

# 피라미드의 3-차원 메쉬로의 개선된 매핑

장정환\*, 김진수\*\*, 권기룡\*

\*부산외국어대학교 디지털정보공학부  
e-mail: {jhchang, krkwon}@pufs.ac.kr

\*\*건국대학교 컴퓨터·응용공학부  
e-mail: jinsoo@kku.ac.kr

## An Improved Mapping of Pyramids into 3-Dimensional Meshes

Jung-Hwan Chang\*, Jinsoo Kim\*\*, Ki-Ryong Kwon\*

\*Division of Digital & Information Eng., Pusan University of Foreign Studies

\*\*Dept of Computer & Applied Eng., Konkuk University

### 요 약

본 논문에서는 주어진 손님 그래프 모델의 정점들과 간선들을 성능 파라미터들을 보다 우수하게 유지하면서 주인 그래프의 대응되는 정점들 및 경로들로 매핑시키는 "그래프 임베딩 문제"라고 불리는 그래프이론 문제를 다룬다.

높이가  $N$ 인 피라미드 모델을 손님 그래프로 하여  $0 < k < N-1$ 를 만족하는 임의의 정수  $k$ 에 대해 3-차원 메쉬  $(4^{(k+1)}+2)/3 \times 2^{(N-k-1)} \times 2^{(N-k-1)}$  구조의 병렬컴퓨터 모델로 임베딩할 수 있는 새로운 매핑 함수를 제안하고 해당 함수 적용시 신장율이  $\max\{(2^{(2k+1)}+4)/3, 5 \cdot 2^{N-k-2}/8\}$ 로 개선됨을 증명함으로써 그 성능을 분석한다.

### 1. 서론

대규모 병렬처리시스템에서 다양한 응용분야의 알고리즘들을 효율적으로 수용하여 제 성능을 발휘할 수 있도록 하기 위해서는 시스템을 구성하고 있는 노드들의 연결 구조를 그래프 형태로 표현한 상호연결망(interconnection network) 위상의 역할이 매우 중요한데, 그 이유는 해당 그래프에 대한 이론적인 특성에 해당 병렬처리시스템의 성능이 의존적일 수밖에 없기 때문이다. 일반적으로 상호연결망의 성능에 큰 영향을 미치는 그래프 이론적인 요소로는 지름(diameter), 연결도(connectivity), 고장 허용도(fault tolerance), 라우팅 알고리즘의 간결성 및 효율성 등이 중요하게 평가되고 있는데, 이러한 요소들을 비교 분석하여 보다 좋은 성능의 상호연결망을 설계하려는 시도는 그래프 이론 및 병렬처리 분야에서 많은 관심을 받고 있다. 아울러 알고리즘에 내재된 자료구조를 실제 구현된 시스템 구조에 효율적으로 매핑시키거나, 상호연결망 상호간 시뮬레이션을 위한 체계적인 접근으로서 그래프 임베딩(embedding) 문제가

대두하게 되었다[1].

지난 십 수년간 큰 관심을 받아 온 대표적인 상호연결망으로는 하이퍼큐브(hypercube)를 꼽을 수 있으며, 피라미드(pyramid)와 메쉬(mesh) 또한 병렬처리분야에서 비교적 잘 알려진 상호연결망 구조 중 하나로 널리 이용되고 있는 실정이다[2,3].

높이  $N$ 인 피라미드(pyramid)의 경우  $(4^N-1)/3$ 개의 정점들을 갖는 계층적 구조의 그래프로서 오늘날 각광을 받고 있는 멀티미디어 분야의 저 레벨에서의 픽셀 단위 영상처리 관련 기능을 효율적으로 처리해 줄 수 있는 구조적 특성으로 인해 관련 분야를 중심으로 널리 이용되어 왔으나 오늘날은 내재된 트리(tree) 및 메쉬(mesh) 구조를 다양하게 활용함으로써 그래프 관련 기본문제들의 해결에도 좋은 성과를 얻고 있는 것으로 알려져 있다[3].

한편 3-차원 메쉬(mesh)의 경우도 2-차원 메쉬에 비해 제작이 복잡한 점은 있으나 보다 짧은 지름 및 큰 이분폭(bisection width) 등 성능에 미치는 긍정적 효과와 확장성 등의 장점으로 인해 대규모 병렬처리시스템(massively parallel processing system)으로 비교적 널리 구현되고 있는 실정이다.

손님(guest) 그래프  $G$ 의 주인(host) 그래프  $H$ 로의 임베딩(embedding)이란  $G$ 의 정점들의 집합  $V(G)$ 로부터  $H$ 의 정점(vertex)들의 집합  $V(H)$ 로의 일대일 대응을 의미하는 함수  $F$ 로 정의된다. 이때  $G$ 의 간선(edge)  $e=(v,w)$ 는  $F(v)$ 와  $F(w)$ 를 연결하는  $H$ 의 경로(path)  $F(e)$ 에 대응된다.

임베딩  $F$ 의 비용을 측정하는 척도로는 신장율(dilation)이 주로 사용되고 있다. 임베딩  $F$  하에서  $G$ 의 간선  $e$ 의 신장율은 이에 대응되는  $H$ 에서의 경로  $F(e)$ 의 길이를 의미하고 모든 간선에 대해 적용한 결과 최대값을 그 임베딩  $F$ 의 신장율로 정의한다. 따라서 신장율이란  $G$ 의 구조를 갖는 알고리즘을  $H$  형태의 상호연결망을 갖는 병렬처리시스템에서 시뮬레이션할 때 필요한 통신 스텝의 수를 의미하므로 전달지연을 의미한다.

높이가  $N$ 인 피라미드를 메쉬로 임베딩시킨 관련 연구로는 Stout[4]이  $2^N \times 2^N$ 의 2-차원 메쉬로 신장율과 확장율이 각각  $2^{N-1}$ 와 3인 임베딩 방법을 제안하였으며, Chang[5]은 이를 개선하여 동일한 조건 하에서 신장율을  $(5/8) \cdot 2^{N-1}$ 로 개선한 연구결과를 발표하였다.

3-차원 메쉬로 그 대상을 확장시킨 피라미드의 임베딩 관련 연구로는 Ip[6]와 Chung[7]의 연구 결과들이 알려져 있다. Ip는 자연 임베딩(Natural Embedding)과 다중 임베딩(Multiple Embedding) 기법들을 제안하고 있는데, 높이  $N$ 인 피라미드를 대상으로 전자의 경우는  $N \times 2^{N-1} \times 2^{N-1}$  메쉬로 신장율과 확장율이 각각  $2^{N-2}+1$ 과  $3N/4$ 로 임베딩 가능함을 보인 것이고, 이를 확장시킨 후자의 경우는  $6 \times 2^{N-2} \times 2^{N-2}$  메쉬로 신장율과 확장율이 각각  $2^{N-3}$ 과  $9/8$ 인 임베딩 방법을 제안하였다[6].

한편 Chung은 [7]에서 동일한 크기의 피라미드를 대상으로  $\{4^{(N-1)/3}+2\}/3 \times 2^{(2N-1)/3} \times 2^{(2N-1)/3}$  메쉬로 신장율과 확장율이 각각  $2^{(2N-4)/3}$ 과  $1+(2/4)^{(N+1)/3}$ 라는 보다 개선된 임베딩 방법을 제안하였다.

본 논문에서는 [7]에서 제안하고 있는 임베딩에서의 문제점을 분석하여 신장율의 개선이 가능한 새로운 매핑 함수를 제안하고 그 신장율 특성을 분석한다.

본 논문은 네 개의 절로 구성되며, 제2절에서는 본 논문에서의 두 대상 그래프들에 대한 정의와 특성들에 대해 살펴보고 제3절에서는 본 논문에서 제안하고 있는 매핑 함수를 제시하고, 마지막 제4절에서 결론을 맺는다.

2. 대상 그래프 특성

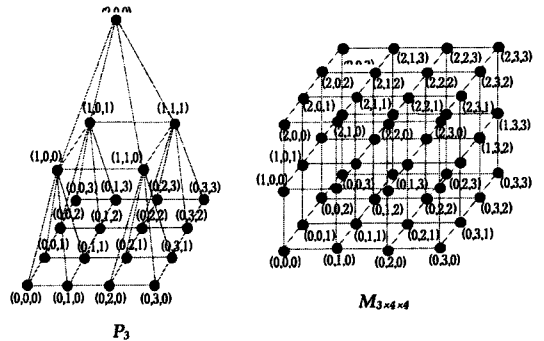
본 절에서는 본 논문에서의 임베딩 대상이 되는 손님 및 주인 그래프인 피라미드 및 3-차원 메쉬 구조의 정의 및 그래프 이론적 관점에서의 주요 특성들을 살펴보고자 한다.

[정의 1] 주어진 양의 정수  $N$ 에 대해 높이가  $N$ 인 피라미드  $P_N$ 은 정점(vertex)의 집합  $V(P_N)$ 과 간선(edge)의 집합  $E(P_N)$ 에 의해 다음과 같이 정의한다.

$$1) V(P_N) = \bigcup_{0 \leq i \leq N-1} \{(l, x, y) | 0 \leq x, y \leq 2^{N-i} - 1\}$$

$$2) E(P_N) = \bigcup_{0 \leq i \leq N-2} \{(l, x_1, y_1), (l, x_2, y_2) | |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1 \ \&\& \ (l, x_1, y_1), (l, x_2, y_2) \in V(P_N)\}$$

$$\cup \bigcup_{0 \leq i \leq N-2} \{(l, x, y), (l+1, \lfloor x/2 \rfloor, \lfloor y/2 \rfloor) | 0 \leq x, y \leq 2^{N-i} - 1\}$$



(그림 1) 피라미드 및 3-차원 메쉬 그래프 예.

[정의 2] 정방형 2-차원 기저(base) 메쉬의 한 변과 높이를 각각 나타내는 주어진 양의 정수  $W$ 와  $H$ 에 대한 3-차원 메쉬  $M_{H \times W \times W}$ 는 정점의 집합  $V(M_{H \times W \times W})$ 와 간선의 집합  $E(M_{H \times W \times W})$ 에 의해 다음과 같이 정의한다.

$$1) V(M_{H \times W \times W}) = \bigcup_{0 \leq z \leq H-1} \{(z, x, y) | 0 \leq x, y \leq W-1\}$$

$$2) E(M_{H \times W \times W}) = \{(x_1, x_2, x_3), (x_1', x_2', x_3') | \sum_{1 \leq i \leq 3} |x_i - x_i'| = 1 \ \&\& (x_1, x_2, x_3), (x_1', x_2', x_3') \in V(M_{H \times W \times W})\}$$

(그림 1)은 높이(height)가 3인 피라미드와  $3 \times 4 \times 4$ 인 3-차원 메쉬의 예를 보여주고 있다. 일반적으로 높이가  $N$ 인 피라미드  $P_N$ 의 각 레벨  $l(0 \leq l < N)$ 에는  $4^{N-l}$ 개의 정점들로 구성된 정방형 2-차원 메쉬  $2^{N-l} \times 2^{N-l}$  구조로 이루어져 있어 가장 위 레벨에 해당하는 레벨  $N-1$ 의 1개의 정점으로 구성된 2-차원 메쉬로부터 시작하여 가장 아래 레벨에 해당하는 레벨 0의  $4^{N-1}$ 개로 구성된 2-차원 메쉬까지 다양한 그래프들을 포함하고 있음을 알 수 있다.

3. 매핑 함수

본 절에서는 본 논문에서 제안하고 있는 피라미드의 3-차원 메쉬에 대한 임베딩 기법의 매핑 함수를 소개한다. 높이가  $N$ 인 피라미드를 3-차원 메쉬로 임베딩하기 위한 새로운 매핑 함수를 본 논문에서는 다음과 같이 정의한다.

$$F_n : V(P_N) \rightarrow V(M_{H \times W \times W})$$

$$F_n(l, x, y) = \begin{cases} (Z_1+Z_2+Z_3+Z_4, \lfloor x/2^{k-l} \rfloor, \lfloor y/2^{k-l} \rfloor), & \text{for } 0 \leq l \leq k-1 \text{ \& \& } (Y \bmod 2) = 0 \\ (4^{k-l}-1)/3 - (Z_1+Z_2+Z_3+Z_4), \lfloor x/2^{k-l} \rfloor, \lfloor y/2^{k-l} \rfloor), & \text{for } 0 \leq l \leq k-1 \text{ \& \& } (Y \bmod 2) = 1 \\ ((4^{k-l}-4)/6, x, y), & \text{for } l=k \\ ((4^{k-l}+2)/6, S_k+x \cdot 2^l+y \cdot 2^l, S_k-x \cdot 2^l+y \cdot 2^l), & \text{for } k+1 \leq l \leq N-1 \text{ \& \& } l \neq N-2 \\ ((4^{k-l}+2)/6, S_k+x \cdot 2^l+y \cdot 2^l+(-1)^x \cdot D, S_k-x \cdot 2^l+y \cdot 2^l+(-1)^y \cdot D), & \text{for } l=N-2 \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

여기서,  $Z_1 = \sum_{j=0}^{l-1} (Y \cdot 2^{l-j} + 2^{l-j-1}) \cdot 2^{k-j}$   
 $Z_2 = Y \cdot 2^{k-l} + X$   
 $Z_3 = \sum_{j=1}^{k-1} \{ \lfloor (Y+2^{j-1})/2^{j-1} \rfloor \cdot 2^{k-j} \}$   
 $Z_4 = 2 \cdot \lfloor y/2^{k-l} \rfloor$   
 $X = x \bmod 2^{k-l}, Y = y \bmod 2^{k-l}$   
 $S_k = 2^k - 1, S_k = 2^{N-1} - 1, D = \lfloor (3 \cdot 2^{N-1} + 1)/2 \rfloor$

매핑함수  $F_n$ 에서  $Z_1$  과  $Z_3$  에 해당하는 값의 의미는 각각 자신보다 하위 및 상위에 소속된 블록들의 정점들이 3-차원 메쉬로 매핑되는 과정에서 동일한  $x$ -좌표 및  $y$ -좌표로 할당됨에 따라  $z$ -좌표축을 따라 축적되게 되는데 이러한 성분들의 영향으로 인한  $z$ -좌표값의 증가분을 의미하고,  $Z_2$ 는 동일 레벨에 존재하는 동일 블록 내의 선순위 정점들로 인한  $z$ -축 방향의 증가분을 반영해 주고 있다. 그리고  $Z_4$ 의 경우는 레벨  $l=k$  및  $k+1 \leq l \leq N-1$ 에 속한 정점들이 배치될 두 개의 계층(layer)을 보정해 주기 위한 배려이다.

매핑 함수  $F_n$ 에 의하면 레벨이  $N$ 인 피라미드  $P_N$ 에서  $k$  값에 따라  $0 \leq l < k$ 를 만족하는 임의의 레벨  $l$ 에 존재하는  $4^{N-l}$ 개의 정점들로 구성된 정방형 2-차원 메쉬  $2^{N-l} \times 2^{N-l}$ 을 레벨에 관계없이 동일하게  $4^{N-k-1} (= 2^{N-k-1} \times 2^{N-k-1})$ 개의 블록들로 나누기 위해  $x$ -축 및  $y$ -축 방향으로 균일하게  $2^k$ 개씩 할당함으로써 각 블록은  $4^{k-l} (= 2^{k-l} \times 2^{k-l})$ 개의 정점들로 구성되고 이에 해당하는  $z$ -축 방향의 값으로 작용하게 된다.

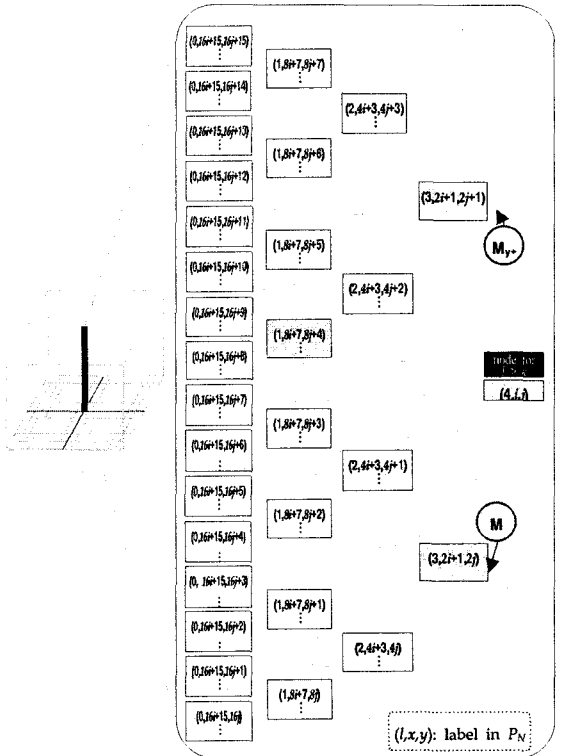
따라서 순님 그래프  $P_N$  내에서 분할된 하나의 블록에 속한 정점들을 주인 그래프로 임베딩시킬 때 동일한  $x$ -좌표 및  $y$ -좌표를 갖도록  $z$ -축 방향으로 차례대로 축적해 나가는 형식을 취한다. 이 과정에서 블록  $[i, j], 0 \leq i, j \leq 2^{N-k-1}-1$ 에 속하는  $4^{k-l}$ 개 정점들 중 원래 그래프  $P_N$ 에서  $x$ -축 방향으로 인접된  $2^{k-l}$ 개 정점들을 하나의 부-블록(sub-block)이라고 정의하면, 레벨  $l$  내의 각 블록들은 내부  $x$ -축 우선 순위(x-direction-major order) 방식으로 구분된  $2^{k-l}$ 개의 부-블록들로 나누게 되고 각 부-블록들은 다시 내부에 각각  $2^{k-l}$ 개씩의 정점들이 포함되는 구조로 볼 수 있다.

본 논문에서 제안하고 있는 매핑 함수에서는 인접된 부-블록 상호간의 연결 간선에서의 신장울 증가 요인을 감소시키기 위해  $P_N$ 에서의 주어진  $y$ -좌표 값으로부터  $Y$  값을 계산하여  $Y$ 가 짝수인 경우에는 상향(上向)으로, 홀수인 경우에는 그 역방향에 해당하는 하향(下向)으로 순서대로 쌓아 나가도록 특별히 배려하고 있는데, 이는 주어진 매핑 함수 식 (1)에서  $0 \leq l \leq k-1$ 에 해당하는 레벨  $l$ 에 소속된 정점들에 대해  $Y$ 가 짝수일 때와 홀수일 때를 구분하여 두 개의 서로 다른 식으로 정의하고 있음을 통해 확인할 수 있다.

<표 1> Chung[9]의 임베딩에서의 신장울 성분

$P_N$ 내 간선		신장울[9]
구분	레벨	
동일 레벨 내 두 정점간 연결 간선	$0 \leq l \leq k-1$	$4^k - 2^{k-l} + 1$
	$l = k$	1
	$k+1 \leq l \leq N-1$	$2^{N-k-2}$
인접 레벨의 두 정점간 연결 간선	$0 \leq l \leq k-1$	$4^k$
	$l = k$	3
	$k+1 \leq l \leq N-1$	$2^{N-k-2}$

한편 Chung의 분석 결과에 의하면 [7]에서 제안된 임베딩에서 주인 그래프인  $P_N$  내의 간선들의 레벨별 신장울 내역은 <표 1>과 같이  $\max\{4^k, 2^{N-k-2}\}$ 로 요약된다[7].



(그림 2) 3-차원 메쉬 내부의  $x=i, y=j$ 에 해당하는  $z$ -축의 축적 모습.

본 논문에서 제안된 매핑함수 하에서의 신장을 개선 효과를 다음 정리를 통해 분석하고자 한다.

[정리 1] 조건  $0 < k < N-1$ 을 만족하는 임의의 정수  $k$ 에 대해 주어진 높이가  $N$ 인 피라미드  $P_N$ 을 3차원 매쉬  $\{4^{(k+1)}+2\}/3 \times 2^{(N-k)} \times 2^{(N-k)}$ 로 임베딩을 위한 새로운 매핑 함수  $F_n$  적용 시  $0 \leq l \leq k$ 에 해당하는 레벨  $l$ 에 속한 정점 및 간선들에 대한 신장은  $(2 \cdot 4^k + 4)/3$ 이다.

[증명] 손님 그래프인  $P_N$ 에서의 간선의 종류별로 다음과 같이 나누어서 고려한다.

(1) 동일 레벨 내(intra-level) 정점간 연결 간선들의 경우에는 축의 배열 방향에 따라 다음과 같이 다시 세분하여 고려한다.

①  $x$ -축 방향 연결 간선: 부-블록 내에 위치한 두 정점 상호간에는 인접성이 그대로 유지되는 반면에, 블록간의 경계선상에서  $x$ -좌표값이 인접된 두 정점의 경우 대해 레벨  $l=0$ 일 경우에 최대값  $2^k$ 가 된다.

②  $y$ -축 방향 연결 간선: (그림 2)에서 확인할 수 있는 바와 같이  $l=k-1$ 일 경우에 최대가 되고  $Z_1 = (2^{(2k+1)} - 8)/3$ ,  $Z_2 = 2$ ,  $Z_3 = 0$ 이 되고,  $Z_4$ 의 경우는 중앙에 위치하게 될 레벨  $l=k$  및  $k+1 \leq l \leq N-1$ 에 해당하는 두 계층을 가로지르게 될 경우에 최대값으로 2가 되므로 각 성분들을 합한 신장의 최대값은  $(2^{(2k+1)}+4)/3$ 가 된다.

(2) 레벨 상호간(inter-level) 연결 에지들에 대해서는 레벨별 정점들의 신장을 성분 기여도를 다음과 같이 세분하여 고려한다.

① 레벨  $l$  및  $l+1$ 에 속한 정점들로 인한 신장을 증가 성분의 경우는  $l=0$ 에서 최대값  $2^k-1$ 을, 그리고  $l=k-1$ 인 경우에 최소값에 해당하는 1의 값을 얻는다.

②  $0 \leq j \leq l-1$ 에 해당하는 레벨  $j$ 에 속한 정점들로 인한 신장을 성분의 경우는  $l=k-1$ 인 경우에 최대값  $(4^k - 4)/3$ 에 해당하는 성분으로 기여한다.

③  $l+2 \leq j \leq N-1$ 에 해당하는 레벨  $j$ 에 속한 정점들로 인한 신장을 성분의 경우는  $l=k-1$ 인 경우에 +1만큼의 신장을 증가 요인이 발생된다.

따라서 위의 세 가지 경우를 종합하면 레벨간 연결 간선들에 대한 신장의 최대값은  $l=k-1$ 인 경우로  $(4^k - 4)/3 + 2$ 임을 알 수 있다.

결국 (1)에서의 ①과 ② 및 (2)에서의 신장을 성분 중 최대값에 해당하는  $(2 \cdot 4^k + 4)/3$ 가  $F_n$  적용시의 신장이 된다. ■

결국  $0 \leq l \leq k$  및  $k+1 \leq l \leq N-1$ 에 해당하는 레벨  $l$ 에 속한 정점 및 간선들에 대해 각각 [정리 1]과 [5]에서의 신장 분석 결과를 적용하게 되면 최종적으로  $F_n$  하에서의 신장은  $\max \{(2 \cdot 4^k + 4)/3, 5 \cdot 2^{N-k-2}/8\}$ 가 된다.

#### 4. 결론

본 논문에서는 다중 병렬처리시스템에서의 영상처리 및 그래프 문제 해결에 다양하게 응용되고 있는 상호연결망 그래프 모델의 하나인 피라미드를 대상으로 3-차원 매쉬로의 임베딩을 위한 새로운 매핑 함수를 제안한다. 기존의 매핑함수에서의 신장을 증가 요인의 분석을 통해 신장을 개선이 가능한 새로운 매핑 함수를 제시하고 제안된 매핑함수 하에서의 신장 특성을 분석하였다.

따라서 대규모 병렬처리시스템에서 프로세서 상호간 통신 스템의 수와 관련하여 중요한 의미를 갖는 신장의 관점에서 임베딩 성능 개선이 기대된다.

#### 참고문헌

- [1] F. Berman and L. Snyder, "On mapping parallel algorithms into parallel architectures," *J. of Parallel and Distrib. Comput.*, Vol.4, pp.439-458, 1987.
- [2] F. T. Leighton, "Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes," *Morgan Kaufmann Pub.*, CA., 1992.
- [3] R. Miller and Q. F. Stout, "Data Movement Techniques for the Pyramid Computer," *SIAM J. on Comput.*, Vol.16, No.1, pp.38-60, 1987.
- [4] Q. F. Stout, "Mapping Vision Algorithms to Parallel Architectures," *Proc. of the IEEE*, pp.982-995, 1988.
- [5] 장정환, "피라미드의 정방향 2-차원 매쉬로의 새로운 임베딩," *한국해양정보통신학회 논문집*, 제6권 2호, pp.257-263, 2002.
- [6] D. M. C. Ip, C. K. Y. Ng, L. K. L. Pun, M. Hamdi, and I. Ahmad, "Embedding Pyramids into 3D Meshes," *Proc. of 1993 Int'l Conf. on Paral. and Distrib. Sys.*, pp.348-352, 1993.
- [7] K. -L. Chung and Y. -W. Chen, "Mapping Pyramids into 3-D Meshes," *Nordic J. of Computing*, Vol.2, No.3, pp. 326-337, 1995.