \Psi_k(t) \quad (3.6)$$

식 (3.5)와 (3.6)을 식(3.4)에 대입하여 평가 함수를 구하면 다음과 같다.

$$J = \sum_{k=1}^m (C_k - C_{rk})^2 \quad (3.7)$$

다음과 같은  $n$ 차의 선형 시불변 전달 함수를 축소시킬 경우

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0} \quad (3.8)$$

식 (3.8)을 미분 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) \\ = b_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} u(t) + b_{n-2} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} u(t) + \dots + \\ b_1 \frac{d}{dt} u(t) + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

전달 함수를 미분 방정식으로 표현하면 일반적인 상태 방정식 표현에서  $n^2+n$  개의 파라미터 수가  $2n$  개로 감소됨을 알 수 있다.

식 (3.9) 양변에  $n$  회의 적분을 취하여 적분 방정식으로 변환하면 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} y(t) + a_{n-1} y^{(1)}(t) + \dots + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_0 y^{(n)}(t) \\ = b_{n-1} u^{(1)}(t) + b_{n-2} u^{(2)}(t) + \dots + b_1 u^{(n-1)}(t) + b_0 u^{(n)}(t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

여기서 위 첨자는 적분 횟수를 의미한다.

고차 시스템의 입력  $u(t)$ 을 블록펄스 함수 유한급수 전개하면 다음과 같다.

$$y(t) = \sum_{k=1}^m U_k \Psi_k(t) \quad (3.11)$$

식 (2.7), (3.5), (3.11)을 식 (3.12)에 대입하여 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C^T \Psi(t) + a_{n-1} C^T P \Psi(t) + \dots + a_1 C^T P^{n-1} \Psi(t) \\ + a_0 C^T P^n \Psi(t) = b_{n-1} U^T P \Psi(t) + b_{n-2} U^T P^2 \Psi(t) \\ + \dots + b_1 U^T P^{n-1} \Psi(t) + b_0 U^T P^n \Psi(t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

식 (4.23)에서  $\Psi(t)$ 는 소거가 가능하디 그러므로 임의의 입력  $U$ 가 결정되면 출력을 구할 수 있다. 만일 입력이 단위 입력이면 입력에 대한 블록펄스 계수 벡터는 다음과 같다.

$$U = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1] \in R^m$$

그러므로 출력의 계수 벡터  $C$ 는 다음 식에서 얻어진다.

$$\begin{aligned} C = [I + a_{n-1} P + a_{n-2} P^2 + \dots + a_1 P^{n-1} + a_0 P^n]^{-1} \\ \times [b_{n-1} P^1 U + b_{n-2} P^2 U + \dots + b_1 P^{n-1} U + b_0 P^n U] \end{aligned} \quad (3.13)$$

식 (3.8)에 대한 축소 모델의 전달 함수를 다음과 같이 가정하여

$$\frac{Y_r(s)}{U(s)} = \frac{\beta_{r-1} s^{r-1} + \beta_{r-2} s^{r-2} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^r + \alpha_{r-1} s^{r-1} + \alpha_{r-2} s^{r-2} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (3.14)$$

단,  $r < n$

식 (3.8) 모델과 같은 절차에 따라 축소 모델을 식을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C_r + a_{r-1} P^1 C_r + a_{r-2} P^2 C_r + \dots + a_1 P^{r-1} C_r + a_0 P^r C_r \\ = \beta_{r-1} P^1 U + \beta_{r-2} P^2 U + \dots + \beta_1 P^{r-1} U + \beta_0 P^r U \end{aligned} \quad (3.15)$$

식 (3.7)에 의해 고차와 저차 시스템 간의 출력의 최소 자승 오차를 최소화하려면  $\partial J / \partial C_r = 0$ 을 만족해야 한다. 즉,  $C = C_r$  일 때  $J$ 가 최소가 됨을 알 수 있다.

따라서 식 (3.15)에 고차의 출력 계수 벡터  $C$ 를 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} C + a_{r-1} P^1 C + a_{r-2} P^2 C + \dots + a_1 P^{r-1} C + a_0 P^r C \\ = \beta_{r-1} P^1 U + \beta_{r-2} P^2 U + \dots + \beta_1 P^{r-1} U + \beta_0 P^r U \end{aligned} \quad (3.16)$$

와 같이 되고, 식 (3.16)을 행렬 표기로 쉽게 표시해 보면 다음과 같다.

$$C = QR \quad (3.17)$$

$R$ 은 미지 파라미터 벡터로써 다음과 같다.

$$R = [\alpha_{r-1} \ \alpha_{r-2} \ \dots \ \alpha_1 \ \alpha_0 \ \beta_{r-1} \ \beta_{r-2} \ \dots \ \beta_1 \ \beta_0]^T \quad (3.18)$$

그리고,  $Q$ 는  $m \times 2r$  행렬로 다음과 같다.

$$Q = [ -P^1 C \ -P^2 C \ \dots \ -P^{r-1} C \ -P^r C \\ P^1 U \ P^2 U \ \dots \ P^{r-1} U \ P^r U ] \quad (3.19)$$

식 (3.17)은 미지수의 개수보다 더 많은 독립 방정식의 개수가 존재하는 경우로써 미지 파라미터 벡터  $R$ 은 정확한 해 (exact solution)가 존재하지 않는 경우이다.

따라서 미지 파라미터 벡터  $R$ 은  $\|C - QR\|$ 를 최소화 하는 최소 자승해 (least squares solution)인  $R$ 로 얻을 수 있다. 이 최소 자승해는 matrix pseudoinverse를 취함으로써 구해진다. 따라서  $R$ 은 left pseudoinverse를 취하여 다음 식에서

$$R = [Q^T Q]^{-1} Q^T C \quad (3.20)$$

미지 파라미터  $R$ 이 구해진다.

여기서,  $\|\cdot\|$ 는 Euclidean norm를 나타낸다.

#### 4. 시뮬레이션

본 장에서는 먼저 주어진 모델로부터 제안한 방법으로 축소 모델을 구하고 타 방법들을 통하여 얻어진 축소 모델과 원 모델의 출력 특성을 비교하였다. 다음과 같은 3차의 시스템을 고려하자.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+4}{s^3+6s^2+11s+6} \quad (4.1)$$

블록펄스 전개항수  $m=200$ 으로 하고 시간은  $t_f=6$  설정하였다. 입력은 단위 입력을 사용하여 고차의 출력과 축소 모델의 출력 파형을 비교하였다.

다음은 저차 시스템의 전달함수라 가정하자.

$$\frac{Y_r(s)}{U(s)} = \frac{\beta_1 s + \beta_0}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (4.2)$$

여기서 미지의 파라미터  $\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \beta_0$ 를 결정하면 원하는 축소된 모델을 얻을 수 있다.

다음의 결과들은 여러 가지 축소 방법들에 의하여 얻어진 축소 모델 시스템이다.

● 지배극(dominant pole) 유지 방법에 의한 축소 모델의 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{Y_r(s)}{U(s)} = \frac{1.3333333}{s^2 + 3s + 2} \quad (4.3)$$

● 연분수 전개에 의한 축소 모델의 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{Y_r(s)}{U(s)} = \frac{-0.0150375s + 1.142857}{s^2 + 2.6917293s + 1.7142857} \quad (4.4)$$

● 블록펄스 함수에 의한 축소 모델의 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{Y_r(s)}{U(s)} = \frac{-0.0168s + 1.1332}{s^2 + 2.6579s + 1.7023} \quad (4.5)$$

그림 4.1 ~ 그림 4.4는 고차 시스템과 각 방법으로 얻어진 저차 시스템들의 출력 값이다. 그림 4.5는 고차 시스템과 각 방법으로 얻어진 저차 시스템의 응답의 오차를 비교한 것이다.

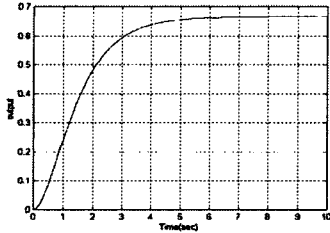


그림 4.1 고차 시스템의 출력  
Fig. 4.1 Output of high-order model

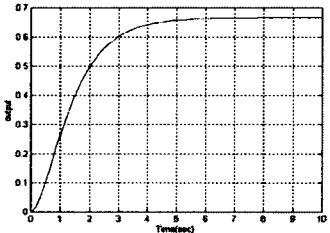


그림 4.2 지배극 방법에 의한 저차시스템의 출력  
Fig. 4.2 Output of low-order model for dominant pole retention method

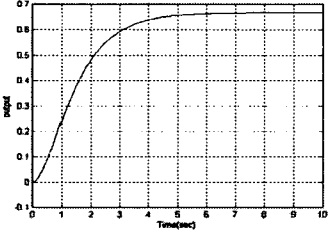


그림 4.3 연분수 전개에 의한 저차시스템의 출력  
Fig. 4.3 Output of low-order model for continued fraction method

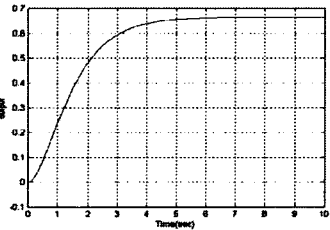


그림 4.4 블럭펄스 함수에 의한 저차시스템의 출력  
Fig. 4.4 Output of low-order model using BPF

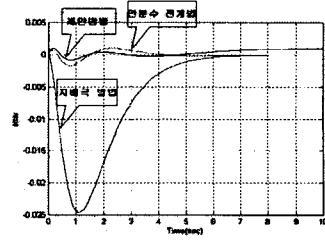


그림 4.5 출력 오차의 비교  
Fig. 4.5 Comparison of output error

## 5. 결론

본 연구에서는 최적 응답 방법에 블럭펄스 함수를 적용하여 대수적으로 모델 축소기법을 제시하였는데 얻어진 결론은 다음과 같다.

- (1) 임의의 저차 모델의 파라미터는 최소 차승해가 되어 Euclidean norm을 최소화하는 최적한 값으로 구해진다. 따라서 본 논문에서는 기존의 최적 응답 방법에서 축소 모델의 미지 파라미터를 구하기 위한 시행착오법의 번거로움을 피할 수 있다.
- (2) 연속계 시스템에 블럭펄스 함수를 전개함으로써 출력  $y(t)$ 를 이산치  $t=[0, T]$ 의 주기 안에서 이산치 값  $y_i$ 와 저차의 출력  $y_r(t)$ 의 이산치 값  $y_{ri}$  사이의 자승오차를 최소화하는 방법으로 축소된 모델을 얻었다. 그러므로 컴퓨터의 적용이 용이하다.
- (3) 블럭펄스 함수의 적분 연산행렬을 적용함으로써 대수 방정식만으로 계산하기 때문에 알고리즘과 계산이 간단한 대수연산만으로 구성되어 있다.
- (4) 시뮬레이션을 통해 오차를 비교한 결과 다른 방법에 비해 오차 값을 작게 가지므로 저차 시스템의 응답 특성이 고차 시스템의 응답과 유사함을 알 수 있다.

## 참고 문헌

- [1] Edward. J. Davison "A Method for Simplifying Linear Dynamic systems," IEEE Transactions of Automatic Control, vol AC-11 No 1,1966, pp.93-101.
- [2] Chen,T.C.and Chang, C.Y.and Han.K.W., "Model reduction using the stability equation and the continued fraction method," Int.J.Control, Vol.32, No.1,pp.81-94,1980.
- [3] Sinha,N.K and Bereznaï,G.T., "Optimum approximation of high order system by low-order models," Int.J.Control, Vol.14, No.5,pp.951-959, 1971.
- [4] 안두수, "walsh 함수와 시스템 제어", 복두출판사, 2000
- [5] Z.H.Jiang,W.Schaufelberger, "Block Pulse Functions and Their Applications in Control Systems," Springer-Verlag, 1992
- [6] Cheng- China Liu and Yen-Ping shih " Model reduction via Chebyshev Polynomials, "Comput. & Elect.Eng, Vol 12, No 3/4 1986, pp.89-100
- [7] Chen,W.L,and Chung, C.Y, " New integral operational matrix in block pulse series analysis," Int.J.Systems Sci., Vol.18, pp.403-408, 1987
- [8] Palanisamy,K.R and Bhattacharyya, D.K., "System identification via block pulse functions," Int.J.Syst.Sci,Vol.12,pp.643-647, 1981