

Sommerfeld 적분의 해석적 계산을 위한 최적 적분경로에 관한 연구

°이 영 순*, 김 의 중*, 고 지 환*, 조 영 기**

* 금오공과대학교 전자공학부

** 경북대학교 전자전기컴퓨터학부

e-mail : yslee@kumoh.ac.kr

A Study on the Optimum Integration Path for the Analytic Evaluation of the Sommerfeld Integrals

°Y. S. Lee*, U. J. Kim*, J. W. Ko* and Y. K. Cho**

* School of Electronic Eng., Kumoh Nat'l Institute of Tech.

** School of Electronic Eng. & Computer Sci., Kyungpook Nat'l Univ.

Abstract

For the purpose of the efficient derivation of the closed-form Green's functions by which MoM matrix elements can be analytically evaluated, the optimum approximation path which is deformed from the Sommerfeld integration path on the complex k_ρ -plane is proposed based upon the steepest descent method and three level approximation procedure.

Key Words : Microstrip Structure, Sommerfeld Integral, Closed-form Green's functions

I. 서 론

최근 10년 동안 SI(Sommerfeld integral)의 형태로 표현되어지는 다층 평판 구조체의 공간영역 그린함수를 계산하는데 있어, 긴 계산시간을 필요로 하는 수치적분을 하지 않고도 그린함수 값을 해석적으로 구할 수 있는 다양한 CGF(closed-form Green's function) 방법들이 제안되었다^[1-3]. 또한 이러한 CGF를 사용하여 MoM (Method of Moment)행렬 요소들을 계산할 경우 소요되는 시간을 줄이기 위한 다양한 방법들도 제안되고 있다^[4-6]. 참고문헌 [4]에서는 CGF를 Taylor 급수전개로 근사화하여 행렬요소들을 해석적으로 구할 수 있는 방법을 제안한 반면에, 참고문헌 [5]와 [6]에서는 그린함수의 근사화 없이 행렬요소들을 단일 적분만으로 단순화하여 구할 수 있는 수치계산 방법을 제안하였다.

최근에는 참고문헌 [4]에서와 같은 CGF의 근사화 과정 없이도 MoM 행렬 요소를 해석적으로 구할 수 있는 새로운(new) CGF 형태^[7,8]가 제안되었다. 참고문헌 [1-3]에서는 Sommerfeld 적분식의 피적분 함수(integrand)를 복소 k_ρ -평면상에서 복소 지수 함수의 합으로 근사화한 후 Sommerfeld 항등식을 사용하여 초월함수인 $e^{-jk_\rho r}/r$ 의 합 형태로 CGF를 구하는 반면에, 참고문헌 [7]에서는 Bessel 함수의 적분공식을 사용하여 대수적(algebraic) 합

수인 $a_i(b_i^2 + \rho^2)^{-3/2}$ 의 합 형태로 CGF를 구하기 위해 피적분 함수를 복소 k_ρ -평면상에서 복소 지수 함수의 합으로 근사화하는 방법을 사용한다. 그러므로 복소 k_ρ -평면상에서 피적분 함수를 복소 지수 함수의 합 형태로 근사화 하기 위해서는 본래의 SIP(Sommerfeld Integral Path)를 변수의 선형 변환이 가능한 직선형태의 근사화 적분경로로 변형해야 한다. 이와 같은 SIP의 변형의 잘못된 선택은 부정확한 적분결과를 줄 수 있으므로 신중한 선택을 필요로 하며, 적분경로의 선택에 따른 적분결과와 문제점들은 참고문헌 [9]에 기술되어 있다. 또한 참고문헌 [7]에서도 변형된 근사화 적분경로와 관련된 매개 변수 선택에 관한 어려움을 밝히고 있다.

본 논문에서는 이와 같은 매개변수 선택의 어려움을 해소하고 보다 정확한 SI 적분결과를 구할 수 있는 최적의 근사화 적분경로를 검토하여 제시하고자 한다.

II. 기존의 CGF 방법

마이크로스트립과 같은 다층 평판 구조체의 공간영역 그린함수는 일반적으로 (1)식과 같은 SI 형태로 표현되어진다.

$$G = \int_{SIP} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho \tilde{G}(k_\rho) e^{-jk_z|z|} dk_\rho \quad (1)$$

여기에서 $k_z = (k_0^2 - k_\rho^2)^{1/2}$ 이고, \tilde{G} 는 파수영역 그린함수에 해당한다.

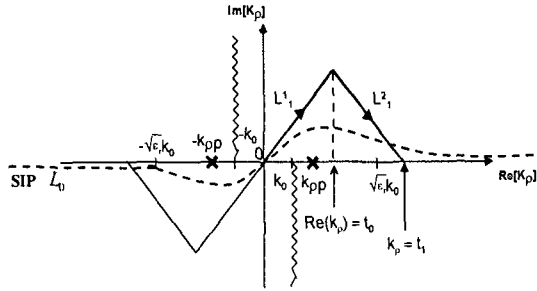


Fig. 1 Sommerfeld integral path and deformed paths used in [7]

그림 1은 SI의 적분 계산을 위한 복소 k_ρ -평면에서의 적분경로를 제시하였는데 파선은 branch cut, ϵ_r 는 유전체 slab의 비유전율, k_ρ 는 표면파 극점을 의미한다. 그러므로, original SIP (L_0)는 점선과 같은 경로가 되며, 참고문헌 [7]에서 사용한 SIP의 변형된 직선 적분경로(L_1^1 과 L_1^2)를 실선으로 SIP와 비교하여 그림 1에 제시하였다.

기존의 CGF방법에 관한 설명의 편의성을 위해 (1)식을 (2)식과 같은 형태로 표현하기로 한다.

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho f(k_\rho) dk_\rho \quad (2)$$

$$= 2 \int_0^{\infty} J_0(k_\rho \rho) k_\rho f(k_\rho) dk_\rho$$

단, $f(k_\rho)$ 는 $\tilde{G}(k_\rho)e^{-jk_z|z|}$ 이다.

2.1 conventional CGF 방법

지금까지 주로 사용해온 CGF 방법^[1-3]에서는 파수영역 그린함수에 해당하는 $f(k_\rho)$ 를 (3)식과 같이 복소 k_z -평면 상에서 복소 지수 함수의 합으로 근사화 한다.

$$f(k_\rho) = \frac{1}{jk_z} \sum_{i=1}^M \alpha_i e^{-\beta_i k_z} \quad (3)$$

여기에서 $\alpha_i(\beta_i)$ 는 k_z -평면에서의 주어진 근사화 적분 경로^[1-3]를 따라 근사화 방법(Prony법, GPOF법 등)을 사용하여 구해지는 복소 지수 함수의 복소 계수(복소 지수)

들이다. (2)식으로 부터 CGF를 유도하기 위해 (4)식으로 주어지는 Sommerfeld 항등식을 사용한다.

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-jk_z|z|}}{jk_z} J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho = \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \quad (4)$$

그러면 (3)식으로 근사화된 $f(k_\rho)$ 를 (2)식의 피적분 함수에 대입하고 (4)식을 사용하면 다음과 같은 CGF가 구해진다.

$$G = 2 \sum_{i=1}^M \alpha_i \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (5)$$

여기에서, $r = \sqrt{\rho^2 + (z - j\beta)^2}$ 이다.

2.2 새로운 CGF 방법

참고문헌[7]에서는 MoM 행렬 요소를 해석적 적분으로 구하기 위하여, CGF 표현식을 초월함수 형태인 복소 지수 함수 대신에 대수적(algebraic) 함수 형태로 표현하기 위하여 (6)식과 같은 Bessel 함수의 적분 공식을 사용한다.

$$\int_0^{\infty} e^{-k_\rho w} k_\rho J_0(k_\rho \rho) dk_\rho = \frac{w}{(w^2 + \rho^2)^{3/2}} \quad (6)$$

그러므로 (6)식의 항등식을 사용하기 위해서는 $f(k_\rho)$ 가 복소 k_ρ -평면상에서 (7)식과 같은 복소 지수 함수의 합 형태로 근사화 되어야 한다.

$$f(k_\rho) = \sum_{i=1}^M \alpha_i e^{-b_i k_\rho} \quad (7)$$

이 경우, 복소 k_z -평면상에서 근사화된 (3)식을 사용하여 (7)식을 구할 수 없다. 그 이유는 변수 k_ρ 와 k_z 가 선형 관계식으로 표현될 수 없기 때문이다. 그러므로 $f(k_\rho)$ 를 (7)식과 같은 형태로 근사화 하기 위해서는 복소 k_ρ -평면 내에서의 근사화 적분경로의 선택이 불가피하며, 참고문헌 [7]에서 선택한 적분경로(L_1^1 과 L_1^2 와 같이 종단된 직선경로)를 그림 1에 제시하였다. 이러한 근사화 적분경로의 방정식은 매개변수 t 를 도입하여 (8)식과 같이 되진다.

$$L_1^1 : k_\rho = k_0(t + j\frac{t}{T_0}) \quad , 0 \leq t \leq t_0 \quad (8a)$$

$$L_1^2 : k_\rho = k_0 \left[t + j\frac{(t_1 - t)t_0}{T_0(t_1 - t_0)} \right], \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (8b)$$

여기에서 t 는 직선방정식의 표현을 위해 도입된 매개변수이고, $1/T_0$ 는 직선경로 L_1^1 의 기울기이며, t_0 와 t_1 은 각각 근사화 적분경로 L_1^1 과 L_1^2 의 종단점에서 k_p 의 실수 값을 의미한다. 즉, $f(k_p)$ 의 정확한 근사화를 위해서는 매개변수 T_0 , t_0 , 및 t_1 의 최적값을 조사하여 선택해야 하는 것이 필수적인 과제이다. 참고문헌 [7]에서 서술된 매개변수 선택의 문제점들을 요약하면 다음과 같다. 1) T_0 의 선택이 매우 임계적(critical)이고, 근사화의 정확도를 좌우하게 된다. 2) $t_0 < t_1$, $f(t_1) < 10^{-4}$ 이 되도록 파수영역 함수 $f(k_p)$ 를 조사하여 선택하도록 한다. 그러므로 주어진 구조에서 사용 주파수가 변화될 경우 매번 $f(k_p)$ 의 사전 조사를 통하여 최적의 매개변수 값들을 결정해야 하는 번거로움이 있음을 알 수 있다. 또한, 참고문헌 [7]에서는 참고문헌 [3]의 2단계 근사화를 사용한 견실한(robust) 접근법에 관한 개념을 충분히 도입하지 못했다고 판단되어진다.

III. 최적 근사화 적분경로

먼저 참고문헌 [3]의 2단계 근사화에 사용되어진 k_z -평면에서의 적분경로를 그림 2에 제시하였고, 이 경로에 대응하는 k_p -평면에서의 근사화 적분경로를 그림 3에 제시하였다. 그림 3에서 α 는 첫 번째 직선경로(L_1^1)와 실수축 사이의 각도에 해당하며 L_1^1 의 기울기($1/T_0$)는 $\tan \alpha$ 로 구해지게 된다.

그림 2에서 보는 바와 같이 CGF의 유도를 위한 견실한 접근방법으로 도입된 2단계 근사화 적분경로가 $C_2(L_1^3)$ 이다^[3]. 참고문헌 [7]에서 견실한 접근방법으로써 2단계 근사화 경로 $C_1(L_1^1, L_1^2)$ 을 그림 1에서와 같이 도입했다는 서술은 두 단계를 거쳐 CGF를 유도한다는 의미에는 맞는 말이지만, 2단계 방법을 도입한 본질적인 이유 측면에서 볼 때 잘못된 표현인 것으로 생각된다. 즉, 그림 2에서 경로 $C_2(L_1^3)$ 를 고려해 놓은 본질적인 이유는 경로 C_1 의 종단점 이후 무시되어질 수도 있는 $f(k_p)$ 의 기여를 고려해 넣을 수 있도록 하기 위해서이다.

그러므로, 그림 3에서 보는 바와 같이 새로운 적분경로 L_1^3 를 도입하는 것이 복소 k_p -평면상에서 견실한(robust) 접근방법인 것으로 판단된다. 그러므로 본 연구에서 사용되어질 근사화 적분경로의 방정식은 다음 식들과 같다.

$$L_1^1: k_p = k_0(t + j\frac{t}{T_0}) \quad , \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (9a)$$

$$L_1^2: k_p = k_0 \left[t + j\frac{(t_1 - t)t_0}{T_0(t_1 - t_0)} \right], \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (9a)$$

$$L_1^3: k_p = k_0 t \quad , \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (9a)$$

여기에서 매개변수 t_2 는 새롭게 도입된 경로 L_1^3 의 종단점이다.

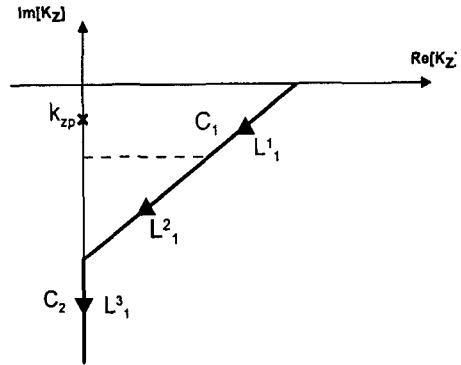


Fig. 2 Approximation path on the k_z -plane used for the two-level approach in [3]

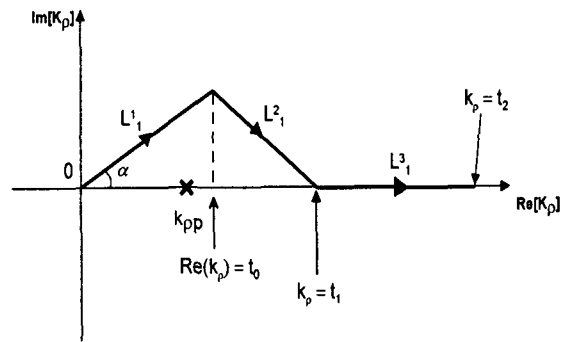


Fig. 3 Approximation path on the k_p -plane correspondent to that given in Fig. 2.

3.1 T_0 의 최적값 선택

앞서 언급한 바와 같이 T_0 의 선택이 매우 중요하므로 T_0 의 최적값 선택을 위하여 먼저 기존 논문들에서는 고려해보지 않았던 적분의 효율적인 asymptotic 계산을 위해 사용되어지는 SDP(Steepest descent path)를 구해보기로 하자.

(1)식으로 표현된 SI를 SDP 방법을 적용하기에 편리한 형태인 (10)식으로 표현하기로 한다.

$$G = \int_{SDP} g(k_p) e^{i z h(k_p)} dk_p \quad (10)$$

여기에서 $h(k_p) = -jk_z = -j(k^2 - k_p^2)^{1/2}$ 이다. 그러므로

saddle point $k_{\rho 0}$ 는 $dh(k_{\rho})/dk_{\rho}=0$ 인 점, 즉 $k_{\rho 0}=0$ 임을 쉽게 알 수 있다. $k_{\rho}=k_{\rho 0}=0$ 인 점에서의 $h(k_{\rho})=-jk$ 인 순 허수로 $h(0)$ 의 실수부가 영임을 알 수 있다. $k_{\rho}=0$ 인 saddle point 근방에서의 k_{ρ} 를 극좌표 형식인 $\delta e^{j\alpha}$ 로 표현한 후 $k_{\rho}=0$ 근방에서 $h(z)$ 는 (11)식과 같이 근사화 되어진다.

$$\begin{aligned} h(z) &= -j(k^2 - k_{\rho}^2)^{1/2} \\ &= -j(k^2 - \delta^2 e^{j2\alpha})^{1/2} \\ &\approx -j(k^2 - j\delta^2 \sin 2\alpha)^{1/2} \\ &\approx -\frac{1}{2} \delta^2 \sin 2\alpha - jk_1^2 \end{aligned} \quad (11)$$

적분 경로를 따라서 saddle point에서 $h(z)$ 의 실수부가 최대가 되는 경로가 SDP이므로, (11)식으로부터 saddle point가 극점이 되기 위한 α 의 값이 $\pi/4$ 임을 쉽게 알 수 있다. 즉, $\alpha=\pi/4$ 로 선택한 경로상에서 $k_{\rho}=0$ 으로부터 δ 만큼 떨어진 곳에서의 $h(z)$ 의 실수부는 (12)식과 같이 된다.

$$Re[h(\delta e^{j\pi/4})] = -\frac{1}{2} \delta^2 \quad (12)$$

즉, $k_{\rho}=0$ 에서 h 의 실수부는 영이고 반면에 $\alpha=\pi/4$ 인 SDP를 따라서 $k_{\rho}=0$ 근방에서 h 의 실수부는 음수이므로, saddle point가 $h(k_{\rho})$ 의 최대점이 됨을 알 수 있다. 결론적으로 L_1^1 을 $k_{\rho}=0$ 근방에서 SDP 형태로 선택하는 것이 타당할 것으로 판단되어 본 논문에서는 매개변수 α 를 $\pi/4$ (즉, $T_0=1$)로 선택하기로 한다.

3.2 나머지 매개변수들의 선택 방법

새로운 CGF 방법에서는 근사화 하기 전에 표면파 극점(SWP)에 의한 기여를 사전 처리하여 근사화 하기에 편리한 파수영역의 그린함수로 만드는 SWP extraction^[1,2] 등의 방법을 사용할 수 없다. 그 이유는 이러한 방법을 사용할 경우 SWP의 기여에 해당하는 공간영역 그린함수는 MoM 행렬 요소 계산시 해석적 적분이 불가능하기 때문이다. 그러므로 SWP 기여를 사전에 처리하지 않은 경우 $f(k_{\rho})$ 는 $k_{\rho}=0$ 근방에서 변곡을 가지고 급격하게 변화된다는 사실은 이미 잘 알려져 있다^[1]. 그러므로 다른 근사화 경로에서와는 달리 t_0 를 작게, 즉 $t_0 < 1$ 로 선택하여 근사화 과정에서 필요한 sampling point를 상대적으로 많도록 하는 것이 타당하다고 생각된다.

경로 L_1^2 와 L_1^3 의 종단점인 t_1 와 t_2 는 새로운 경로 L_1^3 를 도입함에 따라 그다지 critical 하지는 않다. 먼저 t_2 는 매우 큰 k_{ρ} 에 의한 매우 작은 $f(k_{\rho})$ 의 기여도 고려해 넣을 수 있도록 큰 값의 선택이 필요하다. 본 논문에서는 $t_2/k_0=2000$ 으로 선택하였는데, 이러한 선택이 critical 하지 않으므로 1500 혹은 2500의 선택도 가능하다. 마지막으로 주어진 해석 구조에 대해 동작 주파수의 중심 주파수에서 한번의 사전 조사로 적합한 t_1 을 선택하면 된다.

예로 참고문헌 [1]의 해석구조($\epsilon_r=12.6, h=1mm$)에 대해 $t_0=0.5$ 와 $t_1=20$ 을 선택하였다. 물론 t_1 또한 critical 하지 않으므로 10 혹은 30의 선택도 가능하다.

3.3 The present CGF

그러면 참고문헌 [7]에서와 같이 (9)식으로 주어진 근사화 경로에 대해 L_1^3 부터 순차적으로 3단계 근사화를 하여 새로운 CGF를 구하면 (13)식과 같이 된다.

$$G = 2 \left[\sum_{i=1}^{N_3} \frac{a_3 b_3}{(b_3^2 + \rho^2)^{3/2}} + \sum_{i=1}^{N_2} \frac{a_2 b_2}{(b_2^2 + \rho^2)^{3/2}} + \sum_{i=1}^{N_1} \frac{a_1 b_1}{(b_1^2 + \rho^2)^{3/2}} \right] \quad (13)$$

여기에서 a_1, a_2 및 a_3 (b_1, b_2 및 b_3)는 근사화 경로를 따라 복소 지수 함수의 합 형태로 근사화 하는 과정에서 얻어지는 복소 계수(복소 지수)들이고, 밑첨자 1,2 및 3은 각각 경로 L_1^1, L_1^2 및 L_1^3 에서 얻어진 결과임을 의미한다.

IV. 수치 결과

본 논문의 타당성을 확인하기 위하여 참고문헌 [1]의 해석구조에 대한 벡터 포텐셜 그린함수를 넓은 주파수 영역에서 구하는 문제에 본 논문의 방법을 적용해 보았다. 본 논문에서 사용되어진 매개 변수들의 값은 표 1과 같다.

Table 1. Parameters for approximation by the present method

T_0	t_0	t_2	t_1	N_1	N_2	N_3
1	0.5	20	2000	7	13	8

그림 3에서는 다른 세 주파수 영역(5GHz, 20GHz, 40GHz)에서 본 논문의 방법으로 유도된 CGF에 의해 계산된 그린함수 값(점선 결과들)과 수치적분에 의해 계산된 정확한 그린함수 값(실선 결과들)을 비교하여 그림 4에 제시하였다. 두 결과가 전 공간영역에서 뿐만 아니라 넓은 주파수 범위에서도 매우 잘 일치함을 알 수 있다. 본 논문

이 제안하는 방법을 통해 그림 4의 결과를 얻는데 있어, 단 한번 선택된 매개 변수들의 세트(표 1)가 낮은 주파수에서 높은 주파수까지 사용되었다는 사실을 강조하고 싶다.

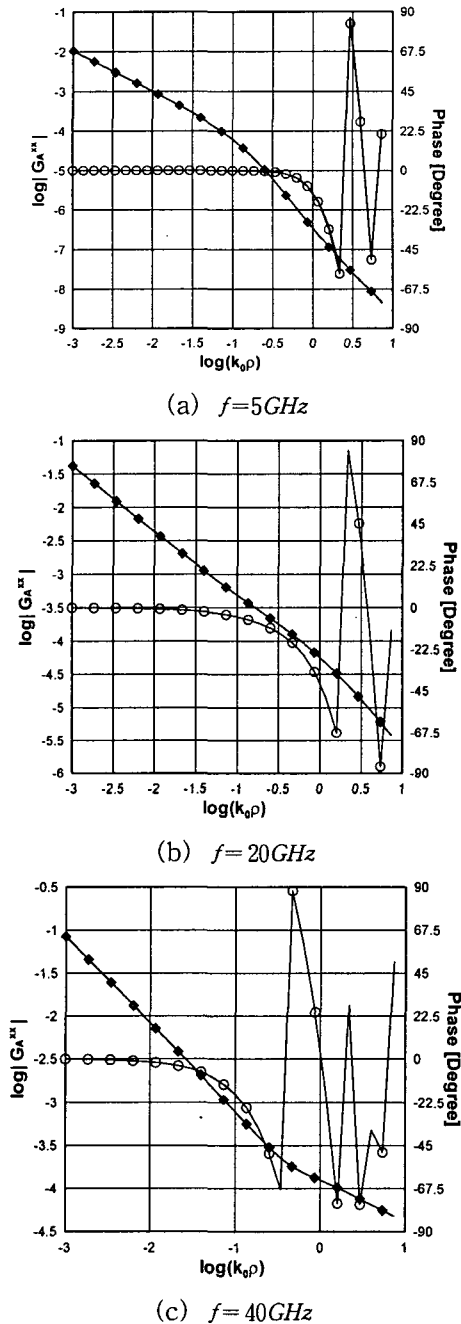


Fig 4. The numerical evaluation results for the phase and magnitude of the vector potential Greens function. (solid lines : numerical integration results, dotted lines : present results)

V. 결론

본 논문이 제안한 근사화 적분 경로를 사용하여 CGF를 구하게 되면, 참고문헌 [7]에서와 같이 T_0 와 같은 매개변수 선택이 critical한 문제점이 해소될 뿐만 아니라, 주어진 해석 구조에 대해 동작 주파수가 변화하더라도 한번 선택된 근사화 매개 변수들이 사용가능하다는 편리한 점이 있음을 알 수 있었다. 이와 같은 개선 결과는 SDP를 고려한 T_0 의 선택과 참고문헌 [7]에서와는 달리 새롭게 도입된 근사화 경로 L_1^3 때문인 것으로 생각된다. 그러므로 본 논문이 제안하는 근사화 적분경로를 통해 유도된 CGF를 MoM과 함께 하여 사용할 경우, 적분방정식의 kernel에 해당하는 그린함수를 정확하게 구할 수 있을 뿐만 아니라, MoM 행렬 요소를 수치적분 없이 해석적으로 구할 수 있어 마이크로스트립 구조와 같은 다층 평판 구조체의 산란문제의 정확하고 효율적인 해석을 위해 많은 도움을 줄 수 있을 것으로 사료된다.

참고문헌

- [1] Y. L. Chow, J. J. Yang, D. G. Fang, and G. E. Howard, "A closed-form spatial Green's function for thick microstrip substrate", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 39, no. 3, pp. 588-592, March 1991.
- [2] M. I. Aksun and R. Mittra, "Derivation of closed-form Green's functions for a general microstrip geometry", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 40, no. 11, pp. 2055-2062, Nov. 1992.
- [3] M. I. Aksun, "A robust approach for derivation of closed-form Green's functions", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 44, no. 5, pp. 651-658, May 1996.
- [4] L. Alatan, M. I. Aksun, K. Mahadevan and M. T. Birand, "Analytical evaluation of the MoM matrix elements", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 44, no. 4, pp. 519-525, April 1996.
- [5] L. Tarricone, M. Mongiardo, and F. Cervelli, "A quasi-one-dimensional integration technique for the analysis of planar microstrip circuits via MPIE/MoM", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 49, no. 3, pp. 517-523, March 2001.
- [6] Y. S. Lee, E. J. Kim and Y. K. Cho, "Efficient computation of MoM matrix Elements in Analysis of General Microstrip structure", *IEICE Trans. on Electronics*, vol. E85-C, no. 12, pp. 2109-2116, December 2002.
- [7] Y. Ge and K. P. Esselle, "New Closed-Form Greens Functions for Microstrip Structures-Theory and Results", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 50, no.6, pp. 1556-1560, June 2002.