2차원 메쉬에 두개의 링크를 추가한 연결망의 고장 해밀톤 성질

박경욱, 임형석
전남대학교 전산학과
e-mail: kwpark@csblue.chonnam.ac.kr

Fault Hamiltonian Properties of 2D mesh networks with Two Additional Links

Kyoung-Wook Park, Hyeong-Seok Lim
Dept. of Computer Science, Chonnam National University

요 약

본 논문에서는 첫 행과 마지막 행에 추가 링크를 갖는 $m \times n$ 메쉬 연결망 $M_2(m,n)$의 고장 해밀톤 성질을 고려한다. 이분 그래프인 $M_2(m,n)$에 하나의 결함 링크가 발생하더라도 임의의 두 노드가 다른(같은) 집합에 속한 경우 두 노드를 잇는 길이 $mn-1(mn-2)$인 경로가 존재함을 보인다. 또한 하나의 결함 노드 또는 링크가 있는 경우 임의의 두 노드를 잇는 적어도 길이 $mn-4$인 경로가 존재함을 보인다. 이러한 결과들을 이용하여 짝수개의 노드를 갖는 3차원 메쉬의 고장 해밀톤 성질을 보인다.

1. 서론

메쉬(mesh) 연결망은 구조가 간단하여 확장이 쉽고 VLSI 구현에 적합하다는 장점으로 MasPar나 Intel Paragon XP/S와 같은 상용 병렬 시스템의 상호 연결망으로 사용되고 있다[1]. 상호 연결망을 구성하는 노드나 링크에 결함이 발생하는 경우를 고려하는 결함 허용(fault tolerance)은 연결망의 중요한 척도 중 하나이다. 결함 허용을 위한 기존의 연구는 크게 두 가지로 나뉜다. 첫 번째는 결함 요소를 시스템 내의 다른 노드나 링크로 대치시키는 것이다. 이 기법은 추가 하드웨어로 인한 비용이 없으나 결함 발생시 시스템의 성능저하가 일어난다. 두 번째는 예비 노드나 링크를 추가하여 결함 노드나 링크를 대체하도록 하여 시스템의 성능을 계속 유지하는 것이다. 본 논문에서는 이차원 메쉬 연결망에 두개의 예비 링크를 추가한 연결망에서의 고장 해밀톤 성질에 대해 고려한다.

연결망 구조는 그래프로 모델링될 수 있는데, 이 때 노드는 그래프의 정점에 대응되고 통신 링크는 에지에 대응된다. 그래프의 해밀톤 경로(사이클)는 그 그래프의 모든 정점을 오직 한번씩만 지나는 경로(사이클)를 말한다. 해밀톤 경로나 사이클은 모든 프로세서의 데이터 교환이나 선형 배열 등의 구현에 활용되므로 하이퍼큐브, k-ary n-큐브, 재귀원형군과 같은 여러 연결망들의 해밀톤 성질에 대한 연구가 이루어지고 있다[2, 3, 4].

메쉬는 서로 다른 색을 지닌 정점들끼리 에지를 갖도록 정점들을 두 개의 집합으로 나눌 수 있으므로 이분 그래프(bipartite graph)에 속한다. 이분 그래프에서 W와 B를 각각 이분 정점 집합이라하면 $|W| = |B|$이고 모든 W에 속한 정점들과 B에 속한 정점들 사이에 해밀톤 경로를 가지면 해밀톤 laceable 그래프 (hamiltonian-laceable)라 한다[5].

노드 수가 N인 그래프에서 F_v를 결함 정점들의 집합이라 하고 F_e를 결함 에지들의 집합으로 표기한다. $F = F_v \cup F_e$, $f_v^w = |F_v \cap W|$, $f_v^b = |F_v \cap B|$ 그리고 $f_e = |F_e|$라 하자. $f_v^b = f_v^w$일 때 서로 다른 색을 지닌 두 정점을 잇는 길이 $N-2f_v^b-1$인 결함 허용 경로를 L^{opt}-경로라 한다. $f_v^b < f_v^w$일 때, L^{opt}-경로는 한 쌍의 검정 정점들을 잇는 경우 $N-2f_v^w$, 서로 다른 색을 지닌 정점들을 잇는 경우 $N-2f_v^w-1$ 그리고 한 쌍의 흰색 정점들을 잇는 경우 $N-2f_v^w-2$이다. 이러한 L^{opt}-경로는 가능한 가장 긴 길이의 경로이다. 이와 같이 모든 두 정점을 잇는 L^{opt}-경로를 지니면 강한 해밀톤 laceable 그래프(strongly hamiltonian-laceable)라 한다[6].

2차원 메쉬에서 해밀톤 경로가 존재하기 위한 조건들과 경로를 찾는 선형시간(linear-time) 알고리즘이 [7, 8, 9]에서 제시되었다. 그리고 3차원 메쉬의 해밀톤 사이클을 생성하는 알고리즘이 [10]에서 제시되었다. [3, 6]에서 $P_m \times C_n$는 하나의 결함 정점이나 에지가 있는 경우, n이 홀수이면 해밀톤 사이클을 지니며 n이 짝수이면 강한 해밀톤 laceable 그래프임이 알려져있다. 여기서 $P_m \times C_n$은 길이 m인 체인과 길이 n인 링의 곱으로 얻어지는 그래프로 m행 n열 메쉬의 모든 행에 랩어라운드 에지가 추가된 형태를 지닌다.

본 논문에서는 첫 행과 마지막 행에만 랩어라운드 에지가 추가된 $m \times n$ 메쉬 $M_2(m,n)$가 하나의 결함 정점이나 에지를 지니더라도 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보인다. 이를 위해 수학적 귀납법을 이용하여 임의의 두 정점들을 잇는 결함 허용 L^{opt}-경로가 존재함을 증명한다. 또한 $M_2(m,n)$의 고장 해밀톤 성질을 3차원 메쉬에 적용시켜 짝수 개의 노드를 갖는 3차원 메쉬의 고장 해밀톤 성질을 보인다. $M_2(m,n)$은 n이 짝수인 경우 하이퍼큐브, 재귀원형군, 이중 루프 네트워크와 같은 여러 상호 연결망들의 스패닝 부 그래프이므로 $M_2(m,n)$의 고장 해밀톤 성질들을 이러한 연결망들에 적용시킬 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서 본 논문에서 필요로 하는 정의와 표기법들에 대해 기술하고 3절에서는 $M_2(m,n)$과 3차원 메쉬가 1-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보인다. 마지막으로 4절에서 결론을 맺는다.

2. 정의 및 표기

$m \times n$ 메쉬는 그래프 $M(m,n) = (V, E)$로 정의한다. 여기서 정점의 집합 $V = \{v_j^i | 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ 이며, 에지의 집합 $E = \{(v_j^i, v_{j+1}^i) | 1 \le i \le m, 1 \le j < n\} \cup \{(v_j^i, v_j^{i+1}) | 1 \le i < m, 1 \le j \le n\}$이다. 메쉬의 최소 분지수는 2 이므로 1-고장 해밀톤 그래프, 1-고장 해밀톤 laceable 그래프가 아니다. 분지수가 2인 4개의 정점들을 꼭지 정점이라 하자. 메쉬가 이러한 해밀톤 성질들을 지니도록 꼭지 정점들 사이에 두개의 에지를 추가하여 최소 분지수가 3이 되도록 다음과 같이 정의할 수 있다.

정의 1. $m \times n$ 메쉬를 $M(m,n) = (V, E)$라 하자.

(a) 그래프 $M_1(m,n) = (V_{M_1}, E_{M_1})$은 정점 집합 $V_{M_1} = V$, 에지 집합 $E_{M_1} = E \cup \{(v_1^1, v_n^1)\}$이다.

(b) 그래프 $M_2(m,n) = (V_{M_2}, E_{M_2})$은 정점 집합 $V_{M_2} = V$, 에지 집합 $E_{M_2} = E \cup \{(v_1^1, v_n^1), (v_1^m, v_n^m)\}$이다.

$M_1(m,n)$과 $M_2(m,n)$의 모든 정점은 이분 집합 B와 W로 나눌 수 있다. 정점 v_j^i는 $i+j$가 짝수이면 검정 정점, 홀수이면 흰색 정점이라 하고, 검정 정점의 집합을 B, 흰색 정점의 집합을 W라 한다. 행 i에 속한 정점을 $R(i) = \{v_j^i | 1 \le j \le n\}$, 열 j에 속한 정점을 $C(j) = \{v_j^i | 1 \le i \le m\}$로 표시하며 $R(i:j) = \cup_{i \le k \le j} R(k)$, $C(i:j) = \cup_{i \le k \le j} C(k)$로 표시한다. 그래프의 경로는 정점들의 순열(sequence)로 표기한다. 정점들의 집합 X로 유도되는 부 그래프(induced subgraph)를 $G\langle X \rangle$라 하고, $G\langle X \rangle$의 두 정점 s, t를 잇는 해밀톤 경로가 존재하면 그 경로를 $H[s,t|X]$라 한다. 만약 X가 공집합이면 $H[s,t|X]$는 빈 순열로 표기한다. 부 그래프 $G\langle R(i) \rangle$에서 두 정점 v_j^i와 $v_{j'}^i$를 잇는 경로를 $v_j^i \to v_{j'}^i$로 표기한다. 이와 비슷하게 $G\langle C(j) \rangle$에서 두 정점 v_j^i와 $v_j^{i'}$를 잇는 경로를 $v_j^i \to v_j^{i'}$로 표기한다.

메쉬는 다음과 같은 조건에서 해밀톤 경로를 가지며, 이러한 경로들을 생성하는 선형시간(linear-time) 알고리즘이 알려져있다[8].

보조정리 1. [7] m, n이 모두 2 이상인 임의의 정수일 때, mn이 짝수(홀수)이면 $m \times n$ 메쉬에는 한 꼭지 정점과 색이 다른(같은) 임의의 정점을 잇는 해밀톤 경로가 존재한다.

$M_2(2,n)$은 $P_2 \times C_n$과 동형이다. $M_2(m,n)$의 고장 해밀톤 성질을 증명하기 위해 다음과 같은 $P_2 \times C_n$의 고장 해밀톤 성질을 이용한다.

보조정리 2. [6] $n \ge 3$인 짝수일 때, 하나의 결함 에지를 지닌 $P_2 \times C_n$에는 임의의 두 정점을 잇는 L^{opt}-경로를 지닌다.

$M_2(m,n)$의 다음과 같은 해밀톤 성질들이 존재함이 알려져있다. 본 논문에서는 이 성질들을 이용하여 하나의 에지에 결함을 지닌 $M_2(m,n)$에 L^{opt}-경로가 존재함을 보인다.

보조정리 3. [11] $m \ge 2$, $n \ge 4$ (n 짝수)일 때, $M_1(m,n)$은 임의의 두 정점을 잇는 L^{opt}-경로를 지닌다.

보조정리 4. [11] $m \ge 2$, $n \ge 4$ (n 짝수)일 때, 하나의 결함 정점을 지닌 $M_2(m,n)$은 임의의 두 정점을 잇는 L^{opt}-경로를 지닌다.

3. 고장 해밀톤 성질

보조정리 5. $m \ge 2$, $n \ge 4$인 짝수일 때, 하나의 결함 에지를 지닌 $M_2(m,n)$은 해밀톤 laceable 그래프이다.

증명 m에 대한 수학적 귀납법을 이용하여 두 정점 s와 t를 잇는 해밀톤 경로 P가 존재함을 보인다. 먼저 $m=2$인 경우 보조정리 2에 의해 성립한다. $m \ge 3$인 경우 다음 경우들로 나누어 위 정리가 $m-1$일 때 성립한다고 가정하고 m일 때 성립함을 보인다. 두 정점 s와 t를 각각 v_i^x, v_j^y라 하고 $s \in B$, $t \in W$로 가정한다. 결함 에지 e_f가 $G\langle R(m) \rangle$에 속한 경우는 $G\langle R(1) \rangle$에 속한 경우로 대응시켜 생각할 수 있으므로 일반성을 잃지 않고 e_f는 $G\langle R(1:m-1) \rangle$에 속한다고 가정한다.

경우 1: $s,t \in R(1:m-1)$.

에지 (v_1^{m-1}, v_n^{m-1})이 존재한다고 가정하면 귀납가설에 의해 $G\langle R(1:m-1)\rangle$에는 s와 t를 잇는 해밀톤 경로 P'가 존재한다. 이때 P'가 (v_1^{m-1}, v_n^{m-1})를 지나면 $(v_1^{m-1}, v_1^m \to v_n^m, v_n^{m-1})$로 대신하여 P를 생성할 수 있다.

그렇지 않으면 P'에서 $G\langle R(m-1)\rangle$에 속한 에지 (u,v)를 선택한다. u,v와 인접한 $R(m)$에 있는 두 정점을 각각 u',v'라 하면 $G\langle R(m)\rangle$은 링 형태이므로 u'와 v'를 잇는 해밀톤 경로 P''가 존재한다. P'에서 (u,v)를 제거하고 $(u,u'),(v,v')$를 추가하여 P''를 연결하면 P를 생성할 수 있다.

경우 2: $s \in R(1:m-1), t \in R(m)$.

경우 2.1: 결함 에지 e_f가 행 에지 (v_k^z, v_{k+1}^z)인 경우.

경우 2.1.1: $i < j \le k$인 경우.

(a) $i = 1$일 때,

$$P = \begin{cases} (H[s, v_{j-1}^{m-1} | C(i:k) \cap R(1:m-1)], v_{j-1}^m \to v_1^m, \\ \quad H[v_n^m, v_{k+1}^m | C(k+1:n)], v_k^m \to t) & \text{if } k < n-1 \\ (s \to v_1^1, v_n^1 \to v_n^m, H[v_{n-1}^m, v_{j+1}^1 | C(j+1:n-1)], \\ \quad H[v_j^1, v_2^x | C(2:j) \cap R(1:x)], \\ \quad H[v_2^{x+1}, t | C(1:j) \cap R(x+1:m)]) & \text{if } k = n-1 \end{cases}$$

(b) $i > 1$일 때,

$$P = (H[s, v_{j-1}^{m-1} | C(1:k) \cap R(1:m-1)], v_{j-1}^m \to v_i^m, H[v_{i-1}^m, v_1^1 | C(1:i-1)], H[v_n^1, v_{k+1}^m | C(k+1:n)], v_k^m \to t).$$

경우 2.1.2: $i = j < k$인 경우.

(a) $i = 1$일 때,

$$P = \begin{cases} (H[s, v_1^1 | C(1:k) \cap R(1:m-1)], \\ \quad H[v_n^1, v_n^{m-1} | C(k+1:n) \cap R(1:m-1)], \\ \quad v_n^m \to t) & \text{if } s \neq v_1^1 \\ (H[s, v_k^{m-1} | C(1:k) \cap R(1:m-1)], \\ \quad H[v_{k+1}^{m-1}, v_n^{m-1} | C(k+1:n) \cap R(1:m-1)], \\ \quad v_n^m \to t) & \text{if } s = v_1^1 \end{cases}$$

(b) $i > 1$일 때,

$$P = \begin{cases} (H[s, v_k^{m-1} | C(i:k) \cap R(1:m-1)], \\ \quad H[v_{k+1}^{m-1}, v_n^1 | C(k+1:n) \cap R(1:m-1)], \\ \quad H[v_1^1, v_{i-1}^{m-1} | C(1:i-1) \cap R(1:m-1)], \\ \quad v_{i-1}^m \to v_1^m, v_n^m \to t) & \text{if } s \neq v_k^{m-1} \\ (H[s, v_1^1 | C(1:k) \cap R(1:m-1)], \\ \quad H[v_n^1, v_{k+1}^{m-1} | C(k+1:n) \\ \quad \cap R(1:m-1)], v_{k+1}^m \to v_n^m, v_1^m \to t) & \text{if } s = v_k^{m-1} \end{cases}$$

경우 2.1.3: $i \le k < j$인 경우.

(a) $k = 1$, $x > z$일 때,

$$P = (s \to v_1^1, H[v_n^1, v_2^x | C(2:n) \cap R(1:x)], H[v_2^{x+1}, t | R(x+1:m)])$$

(b) $k = 1$, $x < z$일 때,

$$P = \begin{cases} (s \to v_1^m, v_n^m \to v_n^x, \\ \quad H[v_n^{x-1}, v_{n-1}^{x-1} | R(1:x-1)], \\ \quad H[v_{n-1}^x, t | C(2:n-1) \cap R(x:m)]) & \text{if } j \neq n \\ (s \to v_1^m, v_2^m \to v_2^x, \\ \quad H[v_2^{x-1}, v_{n-1}^{x-1} | R(1:x-1)], \\ \quad H[v_{n-1}^x, t | C(3:n) \cap R(x:m)]) & \text{if } j = n \end{cases}$$

(c) $1 < k < n-1$일 때,

$$P = \begin{cases} (H[s, v_k^m | C(1:k)], H[v_{k+1}^m, t | C(k+1:n)]) & \text{if } j = n \\ (H[s, v_1^m | C(1:k)], H[v_n^m, t | C(k+1:n)]) & \text{if } j \neq n \end{cases}$$

경우 2.2: 결함 에지 e_f가 열 에지 (v_k^z, v_k^{z+1})인 경우.

경우 2.2.1: $x > z$인 경우. $G\langle R(z+1:m)\rangle$에는 s와 t를 잇는 해밀톤 경로 P'가 보조정리 3에 의해 존재한다. P' 중에서 $G\langle R(z+1)\rangle$에 속한 에지 (u,v)를 선택한다. 이때 u,v 모두는 v_k^{z+1}이 아니어야 한다. u,v와 인접한 $R(z)$에 있는 두 정점을 각각 u',v'라 하면 $G\langle R(1:z)\rangle$에는 보조정리 3에 의해 u'와 v'를잇는 해밀톤 경로 P''가 존재한다. P'에서 (u,v)를 제거하고 $(u,u'),(v,v')$를 추가하여 P''와 연결하면 해밀톤 경로 P를 생성할 수 있다.

경우 2.2.2: $x \le z$인 경우. $R(z)$에 속한 s와 다른 색을 지닌 정점을 s'라 하자. 이때 $s' \neq v_k^z$이다. $R(z+1)$에 속한 정점들 중 s'와 인접한 정점을 t'라 하면 보조정리 3에 의해 $P = (H[s, s' | R(1:z)], H[t', t | R(z+1)])$인 해밀톤 경로를 생성할 수 있다.

경우 3: $s,t \in R(m)$.

경우 3.1: e_f가 열 에지 (v_k^z, v_k^{z+1})인 경우.

보조정리 3에 의해 $G\langle R(z+1:m)\rangle$에는 s와 t를 잇는 해밀톤 경로 P'가 존재한다. P'에서 $G\langle R(z+1)\rangle$에 속한 에지 (u,v)를 선택한다. 이때 u,v 모두 v_k^{z+1}이 아니어야 한다. $R(z)$에 있는 u,v와 인접한 두 정점을 각각 u',v'라 하면 보조정리 3에 의해 $G\langle R(1:z)\rangle$에는 u'와 v'를 잇는 해밀톤 경로 P''가 존재한다. P'에서 (u,v)를 제거하고 $(u,u'),(v,v')$를 추가하여 P''와 연결하면 해밀톤 경로 P를 생성할 수 있다.

경우 3.2: e_f가 행 에지 (v_k^z, v_{k+1}^z)인 경우.

(a) $i < j \le k$일 때, $P = (H[s, v_1^m | C(1:j-1)], H[v_n^m, v_{k+1}^1 | C(k+1:n)], H[v_k^1, t | C(j:k)])$인 해밀톤 경로를 생성할 수 있다.

(b) $i \le k < j$일 때, m이 짝수이면 $s' = v_1^m$, $t' = v_n^m$라 하고 m이 홀수이면 $s' = v_1^1$, $t' = v_n^1$라 하자. 보조정리 1에 의해 해밀톤 경로 $P = (H[s, s' | C(1:k)], H[t', t | C(k+1:n)])$를 생성할 수 있다. □

정리 1. $m \geq 2, n \geq 4$인 짝수일 때, $M_2(m,n)$은 1-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프이다.

증명 결함 요소가 정점인 경우 보조정리 4에 의해 위 정리가 성립한다. 결함 요소가 에지인 경우 보조정리 5에 의해 임의의 검정 정점과 임의의 흰색정점을 잇는 해밀톤 경로가 존재한다. 따라서 같은 색을 지니는 두 정점 s와 t를 잇는 길이 $mn-2$인 L^{opt}-경로가 존재함을 보인다. 결함 에지 $e_f = (u,v)$라 하고 $u \in B$, $v \in W$ 그리고 $s,t \in B$로 가정한다. v를 결함 정점으로 가정하면 보조정리 4에 의해 길이가 $mn-2$인 경로 P를 생성할 수 있다. v는 결함 정점이므로 P는 (u,v)를 경유하지 않는다. 따라서 P는 s와 t를 잇는 L^{opt}-경로이다. $s,t \in W$인 경우도 비슷한 방법으로 L^{opt}-경로를 생성할 수 있다. □

정리 2. 짝수개의 노드를 갖는 3차원 메쉬는 1-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프이다.

증명 3차원 메쉬는 그래프 $M(m_1,m_2,m_3) = (V,E)$라 하자. 이때 정점 집합 $V = \{v^i_{j,k} | 1 \leq i \leq m_1, 1 \leq j \leq m_2, 1 \leq k \leq m_3\}$이고 에지 집합 $E = \{v^i_{j,k}, v^{i+1}_{j,k} | 1 \leq i < m_1, 1 \leq j \leq m_2, 1 \leq k \leq m_3\} \cup \{v^i_{j,k}, v^i_{j+1,k} | 1 \leq i \leq m_1, 1 \leq j < m_2, 1 \leq k \leq m_3\} \cup \{v^i_{j,k}, v^i_{j,k+1} | 1 \leq i \leq m_1, 1 \leq j \leq m_2, 1 \leq k < m_3\}$이다. 짝수개의 노드를 갖는 3차원 메쉬 $M(m_1,m_2,m_3)$는 $|B| = |W|$이며 m_1, m_2, m_3 중 적어도 하나는 짝수이다. 일반성을 잃지 않고 m_3를 짝수로 가정한다.

$m_2 \times m_3$ 메쉬에서 꼭지 정점과 이와 이웃한 정점을 잇는 해밀톤 경로를 $P = (v^{x_1}_{y_1}, v^{x_2}_{y_2}, \cdots, v^{x_d}_{y_d}, \cdots, v^{x_{m_2m_3}}_{y_{m_2m_3}})$라 하자. 이때 $1 \leq d \leq m_2m_3$, $1 \leq x_d \leq m_2$, $1 \leq y_d \leq m_3$ 이다. $M(m_1,m_2,m_3)$의 각 정점들 $v^i_{x_d,y_d}$을 $M_2(m_1,m_2m_3)$의 v^i_d로 사상시키면 $M(m_1,m_2,m_3)$이 $M_2(m_1,m_2m_3)$을 스패닝 부 그래프로 지님을 알 수 있다. 따라서 정리 1에 의해 임의의 두 정점을 잇는 1-고장 L^{opt}-경로가 존재한다. □

따름정리 1. 짝수개의 노드를 갖는 3차원 메쉬 $M(m_1,m_2,m_3)$는 다음과 같은 사이클을 지닌다.

(a) 하나의 결함 링크를 지닌 $M(m_1,m_2,m_3)$는 임의의 링크를 경유하는 해밀톤 사이클을 지닌다.

(b) 하나의 결함 노드를 지닌 $M(m_1,m_2,m_3)$는 임의의 링크를 경유하는 길이 $m_1m_2m_3-2$인 사이클을 지닌다.

4. 결론

본 논문에서는 두 개의 랩어라운드 링크를 지닌 메쉬 연결망이 1-고장 강한 해밀톤 laceable함을 보였다. 그리고 이를 3차원 메쉬에 적용하여 짝수인 N개의 노드를 갖는 3차원 메쉬가 1-고장 강한 해밀톤 laceable함을 보였다. 따라서 하나의 결함 링크 또는 노드를 갖는 3차원 메쉬는 임의의 링크를 경유하는 가능한 가장 긴 길이의 사이클을 지닌다.

앞으로 홀수개의 노드를 갖는 3차원 메쉬가 1-고장 강한 해밀톤 laceable함과 다차원 메쉬의 고장 해밀톤 성질에 대한 연구도 필요하리라 생각된다.

참고문헌

[1] Intel Corporation literature, Intel Corporation, 1991.

[2] C.-H. Tasi, J. M. Tan, T. Lian and L.-H. Hsu, "Fault-tolerant hamiltonian laceability of hypercubes," *Information Processing Letters*, No. 83, pp. 301–306, 2002.

[3] C.-H. Tasi, J. M. Tan, Y. C Chuang and L.-H. Hsu, "Fault-free cycles and links in faulty recursive circulant graphs," *Proceedings of the ICS 2000 Workshop on Algorithms and Theory of Computation*, pp. 74–77, 2000.

[4] Y. A. Ashir and I. A. Stewart, "Fault-tolerant embeddings of hamiltonian circuits in k-ary n-cubes," *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. 15, No. 3, pp. 317–328, 2002.

[5] S. Y. Hsieh, G. H. Chen and C. W. Ho, "Hamiltonian-laceability of star graphs," *Networks*, Vol. 36, No. 4, pp.225–232, 2000.

[6] J.-H. Park and H.-C. Kim, "Fault hamiltonicity of product graph of path and cycle," *International Computing and Combinatorics Conference* (COCOON) 2003, accepted for publication.

[7] C. C. Chen and N. F. Quimpo, "On strongly Hamiltonian abelian group graphs," *Combinatorial Mathematics VIII. Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 884, pp. 23–34, 1981.

[8] S. D. Chen, H. Shen and R. W. Topor, "An efficient algorithm for constructing hamiltonian paths in meshes," *Parallel Computing*, Vol. 28, pp. 1293–1305, 2002.

[9] A. Itai, C. H. Papadimitriou and J. L. Czwarcfiter, "Hamiltonian paths in grid graphs," *SIAM Journal of Computing*, Vol. 11, No. 4, pp. 676–686, 1982.

[10] S. D. Chen, H. Shen and R. W. Topor, "Permutation-based range-join algorithms on N-dimensional meshes," *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, Vol. 13, No. 4, pp. 413–431, 2002.

[11] 박경욱, 이형옥, 임형석, "두 개의 랩어라운드 에지를 갖는 메쉬의 고장 해밀톤 성질," 한국정보과학회 논문지, Vol. 30, No. 8, pp. 434–444, 2003.