유한요소의 수정계수 변화에 대한 보 고유치의 민감도

이 건 명

Sensitivity of the Eigenvalues of Beams to the Change of Element Correction Factors

Gun-Myung Lee

Key Words : Eigenvalue(고유치), Sensitivity(민감도), Correction Factor(수정계수), Finite Element(유한 요소)

Abstract

Some characteristics of the sensitivities of the eigenvalues for beams have been found in the paper. For cantilever beams and simply supported beams, the sensitivities of the eigenvalues to the stiffness correction factor of one element are equal and opposite to the sensitivities to the mass correction factor of the symmetrically positioned element. The relationship means that to increase stiffness in one element has the same effects on the eigenvalues as to decrease mass by the same proportion in the symmetrically positioned element. For beams with other boundary conditions, however, the relationship does not hold.

1. 서론

유한요소해석은 동적 하중을 받는 기계시스템이나 구조물의 동적 응답을 예측하기 실제로 측정된 응답과 차이가 있을 수 있으므로 이 두가지 응답이 일치하도록 유한요소모형을 개선하는 방법에 관한 연구가 활발하게 진행되고 있다.(1) 유한요소모형 개선을 위한 한 가지 방법은 민감도 해석이다.

이 방법에서는 유한요소모형으로부터 계산된 고유치(고유진동수)와 고유벡터(모드형)의 개선 매개변수(updating parameter) 의 변화에 대한 민감도가 계산된다. 이러한 개선 매개변수로 재료의 물성치, 요소의 치수, 또는 요소의 수정계수(correction factor)가 사용될 수 있다. 요소의 수정계수를 개선 매개변수로 사용하면 이 수정계수에 비례하여 요소의 질량행렬과 강성행렬이 증가하거나 감소한다.(2) 본 논문에서는 여러 가지 경계조건을 갖는 보의 고유치의 요소 수정계수에 대한 민감도를 구하고, 이 민감도의 특성을 고찰하고자 한다.

† 경상대학교 기계항공공학부
E-mail : gmlee@nongae.gsnu.ac.kr
TEL : (055)751-5313 FAX:(055)757-5622

2. 고유치의 민감도

2.1 요소의 수정계수

유한요소모형을 개선하기 위하여 도입된 수정계수 P_{mj} 와 P_{kj} 는 각각 j 번째 요소의 질량행렬과 강성행렬에 대한 수정계수이다. 이 수정계수를 사용하면 요소의 질량행렬과 강성행렬은 다음과 같이 비례적으로 변화한다.

$$[M_{ej}] = (1 + P_{mj})[M_{ej}]_0 \tag{1}$$

$$[K_{ej}] = (1 + P_{kj})[K_{ej}]_0 \tag{2}$$

이 식에서 $[M_{ej}]$와 $[K_{ej}]$는 각각 j 번째 요소의 질량행렬과 강성행렬을 나타내고, 첨자 0 는 초기 행렬을 의미한다. 요소 행렬 $[M_{ej}]$와 $[K_{ej}]$는 시스템의 전체 행렬과 같은 크기를 갖고, 행렬내에서 요소에 해당되는 위치 이 외에서는 영의 값을 가지며 고정된 경계조건에 대응하는 행과 열은 제거되어 있다. 그러면 시스템 행렬은 다음과 같이 되고

$$[M] = \sum_{j=1}^{N} [M_{ej}] = \sum_{j=1}^{N} (1+P_{mj})[M_{ej}]_0 \qquad (3)$$

$$[K] = \sum_{j=1}^{N} [K_{ej}] = \sum_{j=1}^{N} (1+P_{kj})[K_{ej}]_0 \qquad (4)$$

이 때 N 은 요소의 개수이다.

2.2 외팔보 고유치의 민감도

모드 i 의 고유치(고유진동수의 제곱) λ_i의 개선 매개변수 θ_j 의 변화에 대한 민감도는 다음식과 같이 나타낼 수 있다.[3]

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \theta_j} = \phi_i^T \left(\frac{\partial [K]}{\partial \theta_j} - \lambda_i \frac{\partial [M]}{\partial \theta_j}\right)\phi_i \qquad (5)$$

이 때 ϕ_i는 모드 i 의 고유벡터를 의미한다. 만약 요소의 수정계수를 개선 매개변수로 택하면 고유치의 민감도는 다음과 같이된다

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial P_{kj}} = \phi_i^T [K_{ej}]_0 \phi_i \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial P_{mj}} = \phi_i^T (-\lambda_i [M_{ej}]_0)\phi_i \qquad (7)$$

유한요소해석법[4]를 사용하여 위의 고유치 민감도를 길이 270 mm, 폭 35 mm, 두께. 1.5 mm, Young 계수 175e9 N/m^2 , 밀도 7850 kg/m^3 를 갖는 외팔보에 대하여 계산하였다. 외팔보는 동일한 길이의 보요소 5 개로 이루어져 있으며 그림 1 에 나타나 있다. 계산된 요소의 수정계수에 대한 고유치의 민감도는 표 1 에 수록되어 있다. 이 표를 살펴보면 한 요소의 강성 수정계수에 대한 민감도는 대칭되는 위치에 있는 요소의 질량 수정계수에 대한 민감도와 거의 같고, 반대 부호를 갖는다는 사실을 알 수 있다. 그림 1 에서는 요소 1 과 5, 그리고 2 와 4 가 대칭 위치에 있다. 위의 관찰 내용은 다음과 같이 수식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial P_{k1}} = -\frac{\partial \lambda_i}{\partial P_{m5}} \qquad (8)$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial P_{k2}} = -\frac{\partial \lambda_i}{\partial P_{m4}} \qquad (9)$$

위의 관계식을 일반적으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial P_{kj}} = -\frac{\partial \lambda_i}{\partial P_{m(N+1-j)}} \qquad (10)$$

이 관계식은 저차 모드에 대해서는 정확하게 성립하고, 고차 모드에 대해서는 두 가지 민감도에 약간의 차이가 있다. 예를 들면 네번째 모드에 대한 최대 차이는 3.45%이다.

이 관계식은 한 유한요소에서 강성을 증가시켰을 때 고유치에 대한 영향은 대칭되는 위치에 있는 요소에서 질량을 같은 비율만큼 감소시켰을 때와 같음을 의미한다. 위의 외팔보에 대하여 두번째 요소의 강성을 20% 증가시켰을 때, 즉 P_{k2}=0.2 일 때의 고유치를 계산하였다.

다음에는 네번째 요소의 질량을 20% 감소시켰을 때, 즉 P_{m4}=-0.2 일 때의 고유치를 계산하였다. 이 두가지 경우의 고유치는 표 2 에 수록되어있고, 그들은 매우 잘 일치함을 알 수 있다.

고유치와 고유벡터의 정의로부터 다음 식이 성립한다.

$$[K]\phi_i = \lambda_i [M]\phi_i \qquad (11)$$

위 식의 양변의 앞에 ϕ_i^T 를 곱하면

$$\phi_i^T [K]\phi_i = \phi_i^T (\lambda_i [M])\phi_i \qquad (12)$$

질량행렬과 강성행렬을 요소 행렬들의 합으로 나타내면

$$\begin{aligned} &\phi^T ([K_{e1}] + [K_{e2}] + \cdots + [K_{eN}])\phi_i \\ &= \phi_i^T (\lambda_i [M_{e1}] + \lambda_i [M_{e2}] + \cdots + \lambda_i [M_{eN}])\phi_i \end{aligned} \qquad (13)$$

식 (6)과 (7)을 위 식에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \lambda_i}{\partial P_{kj}} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \lambda_i}{\partial P_{mj}} \qquad (14)$$

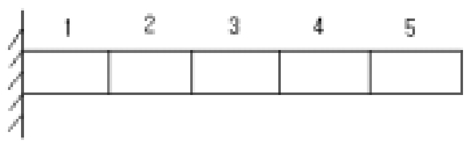

Fig.1 Cantilever beam composed of five elements

Table 2 Eigenvalues of the cantilever beam for the two cases (units : rad^2/s^2)

Case 1 (P_{k2}=0.2)	Case 2 (P_{m4}=-0.2)
0.0161e3	0.0162e3
0.0993e3	0.0994e3
0.2833e3	0.2848e3
0.5538e3	0.5555e3
0.9207e3	0.9239e3

따라서 P_{kj} 에 대한 민감도들의 합은 P_{mj} 에 대한 민감도들의 합과 크기는 같고, 부호는 반대이다. 그러나 이 사실로부터 식 (10)에서 보이고 있는 해당되는 민감도사이의 동일함은 설명이 되지 않는다

2.3 다른 경계조건을 갖는 보

앞에서 사용된 외팔보와 동일한 재료특성, 치수를 갖는 단순지지보에 대하여 요소 수정계수의 변화에 대한 고유치의` 민감도를 계산하였다. 이 보는 역시 5 개의 보요소로 이루어져 있다. 표 3 에 수록되어 있는 민감도를 살펴 보면 외팔보에 대하여 성립하였던 것과 동일한 관계식이 성립함을 알 수 있다. 더구나 단순지지보의 대칭성 때문에 다음 관계식이 역시 성립한다.

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial P_{kj}} = -\frac{\partial \lambda_i}{\partial P_{mj}} \tag{15}$$

이 관계식을 말로써 설명하면 한 요소의 강성 수정계수에 대한 고유치의 민감도는 동일한 요소의 질량 수정계수에 대한 민감도와 크기가 같고 부호가 반대이다.

다른 형태의 경계조건을 갖는 보들에 대하여 고유치의 민감도를 계산하였다. 여기서 고려된 보들의 경계조건은 고정-단순지지, 그리고 고정-고정이었다. 이 보들에 대하여는 식 (10)의 관계가 성립하지 않았다. 표 4 에는 고정-단순지지보에 대하여 계산된 민감도가 수록되어 있다.

3. 민감도 관계식의 증명

식(10)으로 나타나는 요소의 수정계수에 대한 민감도 관계식을 단순지지보에 대하여 증명하고자 한다. 길이가 L 이고 굽힘강도 EI 인 단순지지보를 N 개의 요소로 나누면한 끝으로부터 j 번째 요소의 강성행렬 $[K_{ej}]$는 그 크기가 2N x 2N 이고 (2j-2) 번째(2j+1)번째 행과 열만이 다음 식으로 나타나는 0 이 아닌 값을 갖고, 나머지 요소들은 0 의 값을 갖는다. 이 때 l 은 요소 한 개의 길이로서 $l = L/N$ 이다.

$$[K_{ej}] = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

단순지지보의 해석적인 고유벡터 $\sin\beta_i x$ 로부터 각 절점에서의 병진변위를 구하고, 이의 미분인 $\beta_i\cos\beta_i x$ 로부터 각 절점에서의 회전변위를 구하면, 모드 i 의 고유벡터 ϕ_i 는 다음 식으로 나타난다.

$$\begin{aligned}\phi_i^T = [\beta_i \quad \cdots \quad & \sin(j-1)\beta_i l \\ & \beta_i\cos(j-1)\beta_i l \\ & \sin j\beta_i l \quad \beta_i\cos j\beta_i l \quad \cdots]\end{aligned} \tag{17}$$

이 때 $\beta_i = i\pi/L$ 이다.

식(6)으로부터 강성 수정계수에 대한 민감도를 계산하고, 그 결과를 간단히 나타내기 위하여 $\alpha = \beta_i l$ 이라 놓으면

$$\begin{aligned}\phi_i^T[K_{ej}]\phi_i = \frac{EI}{l^3}[&12\sin^2(j-1)\alpha \\ &+12\alpha\sin(j-1)\alpha\cos(j-1)\alpha \\ &-24\sin(j-1)\alpha\sin j\alpha \\ &+12\alpha\sin(j-1)\alpha\cos j\alpha \\ &+4\alpha^2\cos^2(j-1)\alpha \\ &-12\alpha\cos(j-1)\alpha\sin j\alpha \\ &+4\alpha^2\cos(j-1)\alpha\cos j\alpha+12\sin^2 j\alpha \\ &-12\alpha\sin j\alpha\cos j\alpha+4\alpha^2\cos^2 j\alpha]\end{aligned} \tag{18}$$

위 식에 삼각함수 관계식

$$\sin(j-1)\alpha = \sin j\alpha\cos\alpha - \cos j\alpha\sin\alpha \tag{19}$$

$$\cos(j-1)\alpha = \cos j\alpha\cos\alpha + \sin j\alpha\sin\alpha \tag{20}$$

을 사용하고, $\sin\alpha$ 와 $\cos\alpha$ 를 다음과 같이 Taylor 급수로 나타내면

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120} - \frac{\alpha^7}{5040}\cdots \tag{21}$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} - \frac{\alpha^6}{720} + \frac{\alpha^8}{40320}\cdots \tag{22}$$

식(18)은 α^8 항까지 포함하도록 계산하였을 때 다음과 같이 된다.

$$\phi_i^T[K_{ej}]\phi_i = \frac{EI}{l^3}[(\alpha^4 - \frac{1}{3}\alpha^6 + \frac{47}{720}\alpha^8)\sin^2 j\alpha + (-\alpha^5 + \frac{1}{3}\alpha^7)\sin j\alpha\cos j\alpha + (\frac{1}{3}\alpha^6 - \frac{1}{30}\alpha^8)\cos^2 j\alpha] \quad (23)$$

한편 j 번째 요소와 대칭되는 위치에 있는 (N+1-j)번째 요소의 질량행렬 $[M_{e(N+1-j)}]$는 그 크기가 2N x 2N 이고 (2N-2j)번째부터 (2N-2j+3)번째 행과 열만이 다음 식으로 나타나는 0 이 아닌 값을 갖고, 나머지 요소들은 0 의 값을 갖는다

$$[M_{e(N+1-j)}] = \frac{\rho Al}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

보의 고유치 λ_i 의 해석적인 결과는 다음과 같다.

$$\lambda_i = \omega_i^2 = (\beta_i L)^4 \frac{EI}{\rho AL^4} \quad (25)$$

식(6)으로부터 j 번째 요소의 강성 수정계수에 대한 고유치의 민감도를 계산할 때와 같은 방법으로 식(7)로부터 (N+1-j)번째 요소의 질량 수정계수에 대한 고유치의 민감도를 계산하면 그 결과는 다음과 같다.

$$\phi_i^T(\lambda_i[M_{e(N+1-j)}])\phi_i = \frac{EI}{l^3}[(\alpha^4 - \frac{1}{3}\alpha^6 + \frac{161}{2520}\alpha^8)\sin^2 j\alpha + (-\alpha^5 + \frac{1}{3}\alpha^7)\sin j\alpha\cos j\alpha + (\frac{1}{3}\alpha^6 - \frac{1}{15}\alpha^8)\cos^2 j\alpha] \quad (26)$$

식(23)은 요소의 강성 수정계수에 대한 고유치의 민감도이고, 식(26)은 대칭되는 위치에 있는 요소의 질량 수정계수에 대한 고유치의 민감도에 – 를 붙인 값이다. 식(23)과 (26)을 비교하면 두 식은 α 의 저차항에서는 동일하고, α^8 항에서 차이가 생기기 시작한다. 따라서 α 가 작을 때에는 두 민감도는 크기는 거의 같고, 부호는 반대가 됨을 의미하므로 식(10)으로 나타나는 관계식이 증명이 되었다. α 가 작아지는 조건은 $\alpha = \beta_i l$ 임을 상기하면 저차모드에서는 β_i 의 값이 작으므로 α 값이 역시 작아지고, 요소의 개수가 많아지면 요소의 길이 l 이 작아지므로 α 값이 작아진다. 이 사실은 저차모드에서 두 민감도의 크기가 거의 같다는 관찰 내용과 일치한다.

4. 결론

본 논문에서는 보의 고유치의 민감도에 관하여 고찰하였다. 외팔보와 단순지지보에 대하여 한 요소의 강성 수정계수에 대한 고유치의 민감도는 대칭되는 위치에 있는 요소의 질량 수정계수에 대한 민감도와 크기는 거의 같고, 부호는 반대가 됨을 발견하였다. 이 관계식은 한 요소에서 강성을 증가시키는 것이 고유치에 미치는 영향은 대칭 위치에 있는 요소의 질량을 같은 비율만큼 감소시킬 때의 영향과 같음을 의미한다. 이 관계식은 단순지지보에 대하여 해석적인 결과를 사용하여 증명되었다. 그러나 이 관계식은 다른 경계조건을 갖는 보에 대하여는 성립하지 않았다.

후 기

이 논문은 2003 년도 두뇌한국 21 사업과 2003 년도 경상대학교발전기금재단 연구조성비에 의하여 수행되었습니다.

참고문헌

(1) M. I. Friswell and J. E. Mottershead, 1995, *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

(2) M. Imregun, W. J. Visser and D. J. Ewins, 1995, "Finite element model updating using frequency response function data – I. Theory and initial investigation," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 9, 187~202..

(3) W. H. Wittrick, 1962, "Rates of change of eigenvalues with reference to buckling and vibration problems," *Journal of the Royal Aeronautical Society* , Vol.66, 590~591..

(4) 4. M. Petyt 1989 *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*. New York: Cambridge University

Table 1 Sensitivity of the eigenvalues to the element correction factors for a cantilever beam (units : rad^2/s^2)

Element I	1	2	3	4	5
$\frac{\partial \lambda_1}{\partial P_{ki}}$	5.8359e3	2.7688e3	0.9421e3	0.1704e3	0.0064e3
$\frac{\partial \lambda_1}{\partial P_{mi}}$	-0.0066e3	-0.1704e3	-0.9421e3	-2.7687e3	-5.8358e3
$\frac{\partial \lambda_2}{\partial P_{ki}}$	1.0742e5	0.3845e5	1.4500e5	0.8502e5	0.0636e5
$\frac{\partial \lambda_2}{\partial P_{mi}}$	-0.0645e5	-0.8496e5	-1.4499e5	-0.3852e5	-1.0734e5
$\frac{\partial \lambda_3}{\partial P_{ki}}$	0.5653e6	0.8227e6	0.2218e6	1.1607e6	0.2450e6
$\frac{\partial \lambda_3}{\partial P_{mi}}$	-0.2446e6	-1.1566e6	-0.2231e6	-0.8243e6	-0.5669e6
$\frac{\partial \lambda_4}{\partial P_{ki}}$	2.3904e6	1.8709e6	3.1323e6	2.3059e6	2.0686e6
$\frac{\partial \lambda_4}{\partial P_{mi}}$	-1.9972e6	-2.3236e6	-3.1128e6	-1.8690e6	-2.4656e6

Table 3 Sensitivity of the eigenvaluses to the element correction factors for a simply supported beam (units : rad^2/s^2)

Element I	1	2	3	4	5
$\frac{\partial \lambda_1}{\partial P_{ki}}$	0.3727e4	1.9757e4	2.9664e4	1.9757e4	0.3727e4
$\frac{\partial \lambda_1}{\partial P_{mi}}$	-0.3727e4	-1.9757e4	-2.9664e4	-1.9757e4	-0.3727e4
$\frac{\partial \lambda_2}{\partial P_{ki}}$	1.8852e5	3.9642e5	0.6002e5	3.9642e5	1.8852e5
$\frac{\partial \lambda_2}{\partial P_{mi}}$	-1.8856e5	-3.9630e5	-0.6018e5	-3.9630e5	-1.8856e5
$\frac{\partial \lambda_3}{\partial P_{ki}}$	1.4536e6	0.7565e6	1.8845e6	0.7565e6	1.4536e6
$\frac{\partial \lambda_3}{\partial P_{mi}}$	-1.4518e6	-0.7613e6	-1.8786e6	-0.7613e6	-1.4518e6
$\frac{\partial \lambda_4}{\partial P_{ki}}$	4.6566e6	3.8950e6	3.4243e6	3.8950e6	4.6566e6
$\frac{\partial \lambda_4}{\partial P_{mi}}$	-4.6178e6	-3.9098e6	-3.4723e6	-3.9098e6	-4.6178e6

Table 4 Sensitivity of the eigenvalues to the element correction factors for a clamped - simply Supported beam (units : rad^2/s^2)

Element I	1	2	3	4	5
$\frac{\partial\lambda_1}{\partial P_{ki}}$	6.3173e4	0.6633e4	4.8904e4	5.5600e4	1.2761e4
$\frac{\partial\lambda_1}{\partial P_{mi}}$	-0.1746e4	-2.8388e4	-7.5234e4	-6.7227e4	-1.4477e4
$\frac{\partial\lambda_2}{\partial P_{ki}}$	3.8962e5	5.2240e5	1.8318e5	5.2571e5	3.5302e5
$\frac{\partial\lambda_2}{\partial P_{mi}}$	-1.2006e5	-7.7120e5	-2.1846e5	-5.1363e5	-3.5059e5
$\frac{\partial\lambda_3}{\partial P_{ki}}$	1.7069e6	1.6369e6	2.2876e6	1.0230e6	2.0775e6
$\frac{\partial\lambda_3}{\partial P_{mi}}$	-1.3053e6	-2.0880e6	-2.2331e6	-1.0320e6	-2.0733e6
$\frac{\partial\lambda_4}{\partial P_{ki}}$	5.9950e6	4.7015e6	4.9469e6	5.2059e6	5.4471e6
$\frac{\partial\lambda_4}{\partial P_{mi}}$	-5.6830e6	-5.0665e6	-4.9549e6	-5.1999e6	-5.3921e6