

# 지대공 유도탄 기체진동 제거를 위한 강인 밴딩 주파수 추정필터

## A Robust Bending Frequency Estimator for SAM Application

나원상, 송찬호

국방과학연구소, 유도조종기법팀  
305-600 대전광역시 유성우체국 사서함 35-3  
{wonsang, chsong}@add.re.kr

### Abstract

A robust bending frequency tracker is proposed to design the adaptive notch filter which removes the time-varying missile structural mode from the sensor measurements. To design the bending frequency tracker, firstly, the signal model is derived from the input-output relationship of Nehorai notch filter structure. Also, the time-varying nature of the bending frequency is modelled as the norm-bounded uncertainty. Based on the uncertain signal model, it is shown that the design problem of robust bending frequency tracker can be casted into that of adaptive robust  $\mathcal{H}_\infty$  filter or equivalently robust LMS filter.

### 1 서론

본 논문에서는 유도탄 제어루프의 안정성을 저해하는 기체진동 신호 제거를 위한 강인 밴딩 주파수 추정기 설계 문제를 고려한다. 구동 날개 혹은 기타 외란 등에 의해 유도탄에 충격이 인가되면 기체의 휨 현상에 의해 조종 루프의 되먹임 신호에 뜻하지 않은 진동 신호가 실리게 된다. 이렇게 유발된 진동 신호를 기체 밴딩으로 정의하며, 밴딩 주파수는 유도탄의 구조적 특성에 의해 결정된다. 기체 밴딩에 의한 진동 신호는 주파수 특성 및 부호에 따라 그 크기가 매우 작은 경우라도 조종 루프의 불안정성을 초래하는 원인이 될 수 있다 [1]. 이러한 문제점을 해결하기 위한 가장 일반적인 방법은 감지기 출력단 혹은 조종루프 앞단에 노치 필터를 삽입하는 것이다. 이 경우, 노치 필터 설계는 비행이전에 수행하는 유도탄 구조분석 시험에 의해 측정 혹은 예측된 밴딩 주파수 및 감쇄계수를 기반으로 한다. 불행하게도 실제 비행상황에서 벌어지는 환경적 불확실성 등에 의해 유도탄의 구조적 특성이 변화하므로, 예측된 밴딩 주파수 값과 실제 밴딩 주파수 간에 오차가 존재하는 경우가 많다. 따라서 다양한 상황에 대처하기 위해서는 예측된 밴딩 주파수를 중심으로 비교적 넓은 주파수 영역에 존재하는 신호를 제거하는 것이 바람직하다. 반면, 조종루프 설계관점에서는 필터에 의해 감소되는 위상여유 크기를 최소화하기 위해 가급적 노치 성능이 우수하도록 필터를 설계하는 것이 유리하다.

최근 고기동 유도조종 루프의 설계가 일반화 되고 있

고 이에따라 조종루프의 상대 안정도 확보가 매우 어려운 상황에서 노치 필터 설계에 의한 안정도 저하 문제를 해결하기 위한 방법으로 적응 노치필터의 필요성이 대두되는 실정이다. 기존의 적응 노치필터 설계 방법들은 일반적으로 주파수 추정문제를 최적화 문제로 접근하여 수치해석 방법을 이용해 주파수를 찾아내거나, 간단한 정현파 신호 모델을 이용한 확장 칼만 필터 알고리즘 등이 주류를 이루고 있다. 하지만 이러한 방법들은 감지기의 측정 잡음에 매우 취약하거나, 실시간 문제 및 필터 운용상의 안정성이 고려되어야 하는 탐제 알고리즘의 특성상 적합하지 않은 경우가 대부분이다.

본 논문에서는 진술한 문제점들을 고려하여 실시간 강인 밴딩 주파수 추정기를 제안한다. 제안되는 밴딩 주파수 추정기는 예측된 밴딩 주파수와 실제 밴딩 주파수 간의 오차를 상태변수로 하며, 구조시험에 의해 얻어진 기체 동특성을 밴딩 신호 모델링에 충실히 반영한 것이다. 주파수 추정기 설계를 위해 우선 전형적인 최소 변수 노치필터 구조로 부터 주파수 오차를 상태변수로 하는 신호 모델을 찾아내고, 밴딩 주파수의 시변 특성은 크기가 제한되어 있는 불확실성으로 모델링한다. 유도된 신호 모델을 근거로 강인  $\mathcal{H}_\infty$  필터링 알고리즘을 이용한 주파수 추정 알고리즘을 제안한다. 제안된 방법은 시변 주파수 특성에 강인한 특성을 가질 뿐만 아니라 추정된 주파수 오차의 크기를 지속적으로 감시함으로써 구조적으로 주파수 추정기의 이상 동작에도 대처가능하다는 장점을 갖는다.

### 2 단일 변수 노치 필터 구조를 이용한 밴딩 주파수 추정 문제 정의

진동 주파수의 함수로 주어지는 이산시간 단일 변수 노치필터 구조는 다음과 같다 [2].

$$\frac{E(z)}{D(z)} = \frac{1 - 2\cos\omega z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r_\infty \cos\omega z^{-1} + r_\infty^2 z^{-2}} \quad (1)$$

전달함수 (1)로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$e_k = \underbrace{d_k}_{\triangleq y_k} + \underbrace{d_{k-2} - r_\infty^2 e_{k-2}}_{\triangleq x_k} - 2 \underbrace{\cos\omega}_{\triangleq H_k} (d_{k-1} - r_\infty e_{k-1}) \quad (2)$$

위의 식으로부터 진동 주파수 추정 문제는 측정치  $y_k$ 로부터 계수행렬  $H_k$ 이 주어져 있는 경우 시변 파라미터

$x_k$ 를 동정하는 문제로 정의할 수 있다. 감지기에 의해서 측정된 각속도는 강제 운동과 기체 벤딩 신호를 포함하므로, 조종루프의 대역폭 보다 2.5 ~ 3.0배 넓은 대역폭을 갖는 고역 통과 필터를 이용하여 기체 벤딩 신호  $d_k$ 만을 추출해 낼 수 있다. 단, 감지기 측정잡음에는 백색잡음으로 모델링 할 수 없는 다양한 형태의 오차 요인이 포함되어 있을 뿐만 아니라, 고역 통과 필터를 거치면서 모든 잡음이 유색화 되므로 적응 노치 필터를 설계함에 있어 이러한 상황을 고려하는 것이 바람직하다.

동정하고자 하는 파라미터  $x_k$ 의 시변 특성을 억제 한 조건을 만족하는 불확실성  $\|\Delta_k\| \leq 1$  으로 모델링 하고, 측정 잡음을  $v_k$ 라고 하면 다음과 같은 상태 방정 식을 정의할 수 있다.

$$\begin{cases} x_{k+1} = (1 + \alpha)x_k = (1 + D\Delta_k K)x_k, \\ y_k = H_k x_k + v_k \end{cases} \quad (3)$$

전술한 대로 진동 주파수 추정 시 유색 잡음  $v_k$ 를 고려 하기 위해, 초기 파라미터 추정오차  $\tilde{x}_k = x_0 - \hat{x}_{k|k-1}$ 와 외란  $v_k$ 로부터 추정오차  $e_k$ 로의  $\mathcal{H}_\infty$  놈을 제한하는 불확정 선형 시스템 (3)에 대한 준최적 강인 적응  $\mathcal{H}_\infty$  필터 설계 문제를 고려한다.

$$\sup_{v \in h_2} \frac{\sum_{j=0}^k e_j^2}{P_{0|1}^{-1} \tilde{x}_0^2 + \sum_{j=0}^k v_j^2} < \gamma^2 \quad (4)$$

잘 알려진 바와 같이 개념적으로 적응  $\mathcal{H}_\infty$  필터는 LMS 알고리즘과 동일하므로 시변 특성에 민감한(risk-sensitive) 알고리즘이다. 따라서 시변 특성에 둔감한(risk-neutral) 순차 최소 자승(RLS) 알고리즘과 달리 시변 특성을 고려하기 위해 망각 계수를 이용한 윈도우 개념을 사용할 필요가 없다 [3]. 또한 본 논문에서는 파라미터 시변 특성을 억제 한 조건을 이용하여 모델링 하고 필터 설계 시 이를 고려함으로써 파라미터 변화에 의한 평균 최소 자승(LMS) 알고리즘의 순간적인 천이 맥동 현상을 최소화 할 수 있을 것으로 기대된다. 즉, 다음 절에서 소개되는 강인 적응  $\mathcal{H}_\infty$  필터는 강인 LMS 알고리즘으로 분류될 수 있다.

### 3 벤딩 주파수 추정 알고리즘

본 절에서는 최근 소개된 강인  $\mathcal{H}_\infty$  필터링 알고리즘을 이용한 적응 벤딩 주파수 추정 알고리즘을 제안한다. 이를 위해 우선, 일반적인 이산시간 불확정 선형 시스템에 대한 강인  $\mathcal{H}_\infty$  필터식을 표 1에 제시하였다. 파라미터 시변 특성을 고려한 적응  $\mathcal{H}_\infty$  필터는 다음 관계를 이용하여 손쉽게 유도할 수 있다.

$$F_k \mapsto I, \quad G_k \mapsto 0, \quad \tilde{G}_k \mapsto D, \quad L_k \mapsto H_k \quad (5)$$

벤딩 주파수 추정문제의 경우 계수 행렬  $H_k$  및 오차 공분산 행렬  $P_{k|k}$ 이 모두 스칼라 값이므로, 스칼라 적응  $\mathcal{H}_\infty$  필터식은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k} = & \left( 1 - \frac{K^2 + H_k^2}{1 + \gamma^{-2} H_k^2 P_{k|k}} P_{k|k} \right) \hat{x}_{k-1|k-1} \quad (6) \\ & + \left( \frac{H_k}{1 + \gamma^{-2} H_k^2 P_{k|k}} P_{k|k} \right) y_k \end{aligned}$$

Table 1: 강인  $\mathcal{H}_\infty$  필터 [4]

• State-space equation

$$\begin{cases} x_{k+1} = F_k x_k + D_k \Delta_k K_k x_k + G_k w_k \\ y_k = H_k x_k + v_k \\ s_k = K_k x_k \\ z_k = L_k x_k \end{cases}$$

• Robust  $\mathcal{H}_\infty$  filter

$$\hat{x}_{k|k} = (I - \tilde{P}_{k|k} K_k^T K_k) \hat{x}_{k|k-1} + \tilde{K}_{f,k} (y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}),$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = F_k \hat{x}_{k|k},$$

$$\tilde{K}_{f,k} = \tilde{P}_{k|k} H_k^T = \left( P_{k|k}^{-1} + \gamma^{-2} L_k^T L_k \right)^{-1} H_k^T$$

$$P_{k+1|k} = F_k P_{k|k} F_k^T + \tilde{G}_k \tilde{G}_k^T,$$

$$P_{k|k}^{-1} = P_{k|k-1}^{-1} + \tilde{H}_k^T \tilde{R}_k^{-1} \tilde{H}_k$$

• Definitions

$$\tilde{G}_j = \begin{bmatrix} D_j & G_j \end{bmatrix}, \quad \tilde{H}_j = \begin{bmatrix} H_j \\ K_j \\ L_j \end{bmatrix}, \quad \tilde{R}_j = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

• Existence condition

$$P_{k|k}^{-1} = P_{k|k-1}^{-1} + \tilde{H}_k^T \tilde{R}_k^{-1} \tilde{H}_k > 0$$

$$P_{k|k} = \frac{P_{k-1|k-1} + D^2}{1 + (P_{k-1|k-1} + D^2)((1 - \gamma^{-2})H_k^2 - K^2)} \quad (7)$$

벤딩 주파수  $\omega$ 를 추정하는 적응 필터의 경우, 주파수 추정이 잘 이루어지는 상황에서는 가관측성이 급격히 저하되기 때문에 벤딩 주파수가 변경되어 노치 필터가 제 역할을 하지 못하게 될 때까지는 추정 오차가 증가하는 경우가 발생한다. 조종 알고리즘에 적응 노치 필터를 적용할 때 관찰되는 이러한 고질적인 문제는 조종 루프의 응답특성을 부분적으로 나쁘게 만드는 요인이며, 경우에 따라서는 회복 불가능한 정도의 불안정성을 초래할 수 있다. 이러한 문제점은 사전에 동특성 시험으로 얻어진 주파수 예측치  $\omega_0$ 를 이용함으로써 해결할 수 있다. 즉,

$$\cos \omega = \cos(\omega_0 + \delta \omega) \simeq \cos \omega_0 - \sin \omega_0 \sin \delta \omega \quad (8)$$

이므로, 벤딩 주파수를 추정 파라미터로 하는 식 (2)를 아래와 같이 예측된 벤딩 주파수의 오차를 추정 파라미터로 하는 오차식 (9)로 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} e_k = & d_k + \underbrace{d_{k-2} - \tau_\infty^2 e_{k-2} - 2 \cos \omega_0 (d_{k-1} - \tau_\infty e_{k-1})}_{\triangleq v_k} \quad (9) \\ & - \underbrace{\{-2 \sin \omega_0 (d_{k-1} - \tau_\infty e_{k-1})\}}_{\triangleq H_k} \underbrace{\sin \delta \omega}_{\triangleq x_k} \end{aligned}$$

이제, 적응  $\mathcal{H}_\infty$  필터식 (6), (7)을 이용하여 기체 벤딩 주파수를 추정하는 과정을 정리하면 표 2와 같다.

Table 2: 기체 밴딩 주파수 추정 필터

<ul style="list-style-type: none"> <li>Initialize  <math>\hat{x}_{-1 -1}, P_{-1 -1}, d_{-1}, d_{-2}, e_{-1}, e_{-2}</math></li> <li>Filter Measurement  <math>y_k = d_k + d_{k-2} - r_{\infty}^2 e_{k-2} - 2 \cos \omega_o (d_{k-1} - r_{\infty} e_{k-1})</math></li> <li>Filter Coefficient Matrix  <math>H_k = -2 \sin \omega_o (d_{k-1} - r_{\infty} e_{k-1})</math></li> <li>Innovation Sequences  <math>e_k = y_k - H_k \hat{x}_{k-1 k-1}</math></li> <li>Adaptive Robust <math>\mathcal{H}_{\infty}</math> Filter  <math display="block">P_{k k} = \frac{P_{k-1 k-1} + D^2}{1 + (P_{k-1 k-1} + D^2)((1 - \gamma^{-2})H_k^2 - K^2)}</math> <math display="block">\hat{P}_{k k} = \frac{1}{1 + \gamma^{-2}H_k^2 P_{k k}} P_{k k}</math> <math display="block">\hat{x}_{k k} = (1 - (K^2 + H_k^2)\hat{P}_{k k}) \hat{x}_{k-1 k-1} + H_k \hat{P}_{k k} y_k</math></li> <li>Bending Frequency Estimates  <math>\hat{\omega} = \omega_o + \sin^{-1}(\hat{x}_{k k})</math></li> </ul>
--

#### 4 시뮬레이션 결과

추정 성능을 검증하기 위해 그림 1의 추진구간에서의 지대공 유도탄 피치 밴딩 각속도 자료를 사용한다. 필터 설계 파라미터는 다음과 같다.

$$\hat{x}_{0|0} = 0, P_{0|0} = 0,$$

$$r_{\infty} = 0.6, D = 200.0, K = 0.0005, \gamma^2 = 2$$

시뮬레이션을 위해 밴딩 각속도에 표준편차가  $0.1^\circ/sec$ 인 백색잡음을 인가하고, 200회 몬테칼로 시뮬레이션을 수행한 결과는 그림 2와 같다. 사전에 동특성 시험을 통해 예측된 밴딩 주파수는 실제 값의 80%에 해당하는 것으로 가정하였다. 실험 결과, 제안된 강인 주파수 추정 필터의 추정 오차는 밴딩 주파수의 시변 특성이 나타나는 구간에서 평균  $1Hz$  미만, 표준편차는 최대  $0.5Hz$  이하이다. 제안된 알고리즘은 시변 특성을 불확실성으로 적절히 모델링 함으로써 가관측성이 결여된 3~7초 및 9~12초 구간에서도 비교적 만족할만한 추정 성능을 보여준다.

#### 5 결론

본 논문에서는 기체 밴딩 주파수의 시변 특성을 고려한 강인 밴딩 주파수 추정기를 제안하였다. 제안된 알고리즘은 계산량이 비교적 적을 뿐만 아니라, 예측된 주파수를 이용하여 가관측성이 결여된 상태가 지속되는 상황에서 주파수 추정치의 이상 동작 상황에 대처할 수 있는 구조적 장점을 갖는다. 추후, 정량적인 성능 예측을 위해 필터의 안정성과 관련된 분석이 뒤따라야 할 것으로 생각된다.

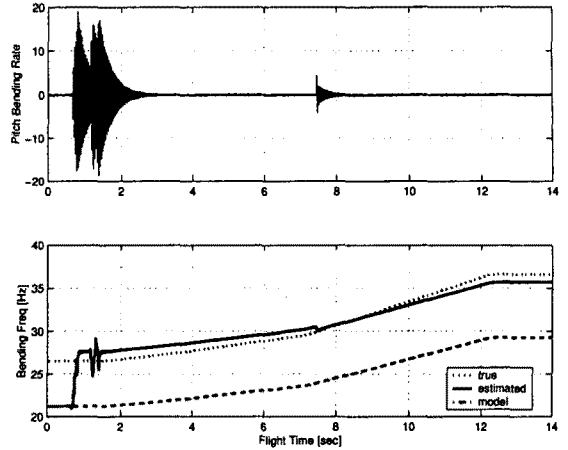


그림 1: 밴딩 각속도 및 주파수 추정치

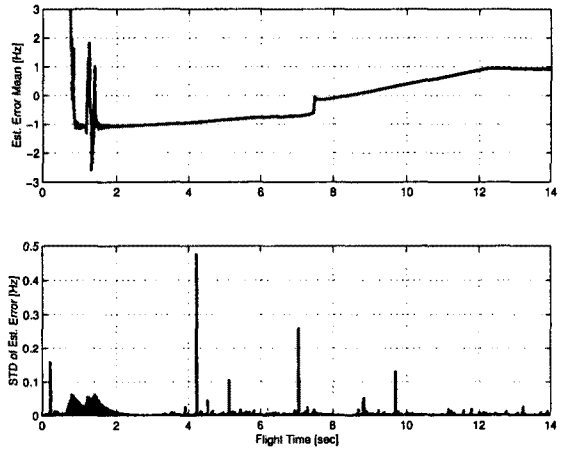


그림 2: 밴딩 주파수 추정오차 평균 및 표준편차

#### References

- [1] Greensite, A. L., *Control Theory : Volume II, Analysis and Design of Space Vehicle Flight Control Systems*, Spartan Books, (1970).
- [2] Nehorai, A. "A Minimal Parameter Adaptive Notch Filter with Constrained Poles and Zeros", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 33, (1986), pp. 479-484.
- [3] Hassibi, B., Sayed, A. H. and T. Kailath, " $\mathcal{H}_{\infty}$  Optimality of the LMS Algorithm", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 44, no. 2, (1996), pp. 267-280.
- [4] Ra, W. S., Jin, S. H. and J. B. Park, "Recursive Robust  $\mathcal{H}_{\infty}$  Filtering within the Framework of Set-Valued Estimation", *submitted to IEE Proceedings - Control Theory and Applications*.