

A Study on Properties of the survival function Estimators with Weibull approximation

Jae Man Lee¹⁾ · Young Joon Cha²⁾

요약

In this paper we propose a local smoothing of the Nelson type estimator for the survival function based on an approximation by the Weibull distribution function. It appears that Mean Square Error and Bias of the smoothed estimator of the Nelson type survival function estimator is significantly smaller than that of the smoothed estimator of the Kaplan-Meier survival function estimator.

주제어: 생존함수, 비모수적 추정량, 와이블 근사

1. 서론

임상실험에서 일정시점 이상 생존할 확률을 나타내는 생존함수나 신뢰성공학 분야에서 컴퓨터, 자동차, 통신시스템이나 부품의 신뢰성분석에서 주어진 조건아래 특정 기간 이상 의도된 기능을 수행할 확률로 정의되는 신뢰도는 치료요법이나 처치의 효과를 비교하거나 부품이나 체계의 신뢰성에 대한 정량적 비교를 필요로 할 때 사용되는 중요한 측도이다.

이와 같은 생존함수나 신뢰도에 대한 추정은 주로 모수 모형에서 이루어져 왔다. 그러나 근래에는 수명분포에 대한 가정을 크게 완화한 비모수 모형에서도 많이 연구되고 있다. 한편 추정에 이용되는 부품이나 시스템의 수명 관측치는 시간에 관련된 자료의 특성상 모든 실험대상의 수명을 관측한다는 것은 현실적으로 어렵다. 따라서 여러 가지 형태의 관측 중단이 존재하는 실험환경에서 수집되는 불완전한 자료에 의존하는 추정방법이 필요하다.

1) Professor, Department of Information and Statistics, Andong National University, Andong, 760-749, Korea
E-mail: leejm@andong.ac.kr

2) Professor, Department of Information and Statistics, Andong National University, Andong, 760-749, Korea
E-mail: yjcha@andong.ac.kr

관측 중단이 존재하는 실험환경에서 수집되는 불완전한 자료를 이용한 생존함수의 비모수적 추정은 Kaplan과 Meier(1958)에 의하여 최초로 제안되었다(카플란 마이어 추정량). 그 후 Nelson (1972)은 누적고장률에 대한 비모수적 추정량을 제안하였는데 이를 이용하면 누적고장률의 함수로 표현되는 신뢰도에 대한 추정량으로 카플란 마이어 추정량과는 다른 형태인 넬슨(Nelson)형 추정량을 구성할 수 있다. 이들 신뢰도의 비모수적 추정량들에 대한 특성은 Breslow와 Crowley(1974) 이래로 많은 연구자들에 의해 연구되고 있다. Fleming과 Harrington(1984)은 평균제곱오차 관점에서 넬슨 추정량이 카플란 마이어 추정량보다 추정능력이 높음을 보였다.

카플란 마이어 추정량이나 넬슨 추정량은 추정량의 구성상 관측중단이 일어난 관측수명을 전후하여 추정치의 변화가 없는 계단함수(step function)이므로 연속형수명분포의 생존함수의 추정 시 서로 다른 시점의 서로 다른 생존함수 값이 동일한 값으로 추정되는 불합리함을 감수할 수밖에 없다. 이러한 문제에 대한 대안으로 Rossa와 Zieliński는 생존함수의 구간별 와이블 근사를 이용하여 카플란 마이어 추정량을 평활한 생존함수의 추정량(와이블 근사 추정량)을 제안하였다.

생존함수의 와이블 근사 추정량을 제안한 Rossa와 Zieliński는 모의실험을 통하여 제안한 추정량이 카플란 마이어 추정량보다 제곱평균오차(Mean squared error: MSE)의 관점에서 우수함을 보였다.

본 논문에서는 평균제곱오차 관점에서 넬슨 추정량이 카플란 마이어 추정량보다 추정능력이 우수함을 지적한 Fleming과 Harrington의 결과에 주목하여 넬슨 추정량을 바탕으로 하는 와이블 근사 추정량을 구성하고 제곱평균오차와 편의의 관점에서 제안된 추정량의 특성을 Rossa와 Zieliński의 와이블 근사 추정량의 특성과 비교·분석하고자 한다.

2. 생존함수의 비모수적 추정량

임상실험에서 환자의 수명이 임의 중단모형으로 관측된다고 하자. 즉 수명 $T_i, i=1, \dots, n$ 를 연속인 분포 함수 $F(t)$ 를 갖는 확률변수라 하고 각 환자에 대한 수명 관측 시간 $C_i, i=1, \dots, n$ 을 분포함수가 $G(c)$ 인 확률변수라고 할 때, 이들 수명과 관측시간은 서로 독립이고 관측 수명은 다음과 같이 (X_i, δ_i) 로 나타

낼 수 있다.

$$X_i = \min(T_i, C_i); \quad \delta_i = \begin{cases} 1, & T_i \leq C_i \text{ 일 때} \\ 0, & T_i > C_i \text{ 일 때} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n.$$

편의상 관측 수명 $X_1 \cdots X_n$ 이 $X_1 \leq \cdots \leq X_n$ 라하고, 이들 순서 통계량의 관측 중단여부를 나타내는 지시함수를 $\delta_1, \dots, \delta_n$ 라고 하면 생존함수 $S(x) = 1 - F(x)$ 에 대한 카플란 마이어 추정량 ($SKM(x)$)은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$SKM(x) = \begin{cases} \prod_{i: X_i \leq x} \left(1 - \frac{\delta_i}{n - i + 1}\right), & x \leq X_n \text{ 일 때} \\ 0, & x > X_n \text{ 일 때} \end{cases}$$

먼저 와이블 근사 추정량을 구성하기 위하여 필요한 몇 가지 기호를 정의한다. 임의중단모형에서 관측된 수명자료 (X_i, δ_i) , $i = 1, \dots, n$ 에서 $\delta_i = 1$ (수명이 중단됨이 없이 관측된 경우)이고 $i < n$ 인 X_i 중에서 서로 다른 값이 $N-1$ 개라고 하고 이들의 인덱스를 i_1, i_2, \dots, i_{N-1} 이라고 하자. 그리고

$$X_0^* = 0; \quad X_j^* = X_{i_j}, \quad j = 1, \dots, N-1; \quad X_N^* = X_n \quad (2.1)$$

두고 $KM_j = (SKM(X_{j-1}^*) + SKM(X_j^*))/2$, $j = 1, 2, \dots, N-1$; $KM_N = SKM(X_n)/2$ 이라고 하면 (X_j^*, KM_j) , $j = 1, 2, \dots, N$ 과 같은 N 개의 가상의 자료점을 구성할 수 있다.

Rossa와 Zieliński는 구간별 생존함수를 와이블 분포의 생존함수로 가정하고 N 개의 자료 점 중에 x 에 인접한 m 개의 자료점을 이용하여 추정된 와이블 분포의 생존함수를 구간별 생존함수의 와이블 근사 추정량 $SKMW_m(x)$ 으로 제안하였다. Rossa와 Zieliński의 와이블 근사 추정량 $SKMW_m(x)$ 을 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

(1) $m=2$ 인 경우

와이블분포의 생존함수 $W(x|\lambda, a) = \exp(-\lambda x^a)$ 를 이용하여 구간 $X_{j-1}^* < x \leq X_j^*$ 에서 두 점 (X_{j-1}^*, KM_{j-1}) 와 (X_j^*, KM_j) 을 통과하는 와이블분포의 생존함수 $W(x|\lambda, a)$ 를 추정하면 생존함수 $S(x)$ 의 와이블 근사 추정량

$SKMW_2(x)$ 을 구성할 수 있다.

즉, 각 구간 $X_{j-1}^* < x \leq X_j^*, j=1, \dots, N$ 별로 와이블생존함수에 대한 선형화 변환인 $\log(-\log W(x|\lambda, \alpha)) = \log \lambda + \alpha \log x$ 에 두 점 (X_{j-1}^*, KM_{j-1}) 와 (X_j^*, KM_j) 을 대입한 λ 와 α 에 대한 연립방정식

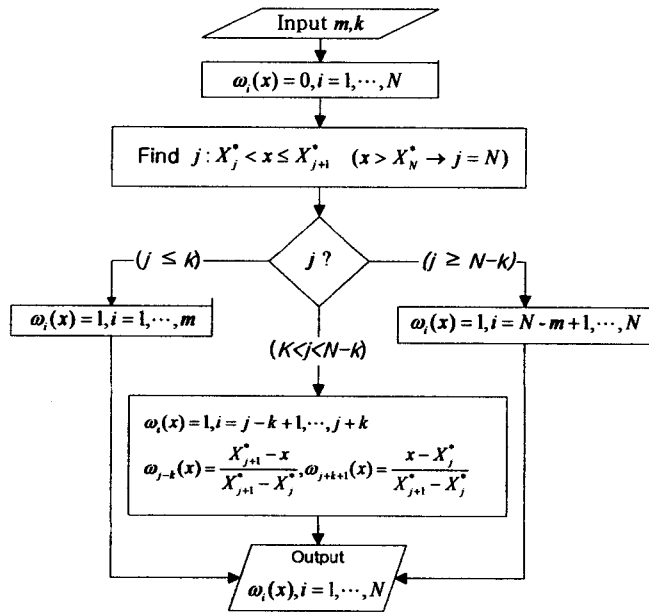
$$\begin{cases} \log \lambda + \alpha \log X_{j-1}^* = \log(-\log KM_{j-1}) \\ \log \lambda + \alpha \log X_j^* = \log(-\log KM_j) \end{cases}$$

의 해를 구하여 $W(x|\lambda, \alpha) = \exp(-\lambda x^\alpha)$ 에 대입한 값으로 구간별 $SKMW_2(x)$ 의 값을 구한다.

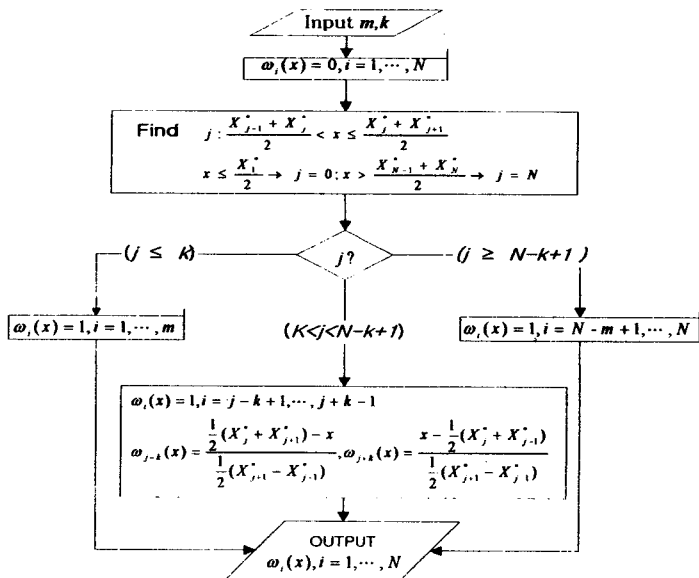
(2) $m > 2$ 인 경우

주어진 x 에서 와이블 근사 추정량 $SKMW_m(x)$ 은 x 에 인접한 자료점에 가중치를 부여하는 방법으로 구성된다. $\omega_i(x), i=1, \dots, N$ 을 주어진 x 에 따라 서로 다른 값으로 부여된 가중치라고 하고 와이블생존함수의 선형변환을 고려한 자료점 $(X_j^*, KM_j), j=1, \dots, N$ 의 변환 $(H_j = \log(X_j^*), Y_j = \log(-\log(KM_j)))$ $j=1, \dots, N$ 을 이용하여 $\sum_j \omega_j(x) (Y_j - \Lambda - \alpha H_j)^2$ 를 최소로 하는 $\Lambda = \log \lambda$ 와 α 를 각각 $\hat{\Lambda}$ 와 $\hat{\alpha}$ 를 구할 수 있다. 이를 이용하면 주어진 x 를 포함하는 각 구간별 와이블 근사 추정량은 $SKMW_m(x) = \exp(-\hat{\lambda} x^{\hat{\alpha}})$, $\hat{\lambda} = \exp(\hat{\Lambda})$ 와 같이 나타낼 수 있다.

구간별 와이블 근사를 위하여 주어진 x 에 따른 가중치는 m 이 홀수이면 <그림 2-1>, 짝수이면 <그림 2-2>와 같이 부여한다.



<그림2-1> m 이 홀수 일 때 ($m = 2k + 1$)



<그림2-2> m 이 짝수 일 때 ($m = 2k$)

한편 Nelson (1972)은 누적위험률 $\Lambda(x) = -\log S(x)$ 에 대한 다음과 같은 비모수적 추정량 $\hat{\Lambda}(x)$ 을 제안하였다.

$$\hat{\Lambda}(x) = \sum_{i: X_i^* \leq x} \frac{\delta_i}{n-i+1}.$$

$S(x) = e^{-\Lambda(x)}$ 이므로 누적위험률 $\Lambda(x)$ 의 추정량 $\hat{\Lambda}(x)$ 을 이용하면 생존함수 $S(x)$ 의 넬슨 추정량 $SM(x)$ 을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$SM(x) = \prod_{i: X_i^* \leq x} e^{-\frac{\delta_i}{n-i+1}}$$

이제 넬슨 추정량 $SM(x)$ 를 이용한 생존함수 $S(x)$ 의 와이블 근사추정량 $SNW_m(x)$ 를 구성하기 위하여 (2.1)식과 같이 주어지는 $X_j^*, j=1, 2, \dots, N$ 에서 넬슨 추정량 $SM(X_j^*)$ 의 값을 $SN_j = (SM(X_{j-1}^*) + SM(X_j^*)) / 2, j=1, \dots, N-1$ 와 $SN_N = SM(X_N^*) / 2$ 로 수정한 가상의 자료점 $(X_j^*, SN_j), j=1, 2, \dots, N$ 을 이용한다.

(3) $m=2$ 인 경우

구간 $X_{j-1}^* < x \leq X_j^*$ 에서 두 점 (X_{j-1}^*, SN_{j-1}) 와 (X_j^*, SN_j) 을 지나는 와이블분포의 생존함수 $W(x|\lambda, a)$ 를 생존함수 $S(x)$ 의 와이블 근사 추정량 $SNW_2(x)$ 이라고 하면 $SNW_2(x)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$SNW_2(x) = \exp\{-\exp(W)\},$$

여기서

$$W = \begin{cases} W_1 + \frac{W_2 - W_1}{H_2 - H_1}(H - H_1), & X_0^* < x \leq X_1^* \text{ 일때,} \\ W_{j-1} + \frac{W_j - W_{j-1}}{H_j - H_{j-1}}(H - H_{j-1}), & X_0^* < X_{j-1}^* < x \leq X_j^* \leq X_N^* \text{ 일때,} \\ W_{N-1} + \frac{W_N - W_{N-1}}{H_N - H_{N-1}}(H - H_{N-1}), & x > X_N^* \text{ 일때} \end{cases}$$

그리고 $H_j = \log(X_j^*), W_j = \log(-\log(SN_j)), H = \log x$ 이다.

(4) $m > 2$ 인 경우

주어진 x 의 구간에서 넬슨 추정량 $SM(x)$ 를 이용한 생존함수 $S(x)$ 의 와이블근사 추정량 $SNW_m(x)$ 를 구성하기 위하여 x 에 인접한 자료점에 <그림 2-1>과 <그림

2-2>와 같은 방법으로 부여한 각 구간별 가중치 $\omega_i(x), i=1, \dots, N$ 과 변환 $H_j = \log(X_j^*)$ 와 $W_j = \log(-\log(SN_j))$ 을 이용한다.

$\sum \omega_j(x) (W_j - \Lambda - \alpha H_j)^2$ 를 최소로 하는 $\Lambda = \log \lambda$ 와 α 의 최소제곱추정량을 각각 $\hat{\Lambda}$ 와 $\hat{\alpha}$ 이라 하면 주어진 x 를 포함하는 각 구간별 와이블 근사 추정량은 $SNW_m(x) = \exp(-\exp(\hat{\Lambda}) \cdot x^{\hat{\alpha}})$ 와 같이 나타낼 수 있다.

생존함수의 이러한 추정량들 중에 카플란 마이어 추정량이나 넬슨 추정량의 경우는 점근적 성질이 잘 알려져 있지만 와이블 근사 추정량은 복잡한 구성으로 인하여 점근적 성질의 해석학적 규명은 쉽지 않다. 임상실험이나 신뢰성 공학분야의 실용적 측면을 고려하면 표본의 크기가 크지 않은 경우에 이들 추정량의 추정능력이 주요 관심사일 수 있다. 따라서 몬테 칼로 모의실험을 통하여 이들 추정량에 대한 소표본 추정능력을 평균제곱오차와 편의의 관점에서 비교하고자 한다.

3. 와이블 근사 추정량의 추정 능력 비교

생존함수의 카프란 마이어 추정량을 바탕으로 하는 Rossa와 Zieliński의 와이블 근사 추정량 $SKMW_m(x)$ 와 제안된 와이블 근사 추정량 $SNW_m(x)$ 의 추정능력을 평균제곱오차와 편의의 관점에서 비교하기 위하여 수명분포, 관측중단률, 표본의 크기, 추정량 구성에 사용하는 자료점의 수 m 을 요인으로 하는 모의실험을 다음과 같이 실시하였다.

$W(\lambda, a)$, $\log N(\mu, \sigma)$, $\Gamma(\lambda, a)$ 는 각각 확률밀도함수가 아래와 같은 와이블분포, 대수정규분포, 감마분포라고 하자.

수명분포	확률밀도함수
$W(\lambda, a)$	$f(x) = \lambda a x^{a-1} e^{-\lambda x^a}$
$\log N(\mu, \sigma)$	$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$
$\Gamma(\lambda, a)$	$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}$

수명분포는 고장률 유형을 고려하여 척도모수 λ 가 1이고, 형상모수 a 가 0.5,

1.0, 1.5인 와이블분포, $\log N(0, 1)$, $\Gamma(2, 2)$ 로 설정하고, 관측중단시간(Censoring time)의 분포는 수명분포가 와이블분포인 경우에는 관측중단률(Censoring rate)이 10%, 30%, 50%가 되도록 <표3.2>과 같이 설정하고 수명분포가 $\log N(0, 1)$ 와 $\Gamma(2.0, 2.0)$ 인 경우에는 $W(1.0, 1.0)$ 로 설정하였다. 수명분포가 $\log N(0, 1)$ 와 $\Gamma(2.0, 2.0)$ 인 경우의 관측중단률은 각각 38.2%, 55.5%로 추정된다.

<표3.2> 수명분포와 관측중단률에 따른 관측중단시간의 분포

관측중단률 수명분포	10%	30%	50%
$W(1.0, 0.5)$	$W(0.067, 1.0)$	$W(0.374, 1.0)$	$W(1.335, 1.0)$
$W(1.0, 1.0)$	$W(0.111, 1.0)$	$W(0.429, 1.0)$	$W(1.0, 1.0)$
$W(1.0, 1.5)$	$W(0.120, 1.0)$	$W(0.431, 1.0)$	$W(0.912, 1.0)$

각각의 수명분포와 관측중단시간의 분포로부터 크기가 n 인 모의 표본을 생성시켜 $S(x)$ 가 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1이 되는 각 시점 x 에서 $SKM(x)$, $SN(x)$, $SKMW_m(x)$, $SNW_m(x)$, $m=2,3,4,5$ 를 구하는 과정을 10,000회씩 반복하여 각 추정량의 편의와 평균제곱오차를 추정하였다. 표본의 크기 n 은 30, 50, 100을 고려하였다.

모의실험에서 고려한 관측중단률과 표본의 크기에 따른 실험결과와 수명분포로 고려한 와이블분포의 고장률 유형에 따른 실험결과는 유사한 경향을 보이고 있어 수명분포가 $W(1.0, 1.0)$ 이고 관측중단률이 30%일 때, 수명분포가 $\log N(0.0, 1.0)$ 와 $\Gamma(2.0, 2.0)$ 일 때 표본의 크기가 50인 경우를 각각 <표3.3>, <표3.4>, <표3.5>에 제시하였다.

실험 결과에서 수명이 와이블 분포를 따르는 경우 넬슨 추정량을 이용한 와이블근사추정량 $SNW_m(x)$ 이 카프란 마이어 추정량을 이용한 와이블근사추정량 $SKMW_m(x)$ 에 비하여 신뢰도가 0.1인 시점을 제외한 모든 시점과 $m=2,3,4,5$ 에서 평균제곱오차의 추정치가 작게 나타나고 있음을 볼 수 있다. 편의의 경우는 $SNW_m(x)$ 이 $SKMW_m(x)$ 보다 다소 크게 나타나고 있다. 수명이 대수정규분포와 감마분포를 따르는 경우에는 신뢰도가 0.3이하인 시점을 제외하면 수명이 와이블 분포를 따를 때의 결과와 유사한 경향을 보인다.

m 의 증가에 따른 $SKMW_m(x)$ 와 $SNW_m(x)$ 의 평균제곱오차의 추정치는 실험

에서 고려한 모든 시점에서 m 이 증가함에 따라 감소하는 경향을 보인다. m 이 5가 되면 신뢰도 $S(x) = 0.9$ 인 x 에서는 $m=4$ 일 때 $SKMW_m(x)$ 와 $SNW_m(x)$ 의 평균제곱오차의 추정치보다 커지고, 신뢰도가 0.8, \dots , 0.1이 되는 각 시점에서는 m 이 2, 3, 4로 증가할 때 줄어드는 $SKMW_m(x)$ 와 $SNW_m(x)$ 의 평균제곱오차의 추정치보다 감소하는 정도가 낮아짐을 볼 수 있다.

4. 결론

평균제곱오차의 관점에서 Rossa와 Zieliński의 와이블 근사 추정량 $SKMW_m(x)$ 와 본 연구에서 제안된 와이블 근사 추정량 $SNW_m(x)$ 을 비교한 결과 m 이 증가할수록 추정능력이 증가하다가 m 이 5가 되면 수명분포의 양쪽 꼬리부분에서 추정능력이 다소 낮아짐을 보이지만 전반적으로 m 이 5일 때 추정능력이 가장 높은 것으로 나타났으며 신뢰도가 0.3보다 큰 대부분의 시점에서 제안된 추정량 $SNW_5(x)$ 이 Rossa와 Zieliński의 추정량 $SKMW_5(x)$ 보다 우수한 것으로 나타났다.

참고문헌

- [1] Breslow, N. E. and Crowley, J. (1974). A Large Sample Study of the Life Table and Product Limit Estimators under Random Censorship, *The Annals of Statistics*, Vol. 2, 435-453.
- [2] Fleming, T. R. and Harrington, D. P. (1984). Nonparametric Estimation of the Survival Distribution in Censored Data, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Vol. 13, 2469-2486.
- [3] Kaplan, E. L. and Meier, P. (1957). Nonparametric Estimation From Incomplete Sample, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 53, 457-481.

- [4] Miller, R. G.(1981). *Survival Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [5] Moeschberger, M. L. and Klein, J. P. (1985) A Comparison of Several Methods of Estimating the Survival Function when There Is Extreme Right Censoring, *Biometrics*, Vol. 41, 253-259.
- [6] Nelson, W. B.(1972). Theory and Applications of Hazard Plotting for Censored Failure Data, *Technometrics*, Vol.14, 945-996.
- [7] Rossa, A. and Zieliński, S. (2002) A Simple Improvement of the Kaplan-Meier Estimator, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Vol. 31(1), 147-158.

<표3.3> 수명분포: $W(1.0, 1.0)$, 관측중단시간 분포: $W(0.429, 1.0)$, $n=50$ 일 때 생존함수추정량의 평균제곱오차(mse)와 편의(bias)의 추정치

추정량	S(x):	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
SKM(x)	mse	0.00180	0.00320	0.00431	0.00503	0.00527	0.00509	0.00455	0.00357	0.00217
	bias	0.00052	0.00093	0.00106	0.00119	0.00030	-0.00022	-0.00040	-0.00083	-0.00054
SKMW ₂ (x)	mse	0.00171	0.00310	0.00421	0.00491	0.00517	0.00496	0.00442	0.00343	0.00201
	bias	0.00034	0.00069	0.00097	0.00118	0.00033	-0.00020	-0.00041	-0.00083	-0.00059
SKMW ₃ (x)	mse	0.00163	0.00301	0.00411	0.00481	0.00508	0.00485	0.00430	0.00330	0.00189
	bias	0.00045	0.00067	0.00095	0.00118	0.00040	-0.00011	-0.00036	-0.00075	-0.00078
SKMW ₄ (x)	mse	0.00159	0.00295	0.00404	0.00473	0.00501	0.00478	0.00421	0.00322	0.00182
	bias	0.00057	0.00068	0.00096	0.00121	0.00048	-0.00005	-0.00029	-0.00062	-0.00083
SKMW ₅ (x)	mse	0.00160	0.00292	0.00400	0.00470	0.00498	0.00476	0.00418	0.00319	0.00170
	bias	-0.00190	-0.00208	-0.00177	-0.00158	-0.00234	-0.00295	-0.00331	-0.00376	-0.00308
SN(x)	mse	0.00176	0.00314	0.00424	0.00495	0.00519	0.00502	0.00450	0.00354	0.00218
	bias	0.00148	0.00295	0.00409	0.00528	0.00550	0.00614	0.00719	0.00818	0.01052
SNW ₂ (x)	mse	0.00168	0.00304	0.00414	0.00484	0.00509	0.00489	0.00437	0.00340	0.00210
	bias	0.00134	0.00270	0.00401	0.00527	0.00553	0.00616	0.00718	0.00821	0.01008
SNW ₃ (x)	mse	0.00160	0.00296	0.00404	0.00474	0.00500	0.00479	0.00425	0.00328	0.00198
	bias	0.00145	0.00268	0.00399	0.00528	0.00560	0.00625	0.00726	0.00834	0.01001
SNW ₄ (x)	mse	0.00156	0.00290	0.00397	0.00466	0.00493	0.00472	0.00416	0.00320	0.00192
	bias	0.00156	0.00269	0.00400	0.00531	0.00569	0.00632	0.00734	0.00853	0.01007
SNW ₅ (x)	mse	0.00157	0.00286	0.00392	0.00460	0.00487	0.00466	0.00409	0.00312	0.00175
	bias	-0.00088	-0.00004	0.00130	0.00255	0.00290	0.00346	0.00437	0.00549	0.00792

<표3.4> 수명분포: $\log N(0.0, 1.0)$; $n = 50$ 일 때 생존함수추정량의
평균제곱오차(mse)와 편의(bias)의 추정치

추정량	$S(x)$:	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
$SKM(x)$	mse	0.00214	0.00425	0.00631	0.00795	0.00963	0.01174	0.01663	0.02369	0.01250
	bias	0.00084	0.00077	0.00094	0.00109	0.00056	0.00048	-0.00617	-0.04008	-0.07058
$SKMW_2(x)$	mse	0.00200	0.00404	0.00599	0.00749	0.00886	0.01029	0.01211	0.01486	0.01573
	bias	0.00061	0.00045	0.00059	0.00035	-0.00095	-0.00252	-0.00399	-0.00140	0.02320
$SKMW_3(x)$	mse	0.00189	0.00388	0.00572	0.00710	0.00828	0.00944	0.01124	0.01369	0.01386
	bias	0.00121	0.00099	0.00103	0.00070	-0.00050	-0.00123	-0.00122	0.00315	0.02204
$SKMW_4(x)$	mse	0.00184	0.00378	0.00554	0.00686	0.00793	0.00908	0.01102	0.01324	0.01255
	bias	0.00182	0.00154	0.00150	0.00132	0.00056	0.00065	0.00148	0.00510	0.01867
$SKMW_5(x)$	mse	0.00187	0.00376	0.00549	0.00678	0.00777	0.00877	0.01091	0.01288	0.01145
	bias	-0.00064	-0.00220	-0.00310	-0.00418	-0.00479	-0.00120	0.00295	0.00583	0.01484
$SN(x)$	mse	0.00210	0.00415	0.00614	0.00771	0.00926	0.01093	0.01264	0.01485	0.02344
	bias	0.00204	0.00342	0.00536	0.00775	0.01028	0.01519	0.02420	0.04699	0.10435
$SNW_2(x)$	mse	0.00195	0.00394	0.00583	0.00726	0.00852	0.00982	0.01190	0.01580	0.01852
	bias	0.00182	0.00312	0.00505	0.00711	0.00909	0.01245	0.01679	0.02136	0.04247
$SNW_3(x)$	mse	0.00185	0.00379	0.00557	0.00690	0.00798	0.00912	0.01117	0.01457	0.01641
	bias	0.00242	0.00367	0.00551	0.00754	0.00979	0.01409	0.01969	0.02673	0.04277
$SNW_4(x)$	mse	0.00180	0.00370	0.00540	0.00667	0.00769	0.00886	0.01107	0.01413	0.01483
	bias	0.00302	0.00421	0.00599	0.00823	0.01106	0.01624	0.02253	0.02886	0.03940
$SNW_5(x)$	mse	0.00183	0.00365	0.00531	0.00652	0.00743	0.00853	0.01103	0.01378	0.01348
	bias	0.00060	0.00054	0.00150	0.00295	0.00608	0.01472	0.02413	0.02953	0.03515

<표3.5> 수명분포: $\Gamma(2.0, 2.0)$; $n = 50$ 일 때 생존함수추정량의
평균제곱오차(mse)와 편의(bias)의 추정치

추정량	$S(x)$:	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
$SKM(x)$	mse	0.00217	0.00434	0.00614	0.00764	0.00915	0.01029	0.01096	0.01181	0.00978
	bias	-0.00030	0.00006	-0.00091	-0.00099	-0.00040	-0.00078	-0.00117	-0.00639	-0.01800
$SKMW_2(x)$	mse	0.00202	0.00410	0.00582	0.00728	0.00858	0.00945	0.00958	0.00886	0.00669
	bias	-0.00078	-0.00048	-0.00121	-0.00153	-0.00133	-0.00200	-0.00343	-0.00534	0.00002
$SKMW_3(x)$	mse	0.00190	0.00390	0.00555	0.00695	0.00811	0.00880	0.00867	0.00783	0.00598
	bias	-0.00064	-0.00044	-0.00108	-0.00155	-0.00157	-0.00215	-0.00377	-0.00438	0.00295
$SKMW_4(x)$	mse	0.00183	0.00378	0.00538	0.00673	0.00781	0.00838	0.00826	0.00748	0.00575
	bias	-0.00042	-0.00036	-0.00094	-0.00138	-0.00160	-0.00201	-0.00340	-0.00332	0.00480
$SKMW_5(x)$	mse	0.00187	0.00375	0.00532	0.00669	0.00771	0.00811	0.00776	0.00716	0.00558
	bias	-0.00319	-0.00435	-0.00549	-0.00670	-0.00774	-0.00809	-0.00700	-0.00303	0.00607
$SN(x)$	mse	0.00211	0.00423	0.00597	0.00740	0.00882	0.00981	0.01009	0.00957	0.00933
	bias	0.00089	0.00268	0.00343	0.00544	0.00861	0.01178	0.01697	0.02580	0.04782
$SNW_2(x)$	mse	0.00197	0.00400	0.00565	0.00704	0.00827	0.00905	0.00926	0.00922	0.00817
	bias	0.00042	0.00216	0.00316	0.00495	0.00781	0.01078	0.01407	0.01606	0.01876
$SNW_3(x)$	mse	0.00186	0.00381	0.00540	0.00673	0.00782	0.00844	0.00844	0.00817	0.00734
	bias	0.00056	0.00221	0.00331	0.00497	0.00772	0.01092	0.01410	0.01719	0.02271
$SNW_4(x)$	mse	0.00179	0.00369	0.00523	0.00652	0.00753	0.00806	0.00809	0.00787	0.00709
	bias	0.00079	0.00229	0.00347	0.00519	0.00782	0.01130	0.01471	0.01837	0.02499
$SNW_5(x)$	mse	0.00182	0.00363	0.00514	0.00641	0.00732	0.00766	0.00752	0.00756	0.00694
	bias	-0.00194	-0.00162	-0.00098	0.00005	0.00198	0.00565	0.01143	0.01877	0.02640