제19회 한국정보처리학회 춘계학술발표대회 논문집 제10권 제1호 (2003.5)

Fourier 변환을 이용한 수치 근사 함수의 이산화에 관한 연구

* 송 은 지
* 남서울 대학교 컴퓨터학과
e-mail: sej@nsu.ac.kr

A Study of the discrete for Numerical Approximation Functions by Fourier transform

* Eun-Jee Song
* Dept. of Computer Science, Nam Seoul University

요 약

과학자나 공학자들은 빛이나 소리와 같이 주기적인 특성을 갖는 현상을 연구하는 경우가 많다. Fourier변환은 이러한 주기함수의 근사 함수를 구할 때 유용하게 이용되고 있다.
본 논문에서는 극좌표 표현되는 함수의 근사 함수를 구하는 문제를 다룬다. 일반적으로 컴퓨터 상에 구현하기 위해서는 이산형 Fourier급수전개를 이용하는데 지금까지는 근사 함수를 컴퓨터 상에서 구할 때 이산화 표본수를 경험에 의해 임의로 결정하여 이용하였으나 본 연구에서는 Fourier 변환의 성질을 이용하여 주어진 함수에 따라 필요한 이산화 표본수를 자동적으로 결정하는 알고리즘을 제안한다.

1. 서론

수학적 이론 전개식 자체에만 파묻혀 있던 일반수학이 빠른 연산속도를 보장하는 슈퍼컴퓨터 및 퍼스널 컴퓨터의 대중적인 보급에 따라 수학적 모델을 필요로 하는 공학 및 사회 과학 등 여러 분야에 유용하게 이용되고 있다. 이것을 위해서는 수치해석의 연구가 필요하며 특히 함수와 적분을 구하는 문제는 가장 많이 대두되는 수학적 모델이므로 함수의 근사 및 수치적분은 수치해석의 기초로서 아주 중요한 분야이다. 일반적으로 공학 등의 응용문제에서 필요로 하는 수식들은

$$y=Ae^{bt}\cos(\omega t-\phi),\ h=\ln\frac{1-a}{b},\ L=\sqrt{2\frac{Q(B+S)}{V}}$$

등과 같이 초월 함수식이거나 $\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}$ 등과

같이 매우 복잡하여 함수나 적분을 직접계산하기 어렵다. 또한, 실험자료에서 흔히 나타나는 불연속점에서의 측정치로만 제공될 경우가 많음으로 수치해석의 기법을 이용하여 함수나 적분의 근사치를 구해야 한다. 근사 함수로 가장 많이 쓰이는 다항식으로는 Taylor급수가 있다. 또한 과학자나 공학자들은 빛이나 소리와 같이 주기적인 특성을 갖는 현상을 연구하는 경우가 많은데 Fourier변환은 이러한 주기함수의 근사 함수를 구할 때 유용하게 이용되고 있다.

본 논문에서는 극좌표 표현되는 함수의 근사 함수를 구하는 문제를 다룬다. 일반적으로 컴퓨터 상에 구현하기 위해서는 이산형 Fourier급수전개를 하며 컴퓨터의 경제성(속도,용량)을 고려하여 FFT(Fast Fourier Transform)를 이용하기도 한다. 지금까지는 근사 함수를 컴퓨터 상에서 구할 때 이산화 표본수을 임의로 결정하여 이용하였으나 본 연구에서는 Fourier 급수전개식을 이용하여 주어진 함수에 따라 필요한 이산화 표본수을 자동적으로 결정하는 알고리즘을 제안한다.

2. Fourier 급수전개를 이용한 근사 함수

주기함수 g는 모든 x에 대하여

$$g(x+P)=g(x) \quad \text{----------} (1)$$

를 만족한다. 여기서 P를 함수의 주기라 한다. 주기가 2π인 함수를 생각해 보자. 함수 $g(x)$의 주기가 P라면 $f(x)=g(Px/2\pi)$의 주기는 2π가 된다. 이것이 성립함은 다음 식으로부터 확인할 수 있다.

$$f(x+2\pi)=g(\frac{Px}{2\pi}+P)=g(\frac{Px}{2\pi})=f(x) \text{-----}(2)$$

즉 $f(x)$를 주기 2π 함수라 하면 모든 x에 대하여

$$f(x+2\pi)=f(x) \quad \text{--------------}(3)$$

이 성립한다. 여기서 $f(x)$를 주기 2π 함수라 하고 구간 $[-\pi,\pi]$에서 구분적으로 연속이라 하자. 이때 $f(x)$에 대한 Fourier 급수 전개식은

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}(a_j\cos(jx)+b_j\sin(jx)) \text{--}(4)$$

이며 수렴한다는 것이 증명되어 있다.

연속함수에서는 Fourier변환을 하면 되지만 컴퓨터 상에 구현할 때는 다음과 같은 Discrete Fourier 변환(DFT)을 행하여야 한다. 간격 T 로 표본화되었다고 하고 표본점을

$$x(nT) \quad n=0,1,\cdots,N-1$$

이라 하자. 그러면 $x(nT)$ 에서의 DFT는 다음과 같다.

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(nT)e^{-jkwT}=\sum_{n=0}^{N-1}x(nT)e^{-j2\pi kn/N}(5)$$

$$w=2\pi/NT,\ e^{ia}=\cos a+i\sin a$$

(5) 식에서 $X(k+N)=X(k)$가 유도되어 DFT의 주기는 N이 된다. 한편 FFT(Fast Fourier Transform)는 DFT에 비해 표본수 N에 대하여 $O(N^2)$의 계산량을 $O(N\log N)$ 로 절약한 방법으로 계산량이 많을 때 유용하게 사용 되고 있다.

지금까지는 주기함수를 DFT 또는 FFT로 변환하여 컴퓨터 상에 구현시 이산화 표본수 N을 경험에 의해 결정하였으나 여기서는 표본수 N을 Fourier변환의 성질을 이용하여 자동적으로 결정하는 방법을 제안한다.

3. 근사 함수의 Fourier계수를 이용한 표본수

제안하고자 하는 알고리즘의 함수 예로서는 다음과 같이 극좌표로 표현되는 Jordan영역의 경계를 나타내는 함수를 사용하기로 한다.

$$\eta(t)=\rho(t)e^{it} \quad \text{-------------}(6)$$

여기서 $\rho(t)\in C^2{}_R(T)$ ($C^2{}_R(T)$: 2회 미분 가능한 주기 2π 인 연속함수) 로 가정한다. 그리고 $\rho(t)$ 와 $\rho(t)$의 t에서의 미분 $\rho'(t)$의 Fourier 전개식을 편이상

$$\rho(t):=\sum_{l=0}^{\infty}c_l e^{ilt} \quad \text{----------}(7)$$

$$\rho(t)' := \sum_{l=0}^{\infty} d_l e^{ilt} = \sum_{l=0}^{\infty} lc_l e^{ilt} \text{ ----------(8)}$$

로 하기로 한다. 여기서 $\rho(t)$, $\rho'(t)$는 모두 연속함수리므로 (7),(8)은 모두 절대수렴 한다.
위의 식에서 함수의 모양은 함수는 $\rho(t)$의 t 의 미분인 $\rho'(t)$에 의하여 결정되므로 결국 $\rho'(t)$의 Fourier 계수인 d_l 이 함수모양 결정의 요인이 됨을 알 수 있다. (8)식의 이산형 Fourier 급수전개는 N 에 대하여

$$\rho'(t) \approx \sum_{l=0}^{N-1} d_l e^{ilt}$$

로 표현된다.

주어진 함수의 모양을 결정하는 (8)식의 ρ 의 Fourier계수 d_l 다음과 같은 특징을 갖는다.

1. $|d_l|$ 는 단조감소 하며 $\lim_{l\to\infty}|d_l| = 0$이다.
2. 난이도가 높을수록(함수의 모양이 복잡할 수록) $\lim_{l\to\infty}|d_l| = 0$이 되는 l의 크기가 커진다.

위의 특징으로 알 수 있는 사실은 $\rho'(t)$의 Fourier계수인 d_l에 대하여 난이도가 높을수록 $|d_l| \to 0$이 되는 N의 크기가 커진다는 것이다.
함수의 모양이 복잡하면 할수록 이산화 표본수를 증가시키는 것이 일반적이므로 어떤 작은수 e 을 고정시키면

$$|d_l| < e \qquad \text{------------- (9)}$$

이 되는 l에 따라 필요한 표본수를 결정하면 된다는 것을 알 수 있다.
구체적인 알고리즘은 다음과 같다.

1. 문제영역의 모양을 표현하는 함수 ρ 와 허용오차 ε를 입력한다.
2. 초기 표본수 N을 정하고 $\rho'(t)$의 Fourier계수 d_l를 구한다.
3. $\rho'(t)$의 Fourier계수 크기가 $|d_n| < \varepsilon$ 을 만족하면 표본수를 N 으로 한다.
4. $|d_n| < \varepsilon$를 만족하지 않으면 표본수를 2배로 하여 3.으로 간다.

4 .수치실험

본 연구 수치실험의 구체적인 예로서는 다음과 같이 극좌표 표현되는 함수를 사용하였다.

$$\gamma(t) = \rho(t)e^{it}$$

$$\rho(t) = \frac{r\cos t + \sqrt{1 - r^2\sin^2 t}}{r+1}, \quad 0 \le r < 1 \text{ --- (10)}$$

이 함수는 r이 1에 가까울수록 함수의 모양이 복잡해 져서 난이도가 높아지는 예이다.
수치계산을 하기 위해 $[0, 2\pi]$ 구간을 이산화 하는데 편의상 짝수 표본점 $N = 2n$ 을 사용하여 간격을 $t_j = 2\pi j/N$로 한다. (10)의 함수의 근사함수를 구하기 위한 이산화작업에서 표본수를 위에서 제안한 알고리즘에 의해 수치 실험한 결과 <표1>과 같은 결과를 얻었다. 여기서는 $\varepsilon = 10^{-10}$으로 하고 초기치 $N = 8$로 하였다. 예상한 바와 같이 주어진 함수가 복잡할수록 난이도가 높아지므로 r이 1에 가까이 갈수록 표본수 N 의 크기가 커짐을 알 수 있다.

<표1> 주어진 함수에 따른 표본수의 크기

r	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
N	32	64	64	128	256

5 . 결 론 및 향후 과제

응용부분에서 많이 쓰이는 함수는 컴퓨터를 이용할 때가 대부분이다. 그러나 컴퓨터는 가감승제만을 계산 할 수 있기 때문에 이러한 함수 값을 구할 때 다항식으로 대신해서 함수의 근사값을 구하는 것이 일반적이다. 과학자나 공학자들은 빛이나 소리와 같이 주기적인 특성을 갖는 현상을 연구하는 경우가

많다. 이러한 주기적인 함수는 2π 주기함수로 표현이 가능하며 컴퓨터 상에서는 Fourier변환이 많이 이용된다. 본 논문에서는 주기함수의 근사함수를 Fourier변환으로 컴퓨터 상에 구현할 때 지금까지 경험에 의존했었던 필요한 표본수를 자동으로 결정하는 알고리즘을 제안하였다.

난이도가 높을 수록 이산화 표본수을 증가시켜하는 것이 일반적이나 지금 까지는 경험에 의해 임의로 결정하였다. 문제의 난이도가 주어진 함수의 모양에 의존한다는 전제로 주어진 함수를 Fourier 급수로 전개하여 분석하였다.

주어진 함수를 $\eta(t)=\rho(t)e^{it}$형태의 주기 2π인 극좌표 표현된다고 가정할 때 함수의 모양을 결정하는 요소는 함수 $\rho(t)$에 대하여 $\rho'(t)$의 Fourier계수라는 것을 알게 되었다.

본 논문에서 제시한 알고리즘의 특징은 $\rho'(t)$의 Fourier계수의 성질을 이용하여 Fourier계수 의 크기로 주어진 문제에 따라 필요한 표본수의 크기를 자동으로 결정할 수 있다는 것이다. 난이도가 높을수록 필요한 표본수의 크기가 자동적으로 커지며 수치실험을 통하여 그 유효성을 입증하였다.

이 알고리즘은 표본수를 2배로 늘려가며 필요한 표본수를 구하고 있는데 보다 경제성을 고려하여 $\sqrt{2}$ 배로 늘려 가는 방안도 검토 중에 있다. 또한 여기서는 극좌표 표현되는 함수만을 다루었는데 향후 과제로서 일반적인 함수에 대해서도 이산화 하는데 필요한 표본수를 자동으로 결정하는 알고리즘의 개발도 이루어져야 한다고 사료된다.

참고 문헌

[1] 송 은 지, '등각사상에 있어 Theodorsen방정식의 고속해법', 한국정보처리학회 논문집 5권 2호, pp 372-379 , 1998.

[2] Samuel D.conte, Carl de Boor, 'ELEMENTARY NUMERICAL ANALYSIS', McGRAW-HILL, 1985 .

[3] 송 은 지, '저주파 Filter를 이용한 Hübner반복법의 자동화 알고리즘', 한국정보처리학회 '98 춘계 학술대회논문집 , pp98-pp108 ,1998.

[4] 송은지 , ' 등각사상의 고속해법 개량에 관한 연구', 한국정보처리학회 97 춘계학술 발표논문집, pp905-910, 1997.

[5] 宋 殷志, 杉浦 洋, 'Wegmann 法に基づく數値等角寫像の自動化について' , 日本情報處理學會論文誌, 35, No.2 pp309-312 ,1994.

[6] Hasegawa, T. Torii, and H. Sugiura,: *An algorithm based on the FFT for a generalized Chebyshev interpolation*, Math. Comp., 54 (1990), 195-210.

[7]T. Hasegawa : Numerical Integration of Functions with Poles near the Interval of Integration, J. Comp.Appl.Math. Vol. 87, pp.339-357(1997).