부족팽창 습공기 제트의 마하디스크 거동에 관한 수치적 연구

백승철(경북대 원)* · 권순범(경북대)** · 김희동(안동대)†

A Computational Study of the Mach Disk in Under-Expanded Moist Air Jet

Seung-Cheol Baek, Soon-Bum Kwon and Heuy-Dong Kim

Key Words: Barrel Shock Wave(바렐 충격파), Compressible Flow(압축성 유동), Mach Disk(마하디스크), Jet Boundary(제트 경계), Nonequilibrium Condensation(비평형 응축), Sonic Nozzle(음속노즐)

Abstract

A computational study is performed to clarify the characteristics of supersonic moist air jet issuing from a simple sonic nozzle. The effects of the initial supersaturation on the Mach disk diameter and location, the barrel shock wave and jet boundary structures are investigated in details. The axisymmetric, compressible, Navier-Stokes equations, coupled with droplet growth equation, are solved using a third-order MUSCL type TVD finite-difference scheme. It is found that the Mach disk diameter increases with an increase in relative humidity of moist air, while its location is not significantly dependent on the relative humidity. As the relative humidity increases, the barrel shock wave and jet boundary are more expanded due to the local static pressure rise of nonequilibrium condensation.

1. 서 론

초음속 자유제트는 항공 및 기계분야 등에서 큰 응용성뿐만 아니라 학문적 중요성으로 인해 오랫동안 많은 연구자들에 의해 많은 관심을 받아 왔으며, 초음속 제트에 대한 주요한 특성을 연구한 결과가 상당히 많이 발표되었다.[1-3] 이전의 연구결과에 의하면 부족팽창 초음속 제트 내에 발생하는 바렐충격파와 마하디스크의 직경 및 위치, 속도의 감쇠, 초음속 영역의 길이 등은 주로 제트 압력비에 의해 의존하는 것으로 알려져 있다.[4,5]

한편 마하디스크의 거동에 대한 많은 연구가 수행되었는데, 이는 마하디스크의 직경과 발생위치는 초음속 제트의 주요 특성을 결정하는데 매우 중요하기 때문이다.[6-8] 초음속 제트에서 마하디스크는 제트압력비가 어느 값을 넘게 되면 발생하는 것으로 알려져 있다.[6-8] 이러한 마하디스크는 바렐충격파의 반사에 의해 제트 축에서 형성되므로 마하디스크의 형상은 바렐충격파의 구조와 매우 밀접한 관련이 있으며, 제트 압력비의 함수가 된다.

한편, 일반적으로 부족팽창 초음속 제트유동은

† 책임저자의 소속 안동대학교 기계공학부
E-mail : kimhd@andong.ac.kr
TEL : (054)820-5622 FAX : (054)823-5495
* 경북대학교 대학원 기계공학과
** 경북대학교 기계공학부

마하디스크의 거동에 대하여 큰 영향을 받게 되므로 마하디스크의 직경과 발생위치를 예측하는 것은 매우 중요하다.[9,10] 작동기체의 비열비는 제트 압력비뿐만 아니라 입자의 대류속도에도 영향을 미치게 된다. 최근 초음속 제트는 발전소와 산업분야 등에서 다양하게 사용되고 있다.[11,12] 이 경우, 작동기체로서 증기나 습공기를 사용하는 것이 일반적이나, 현재까지 상변화를 수반하지 않는 단상(單相)의 기체, 즉 건공기의 초음속제트 유동에 대해서만 실험 및 수치해석적 연구가 수행되었으며, 초음속 습공기 제트유동에 대한 연구사례로 최근 Baek 등[13]의 의한 실험적 연구만 수행되었을 뿐, 초음속 습공기 제트 유동특성은 아직까지 잘 알려져 있지 않은 실정이다.

일반적으로 습공기나 증기가 노즐을 통해 급속히 팽창하면 초음속 제트 내에 비평형 응축이 발생하며, 따라서 유동은 습분의 응축에 의한 잠열에 영향을 받는다. 이 비평형 응축현상은 엔트로피 증가를 수반하는 가역과정으로,[14,15] 만일 응축에 의한 잠열이 어떤 임계값을 넘으면 비평형 응축은 응축충격파라 불리는 열역학적 물성치들의 불연속적인 변화를 야기한다.[14,15]

그러나 이전의 연구결과로부터 초음속 습공기나 증기를 포함한 유동장에 관한 보고는 찾아보기 힘들다. 따라서 본 연구는 초음속 습공기 제트에서 발생하는 마하디스크의 직경과 발생위치, 바렐충격파 및 제트 경계 등을 포함한 제트의 특성에 미치는 상대습도의 영향을 수치해석적으로 조사하는 것을 목적으로 하였다. 본 연구의 수치계산에 사용된 지배방정식은 액적 성장 방정식과 2차원, 압축성 Navier-Stokes 방정식이며, second-order fractional time step의 third-order MUSCL type TVD finite-difference scheme을 사용하였다.[16] 또 난류유동장을 해석하기 위해 Baldwin-Lomax 난류모델[17]을 적용하였다.

2. 수치계산

2.1 지배방정식

해석을 단순화하기 위해 응축물과 매개가스 유동과의 속도 및 온도차는 없으며, 응축물의 크기가 매우 작기 때문에 압력장에 대한 응축물의 영향은 무시될 수 있다고 가정하였다. 본 연구에 사용된 지배방정식은 비정상, 2차원, 압축성 Navier-Stokes 방정식이다.

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}\right)+Q \qquad (1)$$

여기서

$$U=\begin{bmatrix}\rho_m\\ \rho_m u\\ \rho_m v\\ \rho_m E_s\\ \rho_m g\\ \rho_m D_1\\ \rho_m D_2\\ \rho_m D_3\end{bmatrix}\ E=\begin{bmatrix}\rho_m u\\ \rho_m u^2+p\\ \rho_m uv\\ u(E_s+p)\\ \rho_m ug\\ \rho_m uD_1\\ \rho_m uD_2\\ \rho_m uD_3\end{bmatrix}\ F=\begin{bmatrix}\rho_m v\\ \rho_m v\\ \rho_m v^2+p\\ v(E_s+p)\\ \rho_m vg\\ \rho_m vD_1\\ \rho_m vD_2\\ \rho_m vD_3\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ \rho_m g\\ \rho_m \dot{D}_1\\ \rho_m \dot{D}_2\\ \rho_m \dot{D}_3\end{bmatrix}\ S=\begin{bmatrix}0\\ \tau_{xx}\\ \tau_{xy}\\ \alpha\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\ Q=\begin{bmatrix}0\\ \tau_{yx}\\ \tau_{xx}\\ \beta\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad (2)$$

식(2)에서 α, β 및 E_s는 다음과 같이 정의된다.

$$\alpha=u\tau_{xx}+\tau_{yx}+\frac{\mu}{(\gamma-1)}\Pr\frac{\partial T}{\partial x} \qquad (3)$$

$$\alpha=u\tau_{xx}+\tau_{yx}+\frac{\mu}{(\gamma-1)}\Pr\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$E_s=\rho_m C_{p0}T-p+\frac{1}{2}\rho_m(u^2+v^2)-\rho_m gL \qquad (4)$$

잠열 L은 온도의 함수로 주어진다.

$$L=(T)=L_0+L_1T \quad [\mathrm{J/kg}] \qquad (5)$$

$$L_0=3105913.39 \quad [\mathrm{J/kg}]$$

$$L_1=-2212.97 \quad [\mathrm{J/kg/K}]$$

응축질량분율 $g(=(m_l/(m_a+m_v+m_l))$은 다음 식으로 주어진다.

$$\dot{g}=\frac{dg}{dt}=\frac{\rho_l}{\rho_m}\frac{4\pi}{3}\left(r_c^3 I+\rho_m D_1\frac{\partial r}{\partial t}\right) \qquad (6)$$

$\dot{D}_1$, $\dot{D}_2$ 및 $\dot{D}_3$는 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{D}_1=\frac{dD_1}{dt}=\frac{4\pi r_c^2 I}{\rho_m}+D_2\frac{dr}{dt} \qquad (7)$$

$$\dot{D}_2=\frac{dD_2}{dt}=\frac{8\pi r_c^2 I}{\rho_m}+D_3\frac{dr}{dt} \qquad (8)$$

$$\dot{D}_3=\frac{dD_3}{dt}=\frac{8\pi I}{\rho_m} \qquad (9)$$

핵생성률 I_F 및 액적의 반경 성장률 $\dot{r}$은 다음과 같다.

$$I_F=\Gamma\cdot I \qquad (10)$$

$$I=\frac{1}{\rho_l}\left(\frac{2m_v\sigma}{kT}\right)^{1/2}\left(\frac{p_v}{kT}\right)^2\exp\left[\frac{-4\pi\sigma r_c^2}{3kT}\right] \quad (11)$$

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{1}{\rho_c}\frac{p_v-p_{s,r}}{(2\pi R_v T)^{1/2}} \quad (12)$$

위 식에서 R, k, $p_{s,r}$는 각각 기체상수, Boltzmann 상수 및 포화압력이다. 하첨자 v와 l은 각각 증기와 액체상태를 나타낸다.

$$p_{s,r}=p_{s,\infty}\exp\left(\frac{2\sigma_\infty}{\rho_l R_v T r}\right) \quad (13)$$

표면장력 σ는 infinite flat-film의 표면장력 σ_∞와 표면장력계수 $\sigma(T)=\zeta\sigma_\infty(T)$ ζ로 주어진다.

$$\sigma_\infty(T)=[(76.1+0.155(273.15-T)]\cdot 10^{-3} \quad \text{for } T\geq 249.39K$$
$$\sigma_\infty(T)=[(1.1313-3.7091\cdot 10^{-3}\cdot T)\cdot T^4\cdot 10^{-4}-5.6464]\cdot 10^{-6} \quad \text{for } T<249.39K \quad (14)$$

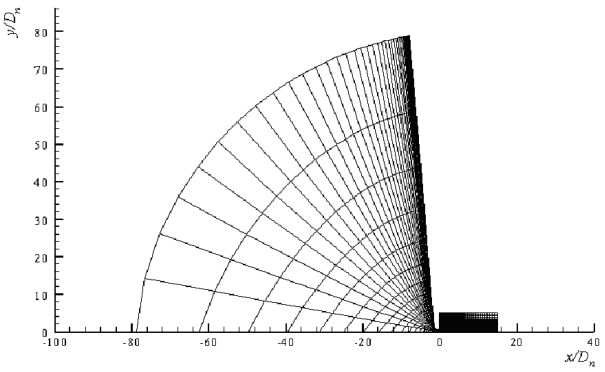
계산에서 Γ와 ξ_c 및 ζ의 값은 각각 1.0, 0.1 및 0.92이다.

또, 난류응력을 해석하기 위해 Baldwin-Lomax 모델을 적용하였으며, 응축충격파를 잡기 위해 세밀 정렬격자를 사용하였다.

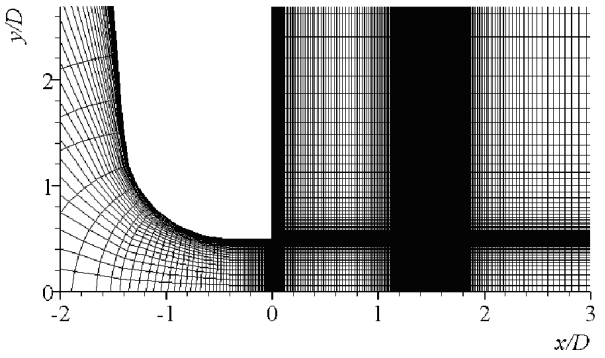
2.2 계산영역과 경계조건

Fig. 1은 본 수치계산에 사용된 유동장의 계산영역과 게산격자를 나타낸 그림이다. 수치게산에 사용된 격자수는 471×102개로, 노즐벽 근처와 제트 경계, 마하디스크의 발생위치 영역에 밀집시켰다. 제트 유동장의 계산영역은 제트 하류방향으로 무차원거리 약 x/D_n=15.0, 반경방향으로 y/D_n=5.0으로 두었다. 또, 노즐의 상류정체실의 계산영역을 무차원거리 약 x/D_n, y/D_n=80으로 제트 유동장에 비해 상대적으로 매우 크게 설정하였다. 이는 비평형 응축에 의한 잠열의 방출로 인해 발생한 파동이 노즐상류로 전파되어, 노즐상류의 유동조건을 변동시키게 되므로 이러한 영향을 줄이기 위함이다.

한편 본 연구에 사용된 노즐은 Fig. 2에 보이는 바와 같이 출구경이 D_n=12.7mm, 전체 길이가 17.78mm인 단순 축소노즐이다. 또한 노즐 축소부는 상류정체 유동이 노즐로 유입될 때 발생하는 입구효과를 방지하기 위해 12.7mm의 곡률반경을 가진 원호로 하였으며, 이후 약 5.08mm의 직선부로 되어 있다. 작동유체로 습공기를 사용하였으



(a) Typical computational geometry



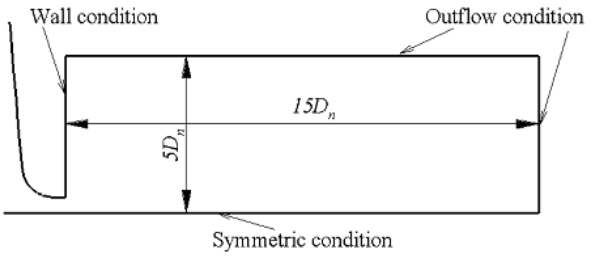
(b) Detailed grid system of nozzle and flow field

Fig. 1 Computational grid(unit:mm)

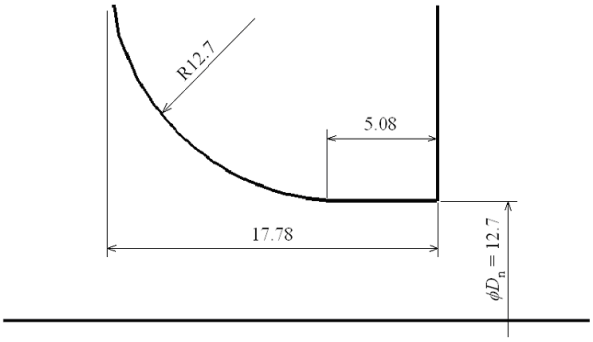
며, 열적 및 열량적으로 완전하다고 가정하였다. 노즐의 정체점 상태량인 전온도와 정체압력 p_0를 가각 298K와 대기압(=101.3kPa)으로 일정하게 하였다. 본 연구에서는 정체점의 습공기의 초기 과포화도($S_0=p_{v0}/p_\infty$)를 각각 0(건공기), 0.4 0.7로 변화시켰으며, 노즐의 출구는 자유경계조건을, 벽에는 열전달이 없다는 단열 벽조건에서 속도의 슬립은 없다고 가정하였다. 또, 벽에서 응축질량분율 g=0을 부여하였다.

얻어진 해가 채택된 격자에 무관하다는 것을 확인하기 위해 게산격자의 세밀도를 조사하였다. 격자는 정확한 해를 얻기 위해 충격파나 경계층과 같이 큰 구배를 가지는 영역에 밀집시켰다. 해의 수렴은 각 보존변수들에 대한 잔차가 4이하의 오더로 감소될 때 얻어졌다. 다른 수렴 기준으로는 계산경계를 통한 보존변수들을 바로 점검하는 것이 있다. 계산경계를 통한 mass 불균형을 조사하였다.

3. 결과 및 고찰



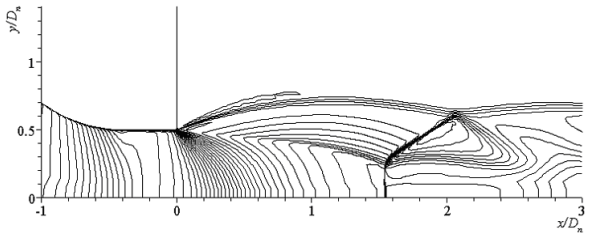
(a) Boundary conditions



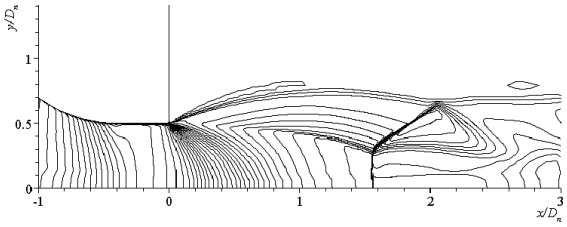
(b) Detailed nozzle geometry

Fig. 2 Boundary conditions and detailed nozzle geometry

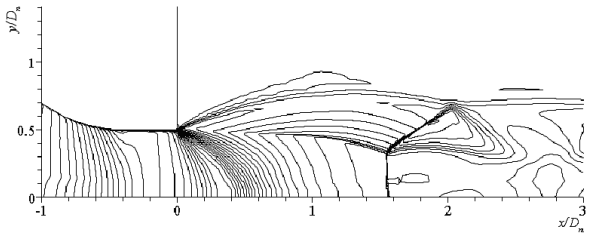
Fig. 3은 제트 압력비 p_0/p_b=6.2일 때 초기 과포화도의 변화에 따른 제트의 등밀도 선도를 나타내고 있다. 그림에서 노즐출구를 원점(x/D_n=0)으로 하여 제트하류방향을 양의 위치로 취하였다. 노즐을 통해 가속된 유동이 대기로 분출될 때 노즐출구에서 부족팽창되므로 제트경계는 노즐출구로부터 확장되며, 제트 내 유동은 하류로 계속 팽창한다. 현재의 제트 압력비의 경우 마하디스크는 무차원거리 약 x/D_n=1.5에 마하디스크가 발생하며, 노즐 출구 근방에서 발생한 바렐충격파가 마하디스크와 만난 후 다시 반사된다. 일반적으로 비평형 응축은 초음속 영역에서 발생하므로 본 연구의 음속노즐 내에서 응축이 일어나지 않는다. 따라서 초기 과포화도의 변화에 따라 노즐 내의 등밀도 선도의 변화는 거의 없다. 그러나 초기 과포화도 S_0=0.7의 경우, 제트 중심축을 따라 무차원거리 x/Dn=0.5 영역 근방의 등밀도 선들의 간격이 상대적으로 낮은 초기 과포화도의 경우에 비해 넓게 나타난다. 이 영역에서 비평형 응축이 발생하여 국소정압의 상승과 더불어 유동의 가속이 지연되었기 때문으로 판단된다. 또 초기 과포화도가 증가함에 따라 마하디스크의 직경이 증가하고 바렐충격파는 더욱 확장된다.



(a) S_0=0



(b) S_0=0.4

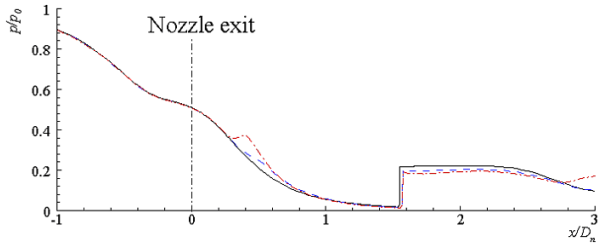


(c) S_0=0.7

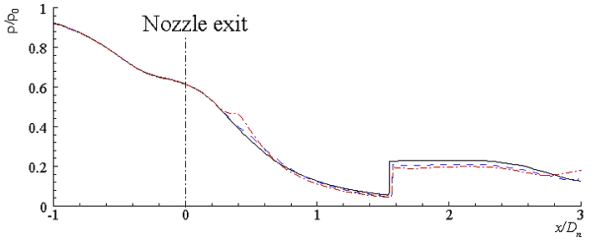
Fig. 3 Density contour(p_0/p_b=6.2, $\Delta\rho_r/\rho_0$=0.02)

Fig. 4는 제트 중심축을 따라 유동의 압력, 밀도 및 응축물의 질량분율을 나타낸 그림이다. 노즐출구로부터 유동의 팽창으로 인해 압력과 밀도는 감소하며, 비평형 응축영역에서 정압과 밀도의 국소적으로 상승한다. 이후 유동은 마하디스크의 발생위치까지 팽창한 후 마하디스크를 통해 압축된다. 이러한 국소 물성치의 상승은 초기 과포화도가 증가할수록 커진다. 한편 Fig. 4(c)는 제트 중심축을 따라 응축물의 질량분율을 나타낸 그림으로서, 실선, 쇄선 및 일점쇄선은 초기과포화도가 각각 S_0=0, 0.4, 0.7의 경우에 해당한다. 초기과포화도가 0인 건공기의 경우 제트 내에 응축물이 발생하지 않으나 초기과포화도가 0.4와 0.7인 경우는 국소정압과 밀도가 상승하기 시작하는 위치와 거의 동일한 위치에서 응축물이 발생하기 시작한다. 이로부터 초음속 제트 내에 비평형 응축이 발생하면 유동 물성치와 제트구조에 영향을 미친다는 것을 알 수 있다.

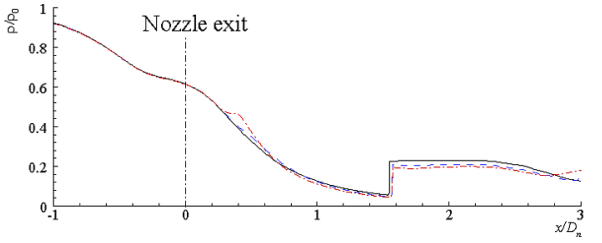
Fig. 5는 압력비 변화에 따른 마하디스크의 직



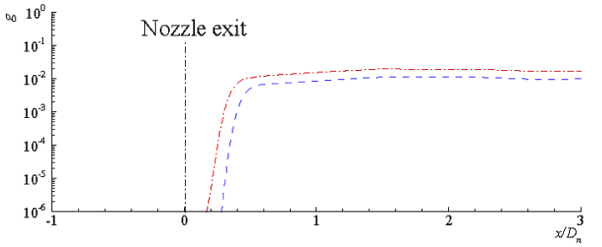
(a) Static pressure



(b) Density



(b) Density



(c) Condensate mass fraction

Fig. 4 Static pressure, density and condensate mass fraction along jet centerline(p_0/p_b=6.2)

경과 발생위치를 Addy의 이전 연구결과와 비교하여 나타낸 그림이다. 건공기에 대한 본 수치계산을 통해 얻은 마하디스크의 발생위치에 대한 결과는 Addy 등[6]의 실험과 거의 일치한다. 또한 마하디스크의 발생위치는 초기 과포화도에 거의 변화가 없다. 그러나 마하디스크의 직경은 초기 과포화도가 높아짐에 따라 증가하며, 높은 과포화도의 경우의 마하디스크 직경은 건공기와 상당한 차이가 나타난다. 제트 내에서 발생한 비평형 응축에 의해 마하디스크의 발생위치는 초음속 제트 내에서 발생하는 응축현상에 거의 영향을 받

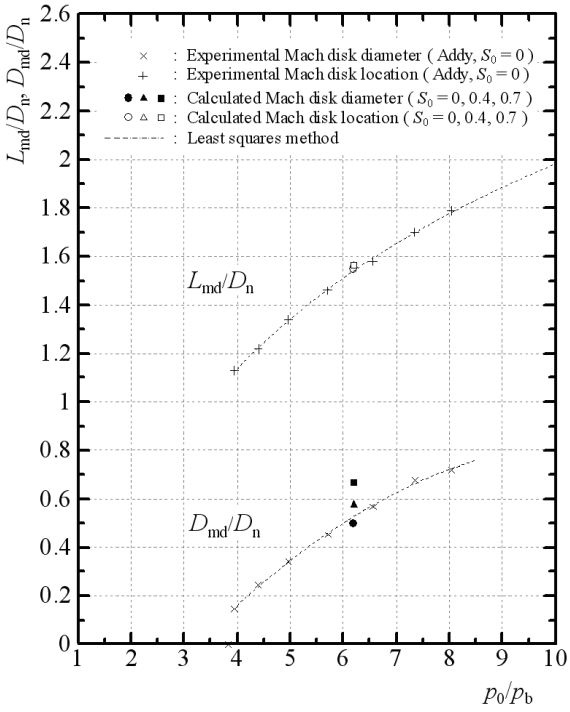


Fig. 5 Jet pressure ratio vs. Mach disk diameter and location

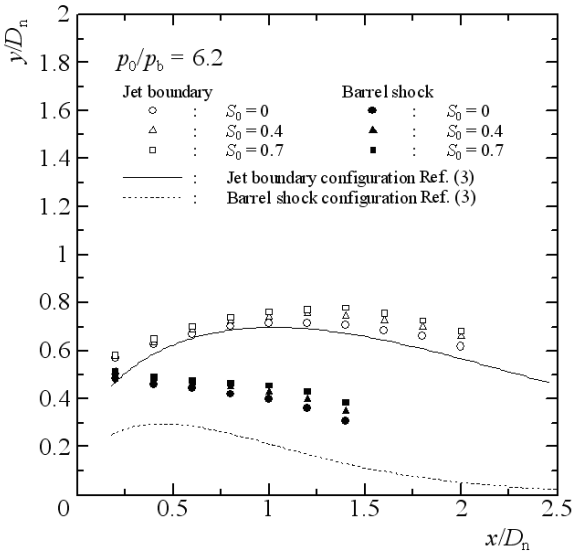


Fig. 6 Jet boundary and barrel shock configurations

지 않으나 마하디스크의 직경은 상당한 영향을 받는 것으로 판단된다.

한편 바렐충격파와 제트 경계에 대한 상대습도의 영향을 Fig. 6에 나타내었다. 그림에서 실선과 점선은 이전의 Kim 등[3]의 연구로부터 얻어진 경험식을 가리킨다. 바렐충격파에 대한 본 수치계산결과와 이전의 경험식은 다소 차이가 발생하

지만 건공기의 제트 경계에 대한 결과는 이전 연구결과와 잘 일치한다. 본 계산으로부터 초기 과포화도가 증가함에 따라 바렐충격파와 제트 경계가 더욱 확장된다는 결과를 얻었다.

4. 결 론

부족팽창 습공기 제트에 미치는 비평형 응축의 영향을 조사하기 위해 초기 과포화도 변화에 따른 수치해석적 연구를 수행하고 이전의 실험결과와 비교한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

건공기에 대한 본 수치계산결과는 이전의 연구결과와 비교적 잘 일치하였다. 그러나 초기과포화도가 증가함에 따라 부족팽창 제트에서 발생하는 마하디스크의 직경은 증가하였으나, 마하디스크의 발생위치는 습공기의 상대습도에 크게 의존하지 않았다. 또 습공기의 상대습도는 제트의 경계 및 바렐 충격파의 형태에 영향을 미치며, 이는 습공기제트에서 발생하는 비평형 응축의 압력손실에 기인하는 것으로 판단되었다.

참고문헌

(1) Mate, B., Graur, I. A., Elizarova, T., Chirokov, I., Tejeda, G., Fernandez, J. M. and Montero, S., 2001,“"Experimental and Numerical Investigation of an Axisymmetric Supersonic Jet," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 426, pp. 177～197.

(2) Chang, I. S. and Chow, W. L., 1974, "Mach Disk from Underexpanded Axisymmetric Nozzle Flow," *AIAA Journal*, Vol. 12, No. 8, pp. 1079～1082.

(3) Kim, H. D. and Shin, H. S., 1996, "Numerical Study on Under-Expanded Jets through a Supersonic Nozzle(part 2)," *KSME(B)*, Vol. 20, No. 6, pp. 1994～2004.

(4) Abbett, M., 1971, "Mach Disk in Underexpanded Exhaust Plumes," *AIAA Journal*, Vol. 9, No. 3, pp. 512～514.

(5) Davidor, W. and Penner, S. S., 1971, "Shock Standoff Distance and Mach Disk Diameters in Underexpanded Sonic Jets," *AIAA Journal*, Vol. 9, No. 8, pp. 1651～1652.

(6) Addy, A. L., 1981, "Effects of Axisymmetric Sonic Nozzle Geometry on Mach Disk Characteristics, *AIAA Journal*, Vol. 19. No. 1, pp. 121～122.

(7) Crist, S., Sherman, P. M., and Glass, D. R., 1966, "Study of the Highly Underexpanded Sonic Jet, *AIAA Journal*, Vol. 4, No. 1, pp. 68～71.

(8) Eastman, D. W., and Radtke, L. P., 1963, "Location of the Normal Shock Wave in the Exhaust Plume of a Jet," *AIAA Journal*, Vol. 1, No. 4, pp. 918～919.

(9) Lewis Jr., C. H. and Carlson, D. J., 1964, "Normal Shock Location in Underexpanded Gas and Gas-Particle Jets," *AIAA Journal*, Vol. 2, No. 4, pp. 776～777.

(10) Bauer, A. B., 1965, "Normal Shock Location of Under-expanded Gas-Particle Jets," *AIAA Journal*, Vol. 3, pp.1187～1189.

(11) Deependran, B., Sujith, R. I., and Kurian, J., 1997, "Studies of Low-Density Freejets and Their Impingement Effects," *AIAA Journal*, Vol. 35, No. 9, pp. 1536～1542.

(12) Kim, H. D. and Lee, J. S., 1996, "An Experimental Study on Supersonic Jet Issuing from Gas Atomizing Nozzle(part 1)," *KSME(B)*, Vol. 20, No. 2, pp. 677～709.

(13) Baek, S. C., Kwon, S. B., Kim, H. D., Setoguchi, T. and Matsuo, S., "A Study of Moderately Under-Expanded Supersonic Moist Air Jets," *AIAA Journal*(To be published).

(14) Wegener, P. P., and Wu, B., 1977, "Nucleation Phenomena, Gasdynamics and Homogeneous Nucleation," ed. by Zettlemoyer, A. C., pp. 325～402.

(15) Hill, P. G., 1966, "Condensation of Water Vapour during Supersonic Expansion in Nozzle," *Journal of Fluid Mech.*, Vol. 25, part 3, pp. 593～620.

(16) Yee, H. C., 1989, "A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock-Capturing Methods," NASA TM-89464.

(17) Baldwin, B. S. and Lomax, H., 1978, "Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows," AIAA Paper No. 78-257.