박막 고유치 해석을 위한 멀티스케일 적응 웨이블렛-갤러킨 기법

이용섭† · 김윤영*

Multiscale Adaptive Wavelet-Galerkin Method for Membrane Eigenvalue Analysis

Yong-sub Yi, Yoon Young Kim

Key Words : Multiscale(멀티스케일), Multiresolution(다중해상도), Interpolation Wavelets(보간 웨이블렛), Adaptive Analysis(적응해석), Eigenvalue(고유치)

Abstract

The objective of the present research is to develop a wavelet-based multiscale adaptive Galerkin method for membrane eigenvalue analysis. Since approximate eigensolutions at a certain resolution level can be good guesses, which play an important role in typical iterative solvers, at the next resolution level, the multiresolution iterative solution approach by wavelets can improve the solutionconvergence rate substantially. The intrinsic difference checking nature of wavelets can be also utilized effectively to develop an adaptive strategy. The present wavelet-based approach will be implemented for the simplest vector iteration method, but some important aspects, such as convergence speedup, and the reduction in the number of nodes can be clearly demonstrated.

1. 서 론

효율적인 적응해석을 가능하게 하는 멀티스케일, 다중해상도 특성을 지니는 웨이블렛 기반 기법들(1~3)은 수치 계산 시간을 크게 줄일 수 있기 때문에 최근 많은 주목을 받고 있다. 그러나 대부분의 웨이블렛은 그 기저함수의 형태가 매우 복잡하고 정의역이 넓어 경계조건을 다루기에 부적합하여 많은 이 기법을 사용하는 데에 어려움을 겪어왔다. 최근 이를 해결하기 위한 대안으로 보간 웨이블렛을 기반으로 한 웨이블렛-갤러킨 기법(4~6)이 제안되었다.

보간 웨이블렛 기반 갤러킨 기법의 장점은 보간 웨이블렛 계수가 특정점에서의 상태 변수와 직접 관계되는 양이기 때문에 경계조건을 쉽게 처리할 수 있다는 것이다. 참고문헌 [4~6]에서 보간 웨이블렛 기반 갤러킨 방법을 정적문제 해석에 성공적으로 적용한 바 있으나, 아직 이 기법을 고유치 해석에 적용한 연구 결과는 보고된 바 없다. 본 연구의 목적은 이러한 보간 웨이블렛 기반의 멀티스케일 해석 기법을 고유치 해석을 위해 정식화하고, 그 유용성을 살펴보는 데에 있다.

유한요소법을 이용한 고유치 해석에는 여러 방법이 있으나, 그 중 가장 대표적인 것으로 벡터반복법, 부공간 반복법(subspace iteration), 랑쵸스법(Lanczos' method) 등(7,8)이 있다. 이 중 벡터반복법은 대부분의 반복법의 기초가 되는 방법으로 고유치를 한 개씩 구해 나가는 방법이다. 통상적으로 크기가 큰 문제에 랑쵸스법 등이 많이 사용되나, 본 연구에서는 가장 간단한 해석기법인 역 벡터반복법에 웨이블렛 기법을 접목시키고자 한다. 비록 역 벡터 반복법이 간단하고 기초적인 방법이지만 본 연구의 목적인 웨이블렛 기법의 활용가능성을 살펴 보는 데에는 적절한 방법이다.

본 논문의 처음 부분에서는 멀티스케일 보간

† 서울대학교 기계항공공학부 대학원
E-mail : Miserere@idealab.snu.ac.kr
TEL : (02)880-1688 FAX : (02)872-5431
* 서울대학교 기계항공공학부 교수,
멀티스케일 창의 연구단 단장

웨이블렛에 의한 함수 근사 방법에 대해 언급하고 그 다음에는 전형적인 고유치 문제에 대한 멀티스케일 웨이블렛-갤러킨 방법에 대해 살펴보고자 한다. 마지막으로 가장 간단한 박막문제의 수치 예제에서 계산시간과 사용 절점 수를 통해 계산량을 살펴봄으로써 본 연구에서 제안하는 웨이블렛 기반 기법의 활용가능성을 검증해 보고자 한다.

2. 보간 웨이블렛 기저

멀티스케일 해석을 가능하게 하는 보간 웨이블렛에는 여러 가지가 있지만, 본 연구에서는 그 중에서도 가장 간단한 선형 보간 웨이블렛을 기저로 선택하였다. 보간 웨이블렛을 생성하는 데에 사용되는 스케일링 함수는 유한 요소법에서 사용되는 선형 기저함수와 완벽히 동일하다. 이러한 특성 때문에 웨이블렛 기반 갤러킨 방법은 일반적인 유한요소법과 같은 방식으로 정식화할 수 있다. 따라서, 기존의 유한요소법에서 사용하는 많은 기법들이 웨이블렛-갤러킨 방법에도 쉽게 적용될 수 있다.

반면에, 유한요소법과 웨이블렛-갤러킨 방법의 가장 큰 차이는 웨이블렛은 멀티스케일 특성을 갖고 있다는 점이다. 즉, 웨이블렛-갤러킨 방법을 사용하면 절점 변위와 같은 상태 변수를 국지적인 거동부터 전역적인 거동까지 함께 표현할 수 있게 된다. 바로 이 특성이 웨이블렛 기법의 적응해석을 효율적으로 만든다.

보간 웨이블렛 기저의 개념을 설명하기 위해 먼저 1 차원의 경우를 살펴보자(참고문헌[4,6] 참조). 함수 $u(x)$ 의 V_j 공간으로의 투영 $P_j u(x)$ 는 함수 u 의 다이애딕 표본(dyadic samples)인 $u(2^{-j}k)$ 를 스케일링 함수 f 를 사용하여 보간한 것으로 아래와 같이 나타난다. 이는 유한요소법에서의 형상함수를 이용한 보간과 동일한 방법이다.

$$P_j u(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_{j,k} f_{j,k}(x) \tag{1}$$

여기서 $f_{j,k}$ 는

$$f_{j,k}(x) = f(2^j x - k) \tag{2}$$

로 정의되어 있으며 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & (-1 \le x \le 0) \\ 1-x & (0 \le x \le 1) \end{cases} \tag{3}$$

부공간 W_j 는 공간 V_j 와 공간 V_{j+1} 의 차이를 나타내는 것으로 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \tag{4}$$

그리고, 함수 u 의 공간 V_{j+1} 으로의 투영 $P_{j+1}u(x)$ 와 $P_j u(x)$ 의 차이는 W_j 에 속하게 되고 이는 보간 웨이블렛 함수 y 를 이용하여 표현할 수 있다.

$$P_{j+1}u(x) - P_j u(x) = \sum u^d_{j,k} y_{j,k}(x) \quad \in W_j \tag{5}$$

스케일링 함수 f 와 웨이블렛 함수 y 사이에는 아래와 같은 관계가 성립한다.

$$y_{j,k}(x) = y(2^j x - k) = f_{j+1,2k+1}(x) \tag{6}$$

따라서, $P_{j+1}u(x)$ 를 다음과 같이 멀티스케일로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} P_{j+1}u(x) &= \sum_k u_{j+1,k} f_{j+1,k}(x) \\ &= \sum_k u^s_{j,k} f_{j,k}(x) + \sum_k u^d_{j,k} y_{j,k}(x) \\ &= \sum_k u^s_{j_0,k} f_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j} \sum_k u^d_{j,k} y_{j,k}(x) \end{aligned} \tag{7}$$

2 차원 선형 보간 웨이블렛의 스케일링 함수 및 웹이블렛 함수는 1 차원 선형 보간 웨이블렛의 스케일링 함수 및 웨이블렛 함수의 텐서곱으로 구성할 수 있다.

$$f_{j,k,l}(x,y) = f(2^j x - k) f(2^j y - l) \tag{8}$$

$$y^1_{j,k,l}(x,y) = f_{j,k}(x) y_{j,l}(y) \tag{9a}$$

$$y^2_{j,k,l}(x,y) = y_{j,k}(x) f_{j,l}(y) \tag{9b}$$

$$y^3_{j,k,l}(x,y) = y_{j,k}(x) y_{j,l}(y) \tag{9c}$$

스케일링 함수 (8)과 웨이블렛 함수 (9)를 이용하면 함수 $u(x,y) \notin V^2_{j+1}$ 의 V^2_{j+1} 공간으로의 투영은 1 차원과 마찬가지로 다음과 같이 멀티스케일로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} P^2_{j+1}u(x,y) &= \sum_{k,l} u_{j+1,k,l} f_{j+1,k,l}(x,y) \\ &= \sum_{k,l} u^s_{j,k,l} f_{j,k,l}(x,y) + \sum_{m=1}^{3} \sum_{k,l} u^{d_m}_{j,k,l} y^m_{j,k,l}(x,y) \\ &= \sum_{k,l} u^s_{j,k,l} f_{j_0,k,l}(x,y) + \sum_{m=1}^{3} \sum_{j=j_0}^{j} \sum_{k,l} u^{d_m}_{j,k,l} y^m_{j,k,l}(x,y) \end{aligned} \tag{10}$$

3. 멀티스케일 웨이블렛-갤러킨 정식화

본 연구에서는 이러한 멀티스케일 기법이 고유치 문제에 유용할 것인지 그 타당성을 검증하기 위하여 가장 간단한 형태의 고유치 문제인 박막의

고유진동 문제를 다루어 보았다.

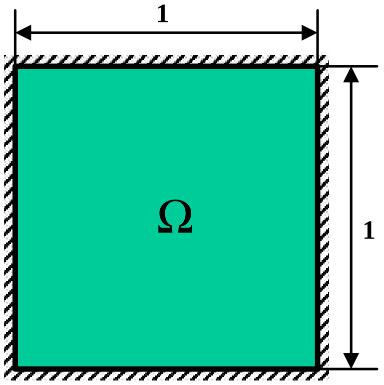


Fig. 1 Analysis domain

Fig. 1 에 주어진 영역 Ω 에서 다음과 같은 지배 방정식과 경계조건을 갖는 고유치 문제를 살펴보자.

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad in\ \Omega \tag{11}$$

$$u = 0 \quad on\ \Gamma_\Omega^g \tag{12}$$

식 (12)의 Γ_Ω^g 는 경계 Γ_Ω 중 변위가 기술된 경계를 나타내며, 자유경계 Γ_Ω^h 도 추후 고찰한다. 먼저, 식 (11)과 (12)로 주어진 문제에 대해 통상적인 갤러킨 정식화를 수행하면, 아래와 같다.

$$\frac{1}{c^2}\int_\Omega du\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}d\Omega + \int_\Omega \nabla du \cdot \nabla u d\Omega = 0 \tag{13}$$

여기서 du 는 가상변위이다.
u 를 다음과 같이 $P_j u(x,y)$ 로 근사하여

$$P_j u = \begin{bmatrix} f_{j,1,1} & \cdots & f_{j,k,l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u^s_{j,1,1} \\ \vdots \\ u^s_{j,k,l} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_j \end{bmatrix}\cdot\{\mathbf{u}^s_j\} \tag{14}$$

식 (13)에 대입하면, 다음과 같은 이산화된 식을 얻게 된다.

$$[\mathbf{K}_j]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\mathbf{u}^s_j\} + [\mathbf{M}_j]\{\mathbf{u}^s_j\} = \{\mathbf{0}\} \tag{15}$$

여기서 질량행렬과 강성 행렬은 각각 아래와 같은 관계가 성립한다.

$$\mathbf{M}_j = \int \mathbf{f}_j^T \cdot \mathbf{f}_j d\Omega \tag{16}$$

$$\mathbf{K}_j = \int \nabla\mathbf{f}_j^T \cdot \nabla\mathbf{f}_j d\Omega \tag{17}$$

조화운동을 가정하면 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\mathbf{u}^s_j\}$ 가 고유진동수 w 가 포함된 $-w^2\{\mathbf{u}^s_j\}$ 로 되어 통상적인 고유치 문제를 얻게 된다.

$$[\mathbf{K}_j]\{\mathbf{u}^s_j\} = l[\mathbf{M}_j]\{\mathbf{u}^s_j\} \quad (l = w^2) \tag{18}$$

이제 멀티스케일 개념을 도입하기 위해 u 를 스케일링 함수 f_j 와 웨이블렛 함수 j_j 를 이용하여 $P_{j+1}u(x,y)$ 로 근사해 보자.

$$u_{j+1} = \begin{bmatrix} f_{j,1,1} & \cdots & f_{j,k,l} & y^1_{j,1,1} & \cdots & y^3_{j,k,l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u^s_{j,1,1} \\ \vdots \\ u^s_{j,k,l} \\ u^{d^1}_{j,1,1} \\ \vdots \\ u^{d^3}_{j,k,l} \end{Bmatrix} \tag{19}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_j & ?_j \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \mathbf{u}^s_j \\ \mathbf{u}^d_j \end{Bmatrix}$$

j 번째 스케일에서와 마찬가지로 행렬식을 구할 수 있는데 이때 질량행렬과 강성행렬은 각각 아래와 같다.

$$\mathbf{M}_{j+1} = \begin{bmatrix} \int \mathbf{f}_j^T \cdot \mathbf{f}_j d\Omega & \int \mathbf{f}_j^T \cdot ?_j d\Omega \\ \int ?_j^T \cdot \mathbf{f}_j d\Omega & \int ?_j^T \cdot ?_j d\Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_j & \mathbf{M}_{s,d} \\ \mathbf{M}_{d,s} & \mathbf{M}_{d,d} \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$\mathbf{K}_{j+1} = \begin{bmatrix} \int \nabla\mathbf{f}_j^T \cdot \nabla\mathbf{f}_j d\Omega & \int \nabla\mathbf{f}_j^T \cdot \nabla ?_j d\Omega \\ \int \nabla ?_j^T \cdot \nabla\mathbf{f}_j d\Omega & \int \nabla ?_j^T \cdot \nabla ?_j d\Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_j & \mathbf{K}_{s,d} \\ \mathbf{K}_{d,s} & \mathbf{K}_{d,d} \end{bmatrix} \tag{21}$$

일반적인 유한요소법에서는 구한 해의 품질이 만족스럽지 않을 때 오차가 큰 영역에 더 세밀한 요소망을 새롭게 생성한다. 이 경우 이미 만들어져 있는 행렬 및 해를 새로이 세밀하게 구성된 요소망을 갖는 문제에서 활용하기 어렵다. 하지만, 웨이블렛-갤러킨 방법에서는 새로 구성된 $\mathbf{M}_{j+1}$, $\mathbf{K}_{j+1}$ 에 $\mathbf{M}_j$, $\mathbf{K}_j$ 가 부분 행렬로 포함되게 되어 있다. 즉, j 번째 스케일에서의 질량 및 강성행렬을 이미 알고 있기 때문에 j+1 번째 스케일에서는 기존의 $\mathbf{M}_j$, $\mathbf{K}_j$ 에 각각 새로이 추가되는 웨이블렛에 의해 생성되는 부분행렬 $\mathbf{M}_{s,d}$, $\mathbf{M}_{d,d}$, $\mathbf{M}_{d,s}$ 와 $\mathbf{K}_{s,d}$, $\mathbf{K}_{d,d}$, $\mathbf{K}_{d,s}$ 만 더해주면 새로운 질량 및 강성행렬을 구해낼 수 있다.

4. 멀티스케일 적응해석

4.1 멀티스케일 역 벡터 반복법

고유치 해석 방법에는 많은 것들이 있지만, 본

연구에서는 기본적인 해석기법인 역 벡터 반복법을 웨이블렛-갤러킨 방법에 적용하여 최저차의 고유치와 고유벡터 몇 개만 구해보고자 한다.

역 벡터 반복법의 과정은 아래와 같이 요약할 수 있다.

$$\mathbf{K}\overline{\mathbf{u}}_{k+1}^{(1)} = \mathbf{M}\mathbf{u}_{k}^{(1)} \tag{22}$$

$$\mathbf{u}_{k+1}^{(1)} = \frac{\overline{\mathbf{u}}_{k+1}^{(1)}}{\sqrt{\overline{\mathbf{u}}_{k+1}^{(1)T}\mathbf{M}\overline{\mathbf{u}}_{k+1}^{(1)}}} \tag{23}$$

즉, k 번째 해인 $\mathbf{u}_{k}^{(1)}$을 이용하여 $\mathbf{u}_{k+1}^{(1)}$ 해를 반복적으로 구해 나가면, $\mathbf{u}_{k+1}^{(1)}$ 은 1 차 고유벡터 $\mathbf{f}_1$, $\dfrac{\mathbf{u}_{k+1}^{(1)T}\mathbf{K}\mathbf{u}_{k+1}^{(1)}}{\mathbf{u}_{k+1}^{(1)T}\mathbf{M}\mathbf{u}_{k+1}^{(1)}}$ 는 1 차 고유치 l_1에 수렴하게 될 것이다.

2 차 고유치 및 고유벡터는 그람-슈미트 직교화(Gram-Shmidt orthogonalization)을 이용하여 구한다.

$$\mathbf{K}\mathbf{v}_{k+1}^{(2)} = \mathbf{M}\mathbf{u}_{k}^{(1)} \tag{24}$$

$$\mathbf{u}_{k+1}^{(2)} = \mathbf{v}_{k+1}^{(2)} - (\mathbf{f}_1^{T}\mathbf{M}\mathbf{v}_{k+1}^{(2)})\mathbf{f}_1 \tag{25}$$

$$\mathbf{u}_{k+1}^{(2)} = \frac{\overline{\mathbf{u}}_{k+1}^{(2)}}{\sqrt{\overline{\mathbf{u}}_{k+1}^{(2)T}\mathbf{M}\overline{\mathbf{u}}_{k+1}^{(2)}}} \tag{26}$$

첫 번째 고유치 및 고유벡터를 구할 때와 마찬가지로 k 가 무한히 증가하면, $\mathbf{u}_{k+1}^{(2)}$ 는 2 차 고유벡터 $\mathbf{f}_2$, $\dfrac{\mathbf{u}_{k+1}^{(2)T}\mathbf{K}\mathbf{u}_{k+1}^{(2)}}{\mathbf{u}_{k+1}^{(2)T}\mathbf{M}\mathbf{u}_{k+1}^{(2)}}$ 는 2 차 고유치 l_2 에 수렴하게 된다. 여기서 $\mathbf{u}_{1}^{(1)}$, $\mathbf{u}_{1}^{(2)}$ 는 각각 임의의 초기값으로, 고유벡터와 가까울수록 해가 빨리 수렴한다는 점에 주목할 필요가 있다.

본 연구에서는 웨이블렛-갤러킨 멀티스케일 해석기법을 다음과 같이 벡터 반복법에 적용한다. 먼저, 가장 낮은 해상도 단계에서 시스템을 대강 모델링하고 임의의 웨이블렛 계수들의 배열을 초기값으로 설정한 뒤 벡터 반복법을 통해 해를 구한다. 해가 구해지면 다음 단계로 해상도를 높이는데 전 단계에서 얻어진 해를 초기치로 사용한다. 이때, 다음 단계에서 새롭게 추가되는 세밀한 스케일에 관련된 웨이블렛 계수들은 0 으로 놓는다. 원하는 해상도 단계까지 이러한 과정을 반복한다.

제안된 웨이블렛-갤러킨 기법을 다중해상도로 구현하면 초기해상도 단계를 제외하고 항상 정해와 가까운 초기치를 사용하여 역 벡터 반복법을 수행하게 된다. 따라서, 위에서 언급했듯이 벡터 반복법에서는 초기값이 정해와 가까울수록 빨리 수렴하기 때문에, 본 기법이 해의 수렴성을 크게 향상시킬 수 있다.

5. 수치예제

본 연구에서는 모든 변의 길이와 식 (11)에서의 c^2 이 1 인 가장 간단한 정사각 박막에 대한 문제를 경계조건을 여러 가지로 달리 하며 풀어보았다

5.1 CASE I : 4 변 모두 고정시

이 문제에 대한 엄밀한 고유치는 식 (27)로, 고유함수는 식 (28)으로 주어진다.

$$w_{mn}^{2} = p^{2}(m^{2}+n^{2}), \quad m,n = 1, 2, \cdots \tag{27}$$

$$u_{mn} = \sin mpx \sin npy, \quad m,n = 1, 2, \cdots \tag{28}$$

4 변이 모두 고정된 박막의 고유 해석을 1) 특별히 적응해석을 수행하지 않은 전통적인 유한요소해석 방법과 2) 멀티스케일 웨이블렛-갤러킨 기법(적응해석을 적용한 경우와 하지 않은 경우)으로 수행하였다. 각 방법에 의한 계산시간, 사용된 절점수, 오차를 Figs. 2-4, Table1 에서 비교하였다.

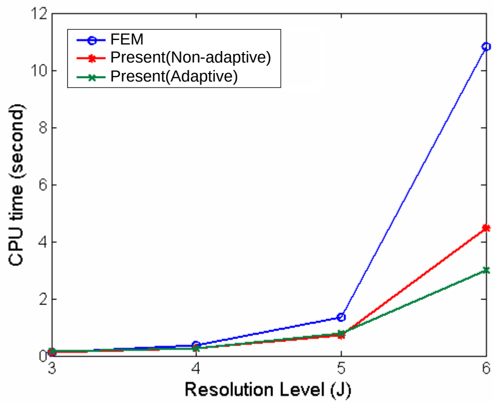
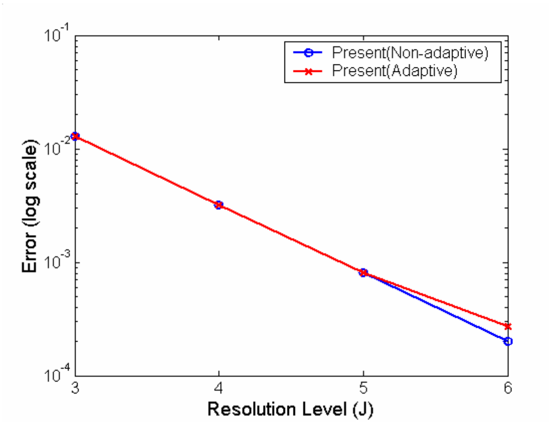


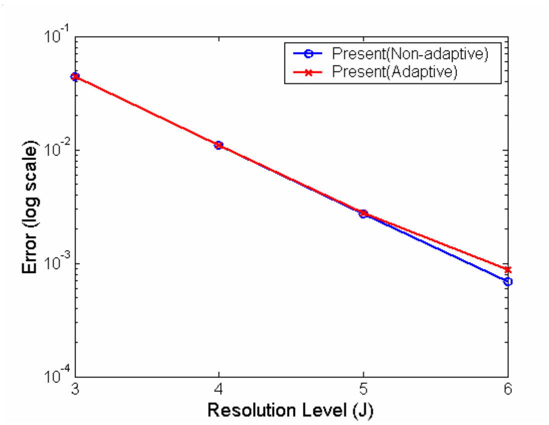
Fig. 2 The CPU time for Case I

Fig. 2 와 Fig. 3 에서 볼 수 있듯이 유한요소법, 웨이블렛-갤러킨법, 웨이블렛-갤러킨 적응해석 기법을 사용했을 경우 고유치의 오차는 방법별로 차이가 별로 없지만 해상도가 커질수록, 즉 절점수가 많아질수록 계산시간에는 많은 차이를 보이고 있다. (적응해석을 적용하지 않는 경우, 유한요소해석에 의한 오차와 웨이블렛-갤러킨 방법에 의한 오차는 완벽히 동일하다.) 아울러 Table 1 에서 알 수 있듯이 적응해석 수행 시 최종 단계에서 절점수를 약 34% 정도 줄여 계산 속도를 빠르게 하면서도 오차는 비슷한 정도로 유지할 수 있었다. Fig. 4 는 해상도가 증가함에 따라 적응해석 기법에 의

해 절점이 어떻게 분포하는지 보여주고 있다. 낮은 단계의 해상도에서는 적응해석에 의한 영향이 없으나, 높은 해상도에서는 적응해석법에 의해 상당수의 절점수가 축소되는 것을 알 수 있다.

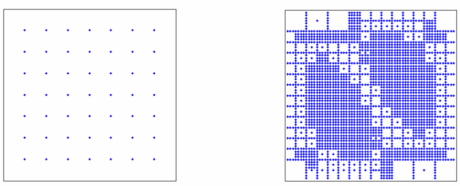


(a)



(b)

Fig. 3 Errors $\left(\frac{\left|w^2 - w_{exact}^2\right|}{w_{exact}^2}\right)$ for (a) the first and (b) the second eigenvalue for Case I



(a) (b)

Fig. 4 Wavelet coefficient distribution for Case I at the resolution level (a) j=3 and (b) j=6

Table 1 The numbers of nodes used in the wavelet-Galerkin method for Case I (boundary nodes are excluded).

	j=3	j=4	j=5	j=6
Full	49	225	961	3969
Adaptive	49	225	861	2609

5.2 CASE II : 3 변 고정, 1 변 자유

이 경우에 대한 엄밀해는 다음과 같이 주어진다.

$$w_{mn}^2 = p^2 \left\{ \left(m - \frac{1}{2} \right)^2 + n^2 \right\}, \quad m, n = 1, 2, \cdots \tag{29}$$

$$u_{mn} = \sin\left(m - \frac{1}{2} \right) px \sin npy, \quad m, n = 1, 2, \cdots \tag{30}$$

Case I 과 마찬가지로 각각의 해석 방법에 대해 계산시간, 사용 절점수, 오차 등을 비교해 보았다.

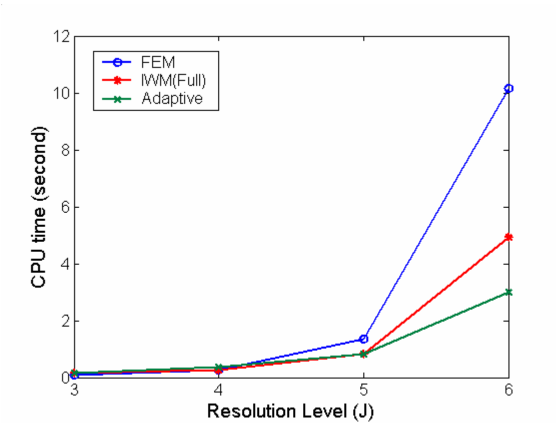
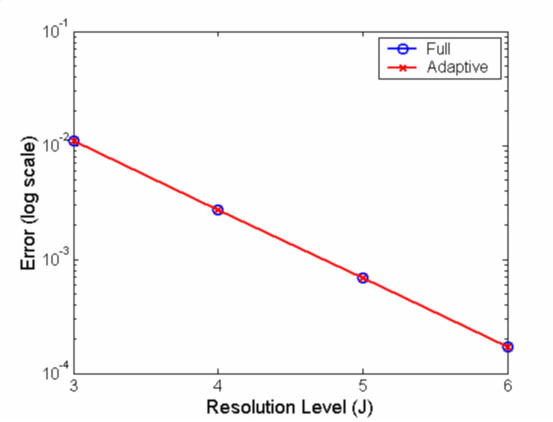


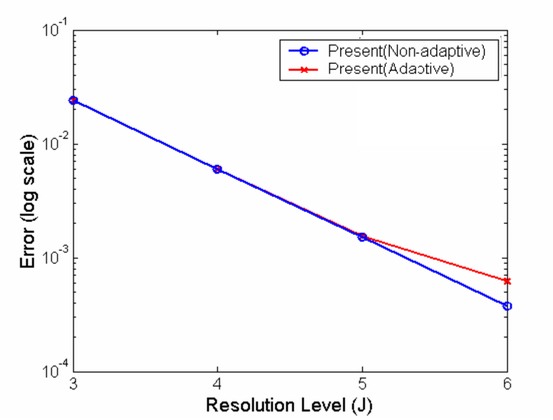
Fig. 5 The CPU time for Case II

Case I 과 마찬가지로 웨이블렛-갤러킨 적응해석기법을 적용하여 j=6 단계까지 해석을 수행했을 때, 사용되는 절점수를 약 40%까지 줄일 수 있었다. 사용되는 절점수가 줄어듦에 따라 오차는 약간 커졌으나(Fig. 6 참고) 그 정도는 미미하였다.

적응해석 기법을 사용하지 않은 경우, 웨이블렛-갤러킨 기법의 오차는 유한요소법과 완전히 일치하나 계산시간은 마지막 단계에서 50% 가량 줄일 수 있었다. 이는 낮은 해상도에서의 해가 높은 해상도에서 좋은 초기값이 되어 해의 수렴이 빨라진다는 것을 잘 보여준다.

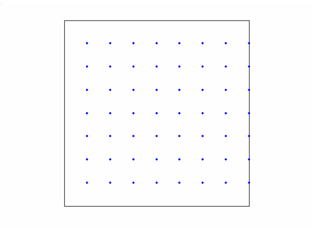


(a)

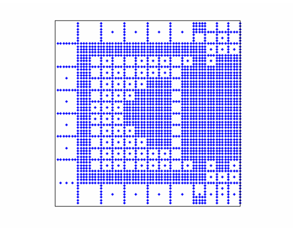


(b)

Fig. 6 Errors $\left(\frac{\left|w^2 - w^2_{exact}\right|}{w^2_{exact}}\right)$ for (a) the first and (b) the second eigenvalue for Case II



(a)



(b)

Fig. 7 Wavelet coefficient distribution for Case II at the resolution level (a) j=3 and (d) j=6

Table 2 The numbers of nodes used in the wavelet-Galerkin method for case I (boundary nodes are excluded)

	j=3	j=4	j=5	j=6
Full	56	240	992	4032
Adaptive	56	240	842	2420

6. 결 론

본 연구에서는 보간 웨이블렛 기반의 멀티스케일 갤러킨 적응해석 기법을 고유치 해석에 처음으로 적용해 보았다. 간단한 형상을 갖는 박막 고유치 문제는 멀티스케일 웨이블렛-갤러킨 기법으로 정식화하여 이를 역 벡터 반복법으로 해석하였다.

본 연구에서 다룬 박막 문제의 경우, 웨이블렛 기반 적응해석기법으로 빠른 시간에, 적은 수의 절점으로 해를 구할 수 있었다. 차후, 이와 같은 멀티스케일 해석기법의 장점이 일반적인 문제나 고유치 해석기법에 적용될 수 있도록 확대되면, 매우 효율적인 새로운 해석기법으로 발전할 것으로 기대된다

참고문헌

(1) Bertoluzza, S. and Naldi, G., 1996, "An adaptive collocation method for the numerical solutions of partial differential equations," *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, Vol. 3, pp. 1~9.

(2) Cohen, A. and Masson, R., 1999, "Wavelet methods for second-order elliptic problem, preconditioning, and adaptivitys," *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 21, pp. 1040~1065.

(3) Dahmen, W., 2001, "Wavelet methods for PDEs – some recent developments," *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 128, pp. 133~185.

(4) Kim, Y. Y. and Jang, G. W., 2001, "Hat Interpolation Wavelet-Based Multi-Scale Galerkin Method for Thin-Walled Box Beam Analysis," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 53, pp. 1575~1592.

(5) Christon, M. A. and Roach, D. W., 2000, "The numerical performance of wavelets for PDEs: the multi-scale finite element," *Computational Mechanics*, Vol. 25, pp. 230~244.

(6) Jang, G. W., Kim, J. E. and Kim, Y. Y., 2002, "Multiscale Galerkin Method Using Interpolation Wavelets for Two-Dimensional Elliptic Problems in General Domains," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Accepted for publish.

(7) Bathe, K. –J., 1996, *Finite Element Procedures*, Prebtice-Hall, New Jersey, USA.

(8) Sehmi, N. S., 1989, *Large Order Stuructural Eigenanalysis Techniques*, Ellis Horwood Limited, Chichester, England.

(9) Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., 1992, "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 33, pp. 1331~1364.

(10) Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., 1992, "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 33, pp. 1365~1382.