

# 비정규 격자를 이용한 3차원 Cavity 유동 해석

강효길\* · 김문찬\* · 전호환\*

\*부산대학교 조선해양공학과

## Analysis of Three-dimensional Cavity flow by using Unstructured grid

HYO-KIL KANG\*, MOON-CHAN KIM\*\* AND HO-HWAN CHUN\*\*

\*Dept. of Naval Architecture & Ocean Engineering, Pusan National University, Busan, Korea

**KEY WORDS:** Three-dimensional cavity flow 3차원 캐비티 유동, Unstructured grid 비정규 격자, Cell-centered scheme 셀중심법, Tetrahedral grid 사면체 격자

**ABSTRACT:** Three-dimensional cavity flow is analyzed with the code by using unstructured grid. Incompressible Navier-Stokes equations are used as governing equations, and governing equations are discretized by Finite Volume Method. Artificial compressibility method, proposed by Chorin, and developed by Soh, is used for coupling a pressure and a velocity. Cell-centered scheme is adopted in the code, this has the effect of having denser grid than nodal scheme when the same grid is used. Weighted Averaging scheme is used for the value at a nodal point. Cavity flow is analyzed, and this computed results are compared with the results in the research report

### 1. 서 론

컴퓨터의 급속한 발달로 복잡한 유동에 대해서도 해석이 본격화되고 있다.[김문찬 등,2002] 이러한 발전에 힘입어 고정성 유체에서 운동하는(moving) 2차원 극소로봇과 축대칭 로봇에 대한 해석을 수행하고 되었으며 이제 더욱 복잡한 3차원 물체를 해석하기 위해 3차원 코드 개발을 시도하게 되었다.

먼저 Cavity 유동을 해석하기 위해 Cell-centered scheme을 이용해 유한 체적법(Finite Volume Method)으로 Incompressible Navier-Stokes 방정식을 풀었다. 압력과 속도의 조합(coupling)을 위해 인공압축법(artificial compressibility method)을 적용하였다. 이 방법은 Chorin(1967)에 의해 처음 제안되었고, 그 후 Soh(1988)에 의해 비정상문제에 대해서도 적용한바 있다.

또한 본 연구에서는 복잡한 유동의 해석에 적합한 비정규격자 시스템을 사용하였다. 비정규격자는 정규격자에 비해 복잡한 형상에 대한 격자생성이 용이하다. 그뿐 아니라 각 부분마다 격자분포의 밀도가 부드럽게(smoothly) 조절될 수 있어 복잡한 형상의 계산에 효과적일 수 있다. 기존의 2차원의 경우에는 삼각형(triangle)을 기본요소로 하였고 이번 3차원에서는 사면형(tetrahedron)을 격자로 사용하였다. 본 연구에서 채택한 Cell-centered scheme[강효길등,2003]은 같은 격자를 가질 경우 Nodal scheme에 비해 1 point에 대한 control volume이 작아

지기 때문에 더욱 정도 높은 값을 얻을 수가 있다. 그리고 Cell-centered scheme으로 유동을 해석하였기 때문에 사면형의 꼭지점(vertex)의 물리량은 직접 계산이 되지 않는지만 Weighted Averaging Procedure를 통해 이미 구하여진 체심(centroid)의 값을 이용하여 내삽(interpolation)할 수 있었다.[Neal T. Frink,1994] 그리고 수치적 발산을 방지하기 위해서 소산항(dissipation term)을 포함시켜 안정적인 해석을 가능케 하였다.

먼저 Cavity 유동을 해석하기 위해 격자수와 분포가 다른 두 격자를 만들어 결과를 비교하여 보았다. 이는 두 가지 다른 격자를 사용함으로써 계산시 격자의 영향을 확인하기 위함이다. 그리고 이 계산 결과를 실험치와 비교하여 보았다. 본 연구에서는 층류에 대한 해석만을 수행하였으나 앞으로 난류에 대한 모델을 추가하여 레이놀즈수가 높을 경우에 해당되는 유동도 해석이 곧 가능하리라 본다.

향후 더욱 발전된 코드를 개발하여 3차원 극소로봇의 해석뿐만 아니라 선박의 프로펠러, 워터젯 등 여러 분야에 응용이 가능하게 될 것이다.

### 2. 비정규 격자

비정규 격자는 physical domain을 computational domain으로 전환할 필요 없이 physical domain을 computational domain 그대로 사용하기 때문에 복잡하고 불규칙한 복잡한 형상에 대해서도 쉽게 알맞은 해석이 가능하다. 본 연구팀이 사용한 사면형(tetrahedron) 격자는 어떠한 물체에도 유연성(flexible)이

제1저자 강효길 연락처: 부산대학교 선박유체제어 연구실  
051-510-2757 pstjohn@pusan.ac.kr

강하고 적응성과 융통성(adaptable) 매우 높다. 이러한 특성으로 격자 밀도도 용이하게 조절이 가능하다. Fig.1은 3차원에 해당되는 사면체 격자의 모양을 도시한 것이다. 이 격자가 기본이 되어서 domain을 구성하게 된다.

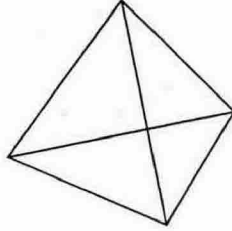


Fig. 1 Tetrahedral cell

아래 Fig.2는 Cavity 유동을 해석하기 위해 만들어진 격자이다. 격자수는 35,850개이다.

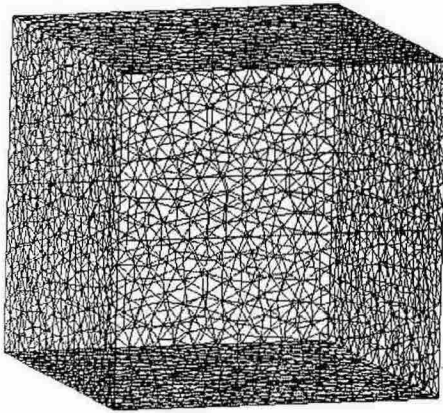


Fig. 2 Tetrahedral cell

### 3. 수식화 및 이산화

#### 2.1 지배방정식

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} + P\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial f_v}{\partial x} + \frac{\partial g_v}{\partial y} + \frac{\partial h_v}{\partial z}\right) = 0 \quad (1)$$

$$q = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} u \\ u^2 + p \\ uv \\ uw \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} v \\ vu \\ v^2 + p \\ vw \end{bmatrix} \quad h = \begin{bmatrix} w \\ wu \\ wv \\ w^2 + p \end{bmatrix}$$

$$f_v = \frac{1}{R_n} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \quad g_v = \frac{1}{R_n} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad h_v = \frac{1}{R_n} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_n} \end{bmatrix}$$

3차원 Incompressible Navier-Stokes eq.이 지배방정식으로 사용된다. 여기서  $\tau$ 는 가상시간(pseudo-time)이고,  $\beta^2$ 는 인공 압축변수(artificial compressibility parameter)로서 앞에서 언급했던 것처럼 압력과 속도를 조합(coupling)하기 위하여 사용된 변수며, 식이 수렴할 경우 연속 방정식은 원래의 식으로 복원된다. 운동량 방정식으로부터 속도를 구하며 연속방정식으로부터 압력을 구할 수가 있다.

#### 2.2 이산화

식(1)을 검사체적에 대하여 유한 체적법의 개념으로 적분한 후 Gauss의 발산정리를 적용하면 식(3)이 도출된다. 이 식을 이산화하면 식(4)와 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial \tau} dx dy dz + \iiint_{\Omega} P\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dx dy dz + \iiint_{\Omega} Q\left(\frac{\partial f_v}{\partial x} + \frac{\partial g_v}{\partial y} + \frac{\partial h_v}{\partial z}\right) dx dy dz = 0 \quad (2)$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial \tau} dx dy dz = - \iint_{\partial \Omega} P(f dy dz + g dx dz + h dx dy) - \iint_{\partial \Omega} Q(f_v dy dz + g_v dx dz + h_v dx dy) \quad (3)$$

$$V_i \frac{q_i}{\Delta \tau} = - \sum_{k=1}^{n_f} P(f_k \Delta A x_k + g_k \Delta A y_k + h_k \Delta A z_k) - \sum_{k=1}^{n_f} Q(f_{vk} \Delta A x_k + g_{vk} \Delta A y_k + h_{vk} \Delta A z_k) \quad (4)$$

여기서,  $V_i$ 는 체심  $i$ 를 포함하는 사면체(tetrahedral cell)의 부피이다.  $n_f$ 는 체심  $i$ 를 둘러싼 사면체의 면의 수이다.  $\Delta A x_k$ 는  $k$ 번째 면에 해당하는 면의  $x$ 방향으로 투영된(projected) 면적이다.  $\Delta A y_k, \Delta A z_k$ 도 마찬가지로 방향은 각각  $y$ 방향,  $z$

방향인 경우이다.

## 2.2 소산항

수치적인 발산을 방지하기 위하여 소산항을 두었다. 소산항은 식 (5)와 같으며  $q$ 는 식(1)에 있는 것처럼  $p, u, v, w$ 를 나타낸다.

$$D_i(q) = \sum_{j=1}^{n_f} \epsilon \lambda_{ij} (\Delta^2 q_j - \Delta^2 q_i) \quad (5)$$

where,

$$\Delta^2 q_j = \sum_{j=1}^{n_f} (q_j - q_i)$$

## 4. 셀중심법(Cell-centered scheme)

### 4.1 셀중심법의 풀이 과정 도시화

Fig.3는 체심  $i$ 에 대한 검사체적을 도시한 것이다. Cell-centered scheme을 사용하였기 때문에  $i$ 에서의 물리량을 계산하기 위해서는  $i$  사면체의 꼭지점에서의 정보 뿐만 아니라 인접한 사면체  $i, j, k, l, m$ 의 물리량도 함께 필요하게 된다. 이때  $i$  사면체의 꼭지점(vertex)은 nodal scheme을 사용한 것이 아니기 때문에 내삽(weighted averaging procedure)을 통해 구하여진다.

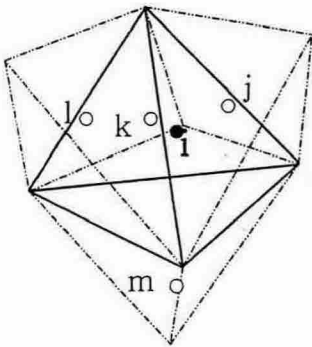


Fig. 3 Control volume of centroid  $i$  in 3-dimension

아래 그림은 지배방정식을 도형에 적용하여 계산하는 과정을 보여주는 것이다. 간단한 2차원의 경우에 대해 계산이 가능하면 3차원으로 쉽게 확장이 가능할 것이다. 1차 편미분의 과정은 삼각형 내의 노드 1, 2를 통과하는 유량과 2, 3과 3, 1를 통과하는 유량의 속도 및, 압력을 통해 알 수 있으며 이차 편미분의 해석은 노드 2와 5, 5와 1, 1과 6, 6과 2를 통과하는 물리량을 통해 해석이 가능하며 나머지 두변에 대해서도 같은 방법으로 이차편미분을 풀 수 있다. 그리고 3차원에서는 선분의 경우가 면으로 확장되는 경우이며 계산과정은 2차원과 유사하다.

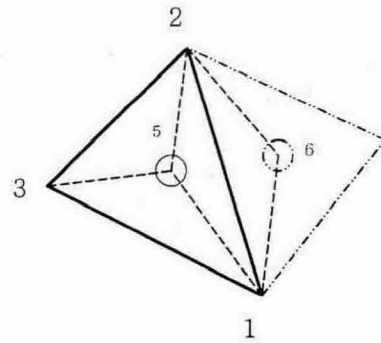


Fig. 4 Control volume of centroid 5 in 2-dimension

### 4.2 내삽 (Weighted Averaging Procedure)

Cell-centered scheme을 이용하였기 때문에 체적중심에서의 값을 구하게 된다. 그런데 이 값을 구하기 위해서는 꼭지점(vertex)에서의 값도 반드시 필요하게 된다. 이 값은 내삽(weighted averaging procedure)을 통해 구할 수 있다. 이 과정은 식(6)을 이용하면 얻을 수 있다. 여기서  $q_0$ 는 구하고자하는 꼭지점의 물리량이고  $q_n$ 에서  $q_n$ 의 값은 이미 구하여진 도심(centroid)의 값이다.  $w_i$ 는  $i$  격자의 무게(weight)이다.  $n$ 은  $i$  격자를 둘러싼 격자의 수이다. 아래 그림은 2차원의 경우를 보기 쉽게 도시화한 것이다.

$$q_0 = \frac{\sum_{j=1}^n w_j q_j}{\sum_{j=1}^n w_j} \quad (6)$$

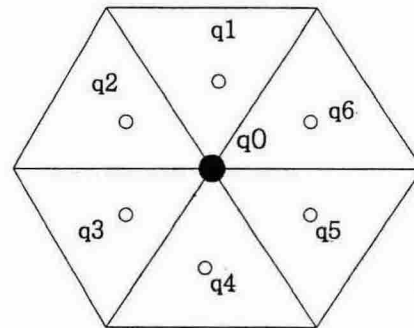


Fig. 5 Computing the weighted average  $q_0$

## 5. 계산 결과

개발된 코드로 Cavity 유동에 대해 해석하였다. 레이놀즈수가 100과 1,000인 경우를 대상으로 하였다. 먼저 2-D에 대해 계산을 하여 다른 계산결과와 비교했다. 셀중심법(cell-centered scheme)을 사용하였기 때문에 보다 밀도 높은 격자를 사용한 효과를 얻게 되었다. Fig.6, Fig.7은 셀중심법으로 개발된 2차원 코드 해석 결과이다. 레이놀즈수가 100일때이고 각각 속도벡터와 Stream line을 나타낸다. 회전의 중심이 중앙에서 모서리쪽으로 향해 있음을 알 수 있다.

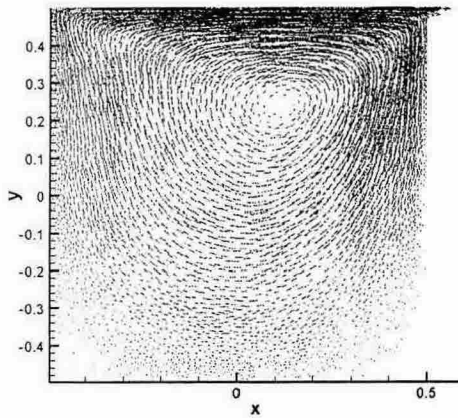


Fig. 6 Computed velocity vector of 2-D cavity flow in Rn=100

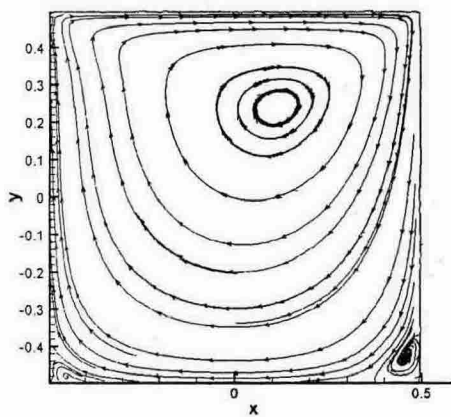


Fig. 7 Computed stream line of 2-D cavity flow in Rn=100.

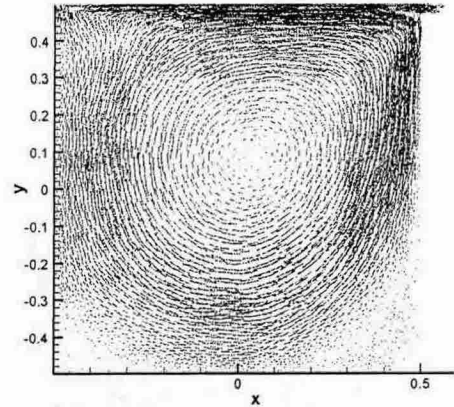


Fig. 8 Computed velocity vector of 2-D cavity flow in Rn=1,000

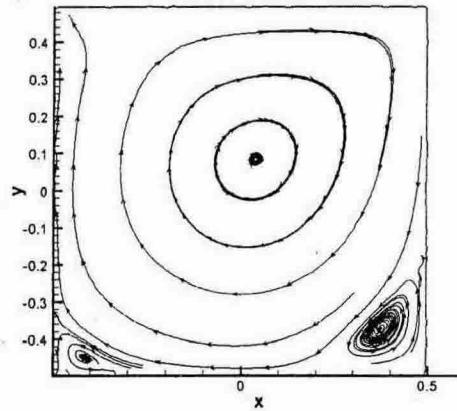


Fig. 9 Computed stream line of 2-D cavity flow in Rn=1,000

Fig.8과 Fig.9 역시 속도벡터와 Stream line을 나타내며, 이때는 레이놀즈수가 1,000인 경우이다. 레이놀즈수가 100일 때보다 회전의 중심이 중앙으로 향해 있음을 볼 수 있다.

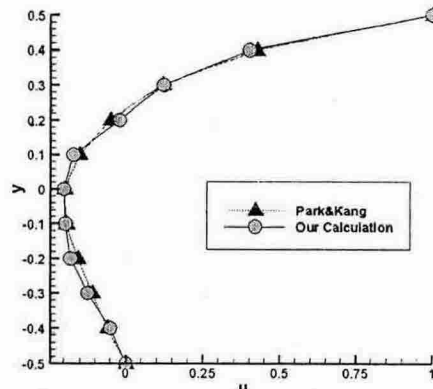


Fig. 10 Computed streamline of 2-D cavity flow in Rn=100

코드의 검증을 위해서 박용제, 강국진(1990)이 계산한 2-D Cavity 유동과 비교해 보았다. Fig.10으로부터 계산값들이 서로 거의 일치하는 것을 볼 수가 있다.

아래는 3-D Cavity 유동을 측면에서 바라본 것이다. 약 3만 5천개의 비정규격자가 사용되었고 레이놀즈수는 100이다.

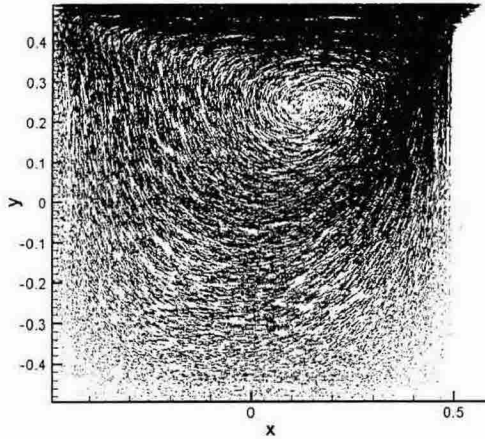


Fig. 11 Computed velocity vector of 3-D cavity flow in  $Rn=100$

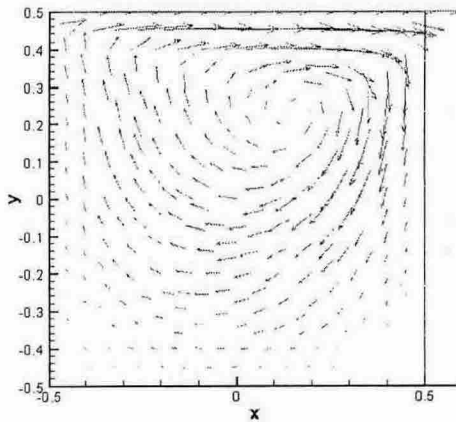


Fig. 12 Computed velocity vector of 3-D cavity flow in  $Rn=100$  on a section

Fig.12는 Fig.11의 격자를 중앙에서 단면으로 자른 것이다. 2-D 와 비슷한 경향을 보이고 있다.

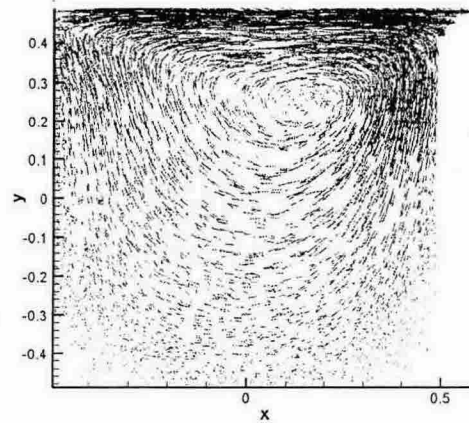


Fig. 13 Computed velocity vector of 3-D cavity flow in  $Rn=100$

Fig.13은 약 5,800개의 격자를 사용한 경우이고, Fig.11 보다는 2차원의 결과와 유사성이 떨어진다.

격자수가 5818개인 경우와 더 조밀한 35,850개인 두 가지에 대해 Cavity 유동을 해석하였다. 격자수가 늘어난 값으로부터 더욱 정도 높은 값을 얻을 수가 있다.

## 6. 결 론

비정규 격자를 이용하여 Cavity 유동을 해석하였다. 격자는 3차원에 해당되는 사면체를 사용하였고 Incompressible Navier-Stokes 방정식을 지배방정식으로 하였다. 압력을 계산하기 위해 인공압축항(artificial compressibility terms)을 포함시켰고 계산과정을 안정시키기 위해 소산항을 두었다. 셀중심법(cell-centered scheme)을 사용하여 보다 밀도 높은 격자를 사용한 효과를 얻을 수가 있었고 내삽(Weighted Averaging Procedure)을 통해 꼭지점에서의 물리량(속도, 압력)을 알 수 있었다.

본 코드의 개발로 인해 이미 기 개발된 2차원과 축대칭 극소 로봇외에도 고정성에서 운동하는 다양한 3차원 극소 로봇의 해석이 가능하게 되었다. 이번 연구는 3차원 코드의 기반이 되기 때문에 앞으로 이를 토대로 정도를 높이고자 한다. 그리고 향후 난류 모델을 연구하여 이 코드에 접목시켜 난류가 생기지 않는 고정성에서 운동하는 3차원 극소 로봇의 해석뿐만 아니라 선박의 프로펠러 해석, 워터젯 해석 등 조선, 해양분야에도 많은 적용을 할 예정이다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단의 우수연구센터(ASERC)의 지원으로 수행된 연구이며 위 기관의 후원에 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

- 강효길, 김문찬, 전호환 (2003), "셀중심법에 의한 축대칭 물체의 압축팽창운동에 의한 수치적인 연구", 대한조선학회 2003년도 춘계 학술대회 논문집 pp. 330-335
- 김문찬 등 (2002), "케도차량용 워터제트 설계 연구", 대한조선학회 2002년도 추계 학술대회 논문집 pp. 281-286
- 김문찬, 하동대 (2002), "비정규 격자를 이용한 극소 로봇의 추진 해석", 2002년도 대한조선학회 논문집 제39권 제3호
- 박용제, 강국진 (1990), "2차원 비압축 점성유체의 수치계산에 관한 연구", 재단법인 한국기계연구소 부설 해사기술연구소, 연구 보고서 UDC629.112, 과학기술처
- Alexander, R.M. (1992), "Exploring Biomechanics(animal in motion)", W.H.FREEMAN AND COMPANY
- A. Azuma (1992), "The Biokinetics of Flying and Swimming", Springer-Verlag
- A. J. Chorin (1967), "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problem", Journal of Computational Physics, Vol. 2, pp. 12-26
- Baba, S. A. (1974), "Development changes in the pattern of ciliary reponse and swimming behavior in some invertebrate larvae, Swimming and flying in nature, Vol.1 Plenum, New York
- Currie, I.G. (1974), "Fundamental Mechanics of Fluids", McGRAW-HILL
- Kim, Moon-Chan (1999), "A Numerical Scheme with Unstructured Moving Grid System and Its Application to Two-Dimensional Complicated Flows", Journal of The Society of Navel Architects of Japan, Vol. 181, 1997, pp. 45-53
- Kim, Moon-Chan (1999), "A numerical simulation for Contractive and Dilative Periodic Motion on Axisymmetric Body", Journal of Ship&Ocean Technology, March, 1999
- Kim, Moon-Chan, etc. (1997), "A Numerical Study on Propulsive Force by Contractive and Dilative Motion in Highly Viscous Fluid", J. of Society of Naval Architect of Japan, Vol. 183, No. 1
- Kim, Moon-Chan, etc. (1998), "A Study on a Propulsion System by Peristaltic Motion in Highly Viscous Fluid", Proceeding of 21th Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington D.C.
- Kim, Moon-Chan (2001), "Simulation for the Propulsion of Micro-organism with Unstructured Grid", Proceedings of the Annual Autumn Meeting, SNAK, Seoul
- Neal T. Frink (1994), "Recent Progress Toward a Three-Dimensional unstructured Navier-Sokes Flow Solver", AIAA paper, AIAA-94-0061
- Russ D. Rausch, etc (1992), "Spatial Adaptation of Unstructured Meshes for Unsteady Aerodynamic Flow Computations", AIAA Journal, Vol.30, No.5, May 1992
- W. Y. Soh (1988), "Unsteady Solution of Incompressible Navier-Sokes Equation", Journal of Computational Physics, Vol. 79, pp. 113-134