

# 오차최소화기법을 적용한 사장교의 초기 평형상태 결정

## Initial Equilibrium States Analysis of Cable Stayed Bridges Using Least Square Method

조현준\*                      박용명\*\*  
Cho, Hyun-jun              Park, Yong-Myung

### ABSTRACT

For the initial equilibrium states of cable stayed bridges, this study presents a method to determine initial cable forces through successive iteration of the cable forces to minimize the errors between target moments or displacements and result of nonlinear analysis. Stay cables are modeled by truss elements and least square method was used to minimize the errors. In the structural characteristics of cable stayed bridges, a large axial force is introduced in the pylon and stiffening girder so fictitious section areas are assumed to determine initial cable forces accurately. To verify usefulness and validity of the proposed algorithm, some numerical analysis has been conducted and compared with the existing study.

### 1. 서    론

사장교는 주탑과 거더에 연결된 사장케이블의 인장력을 적절히 조절하여 교량 각 구조부재의 단면력을 가능한 균등하게 분배시키는 교량형식으로 미관과 기능성이 뛰어나 오늘날 현수교와 더불어 장대교량으로서 많은 각광을 받고 있다. 그러나 구조적 특성상 고차의 부정정 구조를 이루고 긴 경간으로 인한 상대적인 큰 처짐의 발생, 비선형적인 거동과 사장 케이블로 인한 거더와 주탑에 큰 압축력의 유발은 케이블의 장력과 부재력에 큰 영향을 미치고 계산 절차를 까다롭고 복잡하게 하기 때문에 엄밀하면서 효율적인 케이블 장력의 산정이 필요하다.

사장교의 초기평형상태의 결정은 적절한 케이블 장력을 산정하여 완성 후의 구조물의 형상이 설계형상과 최대한 일치하도록 하고 주탑의 모멘트를 최소화하며 거더의 모멘트를 고르게 분포시키는데 그 목적이 있다. 기존의 방법으로는 크게 반복해석법<sup>(1)</sup>, 변형에너지의 최소화 방법<sup>(2)</sup>, 초기부재력 도입 방법<sup>(4)</sup>으로 나누어 볼 수 있다. 먼저 반복해석법은 고정하중 하에 발생하는 장력을 초기장력으로 도입하여 재해석을 수행하는 방법으로 정확성과 수렴성이 떨어지는 단점을 가지고, 변형에너지의 최적화 방법은 멀티케이블 사장교와 같이 변수가 많은 경우 정확한 초기형상을 구현하기 어렵고 비선형성을 적용하기 힘들다. 그리고 초기부재력법은 초기 장력의 크기의 결정이 수렴 속도에 큰 영향을 미친다는 단점이 있다.

본 연구에서는 사장교의 초기평형상태에서의 케이블 장력을 산정하기 위해 최소자승법을 사용하여 케이블 지지점을 지점으로 한 연속보로부터의 처짐 및 모멘트와 비선형 해석시 나오는 처짐, 모멘트와의 차가 최소

\* 학생회원 · 부산대학교 토목공학과 석사과정

\*\* 정회원 · 부산대학교 토목공학과 조교수

가 되도록 하는 방법을 사용한다. 주탑과 거더의 축방향 변형은 가상의 단면적을 사용하여 축강성을 크게 주어 구속하였고 기존의 연구(Wang, 1996)에서 사용되었던 예제 교량을 통해서 알고리즘의 타당성을 보이고자 한다.

## 2. 기하학적 비선형 거동

사장교 해석시 비선형성의 주된 원인으로는 sag에 의한 케이블의 비선형 축력-축변형 거동, 주탑이나 거더에 작용하는 큰 압축력에 의한 휨강성의 저하, 설계하중중에서 발생하는 대변위 등으로 들 수 있다.

### 2.1. 케이블의 비선형 거동

케이블은 양단이 지지되어 있고 자중과 외적으로 작용하는 축방향 인장력으로 그림 1과 같이 현수선의 형태로 처진다. 장대 경간 사장교에서는 케이블의 길이가 길어지고 케이블 자체의 자중이 커서 새그량이 커지므로 탄성계수가 현저하게 감소한다. 특히 사하중 상태에서 응력이 다른 부위에 비해 낮고, 길이가 긴 단부에 정착하는 케이블에서는 이러한 탄성계수 감소의 영향이 더 심하다. 본 연구에서는 케이블의 새그로 인한 비선형성을 고려하기 위해 Ernst의 등가 탄성계수<sup>(5)</sup>를 사용하여 케이블을 트러스요소로 모델링 하였다.

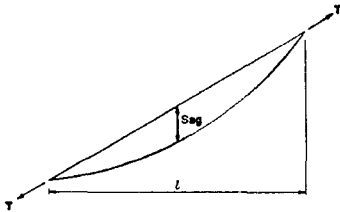


그림 1. 케이블 새그에 의한 효과

$$E_{eq} = \frac{E}{\left(1 + \frac{w^2 \ell^2}{12T_0^3} EA\right)} \quad (1)$$

여기서  $E_{eq}$ 는 케이블 새그에 의한 등가탄성계수로서  $w$ 는 단위길이당 중량,  $\ell$ 은 케이블의 수평길이이며  $T_0$ 는 케이블에 작용하는 인장력이다.

### 2.2. P- $\Delta$ 효과를 고려한 보의 강성행렬

사장교에서처럼 거더와 주탑이 압축력과 휨모멘트를 동시에 받을 때 이들은 하중과 축력의 상호작용으로 비선형 거동을 보이며 휨과 압축력의 상호작용에 의한 비선형성은 안정함수(stability function)를 사용함으로써 고려할 수 있다.<sup>(6)</sup> 2차원 보요소의 경우 P- $\Delta$  효과를 고려한 강성행렬은 다음과 같다.

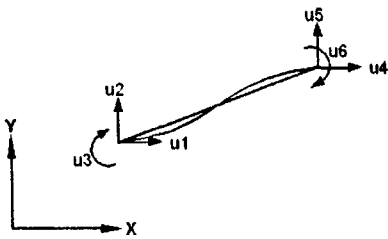


그림 2. 보의 P- $\Delta$  효과

$$[K_m] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}S_1 & k_{23}S_2 & 0 & k_{25}S_1 & k_{26}S_2 \\ 0 & k_{32}S_2 & k_{33}S_3 & 0 & k_{35}S_2 & k_{36}S_4 \\ k_{41} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k_{52}S_1 & k_{53}S_2 & 0 & k_{55}S_1 & k_{56}S_2 \\ 0 & k_{62}S_2 & k_{63}S_4 & 0 & k_{65}S_2 & k_{66}S_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서 압축력 및 인장력이 작용할 경우의 안정함수  $S_1 \sim S_4$ 는 표1에 나타내었다.

표 1. 보의 P- $\Delta$ 효과에서의 안정함수

	압축력 작용시	인장력 작용시
$S_1$	$(KL)^3 \sin(KL)/12S_c$	$(KL)^3 \sinh(KL)/12S_t$
$S_2$	$(KL)^2 \{1 - \cos(KL)\}/6S_c$	$(KL)^2 \{ \cosh(KL) - 1 \}/6S_t$
$S_3$	$(KL) \{ \sin(KL) - (KL) \cos(KL) \}/4S_c$	$(KL) \{ (KL) \cosh(KL) - \sinh(KL) \}/4S_t$
$S_4$	$(KL) \{ (KL) - \sin(KL) \}/2S_c$	$(KL) \{ \sinh(KL) - (KL) \}/2S_t$
$S_c, S_t$	$2 - 2\cos(KL) - (KL) \sin(KL)$	$2 - 2\cosh(KL) + (KL) \sinh(KL)$

### 3. 초기평형상태의 결정

사장교는 하중이 가해지면 케이블에 장력이 도입되면서 평형상태에 도달하게 되는데 이 평형상태에 도달 하였을 때의 형상과 부재력들이 설계시 원하는 값으로 맞추어져야 한다. 따라서 초기평형상태를 결정하는 문제는 완성된 구조계에서의 형상과 부재력들이 안정적인 상태에 이를 수 있도록 하는 케이블의 장력과 길이를 산정하는 것이라 할 수 있다.

일반적으로 가장 이상적인 상태는 1) 거더는 케이블이 지지된 곳을 지점으로 본 연속교와 같은 거동을 하며, 2) 주탑부는 수평 처짐과 모멘트가 발생하지 않아야 한다. 그러나 사장교는 고차의 부정정 구조물이고 구조물의 비대칭성과 압축력에 의한 주탑과 거더의 변형 등으로 이러한 사항들을 모두 정확하게 만족하는 케이블 장력을 결정한다는 것은 거의 불가능하므로 본 연구에서는 이상적인 상태에 부합하는 구조물에서의 처짐과 모멘트를 목표치로 정하고 해석시 생기는 처짐과 모멘트의 차이가 목표치에 대해 최소가 되는 장력을 구하여 그 장력이 수렴할 때까지 반복 해석하는 방법을 사용하였다.

#### 3.1 최소자승법을 적용한 오차의 최소화

맞추어야 할 항목(처짐, 모멘트 등)으로 구성된 목표치 벡터와 비선형 해석 결과로부터 나온 그 항목들에 대한 해석치 벡터의 차이를 오차 벡터( $r^i$ )라 하면 단위 장력당 처짐과 모멘트의 관계를 나타내는 영향행렬  $[F]$ 를 써서 보정하여야 할 장력의 벡터( $\Delta T^i$ )는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다. 여기서  $i$ 는 반복수행 회수를 말한다.

$$\{\Delta T^i\} = [F]^{-1} \{r^i\} = [F]^{-1} (\{D^0, M^0\} - \{D^i, M^i\}) \quad (3)$$

식(3)은 목표치 항목이 케이블의 개수와 일치한다면  $[F]$ 가 정방행렬이 되므로 각 케이블의 필요한 장력을 구하는데 사용 될 수 있지만 일반적으로는 케이블의 수보다 보정하고자 하는 항목수가 더 많기 때문에 영향행렬  $[F]$ 는 정방행렬이 되지 않아 부정 방정식이 되므로 이 경우는 최소자승법을 적용한 다음 식으로 적합한 장력을 구해야 한다.<sup>(3)</sup>

$$\{\Delta T^i\} = ([F]^T [F])^{-1} [F]^T \{r^i\} \quad (4)$$

식(4)에서 구한 장력 보정량이 사용하는 단위에 따라 달라질 수 있기 때문에 비중행렬  $[\rho]$ 을 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.<sup>(3)</sup>

$$\{\Delta T^i\} = ([F]^T [\rho^i] [F])^{-1} [F]^T [\rho^i] \{r^i\} \quad (5)$$

여기서 비중행렬  $[\rho]$ 은 오차 항목수를 행과 열의 수로 가지는 정방행렬이다.

### 3.2 케이블 장력의 산정

사장교는 주탑과 거더에 축방향으로 큰 압축력이 발생하기 때문에 축방향 변형이 발생하고 이것은 캠버량으로 고려가 가능하기 때문에<sup>(4)</sup> 본 연구에서는 초기평형상태에서의 케이블 장력을 산정하기 위해 가상의 큰 단면적을 사용하여 축방향 변형을 구속시킨 상태에서 최소자승법을 이용하여 케이블 장력을 보정하고 장력이 일정한 값에 수렴할 때까지 반복 수행한다. 그 단계별 과정은 다음과 같고 세부적인 알고리즘은 그림 3과 같다.

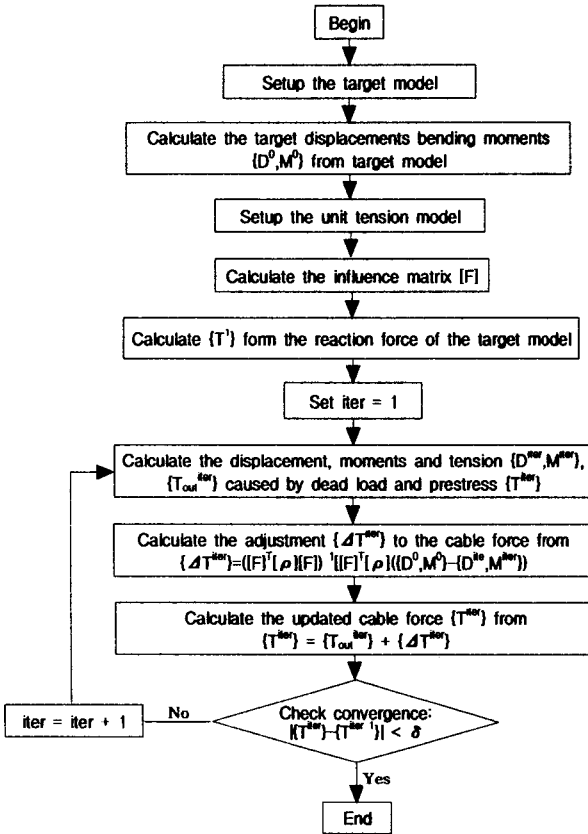


그림 3. 초기평형상태 결정 알고리즘

1단계) 그림 4와 같이 케이블로 지지된 부분을 지점으로 가지는 연속보로부터 나온 처짐과 모멘트를 목표치로 설정한다.

2단계) 그림 6과 같이 케이블의 경사를 이용하여 중앙 경간 부분의 연속보의 반력으로부터 초기장력을 가정한다.

3단계) 그림 5와 같이 케이블을 제거시킨 구조물에서의 단위하중을 작용시켜 영향행렬을 구성한다.

4단계) 가정한 초기장력에 의한 비선형 해석에서 나온 처짐과 모멘트의 차이를 오차로 설정하고 최소자승법에 의해 보정해야 할 장력을 산출한 뒤 보정을 한다.

5단계) 4단계를 케이블의 장력이 수렴할 때까지 반복 수행하여 최종 초기평형상태의 장력을 결정한다.

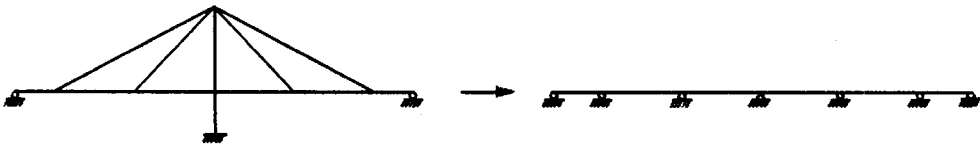


그림 4. 1,2단계 : 사장교 모델로부터의 연속교 모델 설정

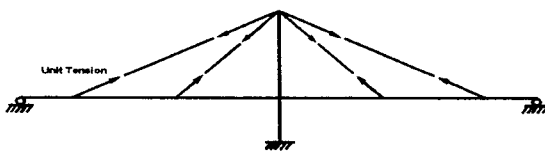


그림 5. 3단계 : 단위하중에 의한 영향행렬의 구성

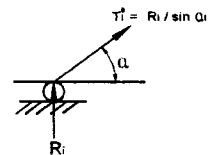


그림 6. 초기장력의 가정

## 4. 수치 예제

기존의 연구(Wang, 1996)에서 사용되었던 2차원의 방사형과 하프형 사장교를 선정하여 제시된 알고리즘으로 해석을 수행하고 그 값을 비교하기로 한다. 케이블은 등가트러스요소를 사용하였으며 주탑 및 거더는 3차원 보요소를 사용하여 P- $\Delta$  효과를 고려한 해석을 수행하였다.

### 4.1 2차원 방사형 사장교

본 예제는 그림 7에 보이는 바와 같이 12개의 사장케이블로 지지된 총지간이 610m이고 주탑의 높이가 61m인 대칭 방사형 사장교이다. 구속조건으로 모든 지점은 회전에 자유롭고 왼쪽 주탑 부분을 제외하고는 교축방향 변위에 자유롭다.

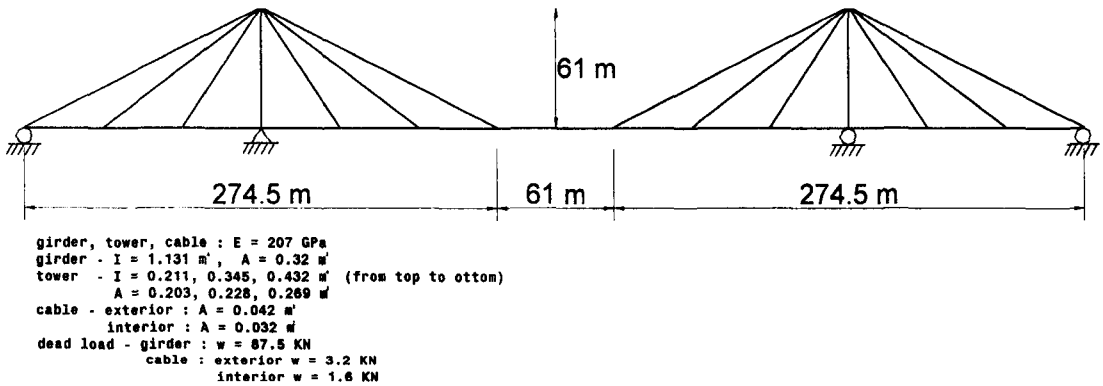


그림 7. 2차원 방사형 사장교 모델의 구조제원

먼저 그림 8과 같이 거더의 케이블로 지지된 점을 지점으로 재구성한 연속교를 설정한 후 사하중만 작용했을 때의 반력을 정현성분으로 나눈 값을 초기장력으로 가정하였고 이 연속교의 처짐과 모멘트를 목표치로 하여 오차 항목을 구성하였다.



그림 8. 케이블 지지점을 지점으로 구성한 연속교 모델

표 2. 케이블의 장력 (KN)

Cable number	Wang (1996)	present study		
		Initial tension*	1st iter.	determining tension
1	10745	12655	12113	11473
2	8267	9307	7222	8300
3	4797	10111	5435	4888
4	4554	10111	5130	5146
5	7815	9307	6805	6816
6	11313	12655	12682	12655

\* 연속보 반력으로부터 도출한 값

축방향 변형을 구속하기 위해 실제 단면적의 10<sup>6</sup> 배에 해당되는 가상 단면적을 사용하여 축강성을 키웠으며 수렴조건은 케이블 장력의 변화율이 0.1%를 적용하였다. 그 결과 반복회수 4회만으로 케이블 장력이 수렴하였고 이때의 장력은 표 2와 같다. 거더의 처짐과 모멘트는 그림 9와 그림 10에서처럼 연속보의 값과 거의 일치하는 결과를 보였으며 그림 11은 좌측 주탑의 모멘트를 나타낸

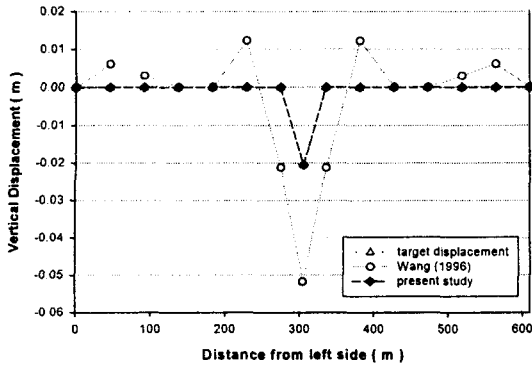


그림 9. 거더의 처짐

그림으로 최대 모멘트 발생점은 주탑의 하단부분 이고 0.37(KN·m)의 매우 작은 값을 보인다.

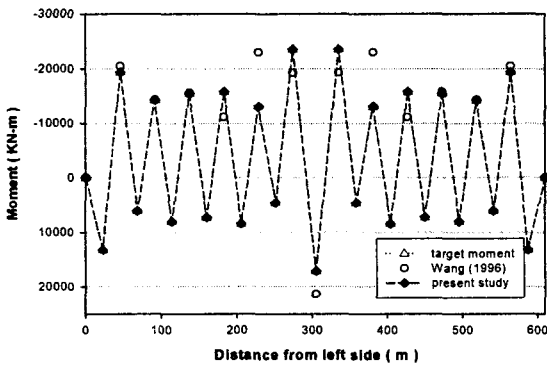


그림 10. 거더의 모멘트

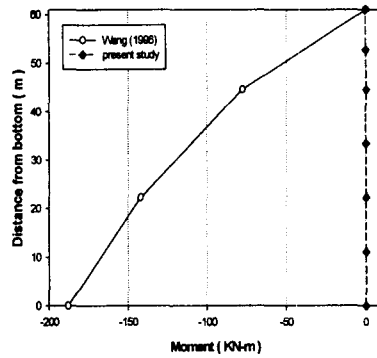
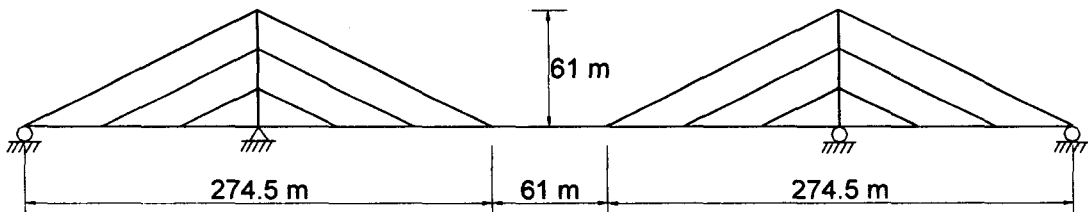


그림 11. 좌측 주탑부분 모멘트

#### 4.2 2차원 하프형 사장교

본 예제에서는 그림 12에 보이는 바와 같이 예제교량1에서 케이블부의 형식만 바뀐 대칭 하프형 사장교를 적용하였다. 하프형 사장교는 케이블 장력의 수평성분이 크므로 주탑의 모멘트가 비교적 크게 발생하는데 좀 더 효율적인 모멘트 분포에 접근하기 위하여 두가지 경우의 오차 항목을 설정하여 초기평형상태시의 케이블 장력을 산정하였다.



girder, tower, cable : E = 207 GPa  
 girder - I = 1.131 m<sup>4</sup>, A = 0.32 m<sup>2</sup>  
 tower - I = 0.211, 0.345, 0.432 m<sup>4</sup> (from top to ottom)  
 A = 0.203, 0.228, 0.269 m<sup>2</sup>  
 cable - exterior : A = 0.042 m<sup>2</sup>  
 interior : A = 0.032 m<sup>2</sup>  
 dead load - girder : w = 87.5 KN  
 cable : exterior w = 3.2 KN  
 interior w = 1.6 KN

그림 12. 2차원 방사형 사장교 모델의 구조제원

부재의 단면적은  $10^6$  배를 사용하여 축강성을 키웠으며 초기장력의 가정과 목표치를 위한 연속교의 형상도 앞의 예제에서 보인 그림 8과 같다. case 1은 주탑 및 거더의 모든 모멘트와 처짐을 오차 항목으로 선정하였고, case 2는 주탑의 모멘트를 주로 제어하기 위하여 2,5번 케이블에 지지된 거더의 모멘트를 제외한 나머지 부분의 모멘트를 오차 항목으로 선정하였다. 수렴 조건은 케이블 장력의 변화율 0.1%로, 두가지의 경우 모두 반복수행 4회만으로 케이블의 장력이 수렴하였고 그 값은 표3과 같다. case 1의 경우는 거더의 모멘트와 처짐이 연속보의 거동과 좀더 가깝게 나왔으나 주탑의 모멘트가 불만족스러운 반면 case 2의 경우는 그림 14와 같이 2번 케이블이 연결된 부분의 거더의 모멘트와 처짐이 연속보의 거동에서 다소 멀어지는 경향을 보였지만 그림 15에 보인 바와 같이 주탑부분에서 모멘트의 감소를 보이므로 전체 구조상으로는 적절한 모멘트 분배 효과가 있음을 알 수 있다.

표 3. 케이블의 장력(KN)

Cable number	Wang (1996)	present study			
		initial tension	1st iter.	determined tension	
				case 1	case 2
1	11173	12655	12350	11830	12157
2	10688	9307	9659	10667	9604
3	9099	10111	10497	9891	10451
4	8999	10111	10141	9842	10010
5	10501	9307	9443	10194	9848
6	11330	12655	12503	12074	12274

\* 연속보 반력으로부터 도출한 값

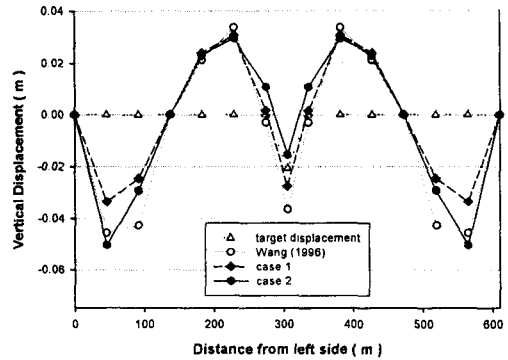


그림 13. 거더의 처짐

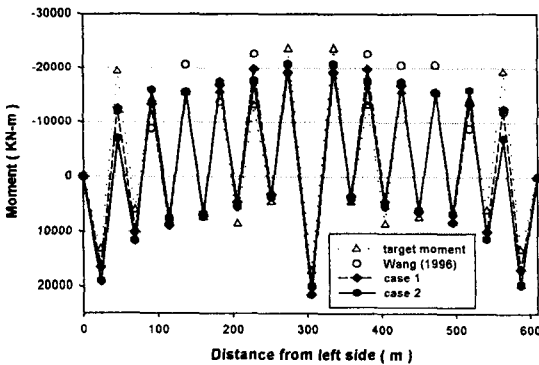


그림 14. 거더의 모멘트

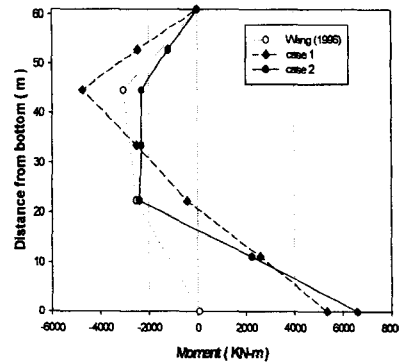


그림 15. 좌측 주탑부분 모멘트

## 5. 결 론

본 연구에서는 초기평형상태시 필요한 케이블의 장력을 축방향 변형을 구속하기 위한 가상의 단면적과 최소사승법을 이용한 오차 최소화기법을 사용한 알고리즘을 제시하였다. 케이블은 트러스요소를 사용하고 주탑 및 거더는 3차원 보요소로 모델링한 예제교량으로서 본 알고리즘의 적용성을 검토하였으며 본 연구를 통하

여 얻어진 결론은 다음과 같다.

1) 최소자승법을 이용한 초기평형상태의 결정은 기존의 부재력 도입에 의한 반복 해석에 비해 빠른 수렴 속도를 가지며 처짐을 최소화 하고 모멘트가 안정된 값을 보임으로서 초기평형상태에서의 적절한 케이블 장력을 얻을 수 있다.

2) 영향행렬과 오차벡터의 구성시 오차 항목을 맞추고자하는 원하는 부분에 적절히 설정함으로써 설계자의 의도에 따른 효율적인 모멘트와 처짐 제어가 가능하다.

3) 본 알고리즘을 통한 초기평형상태의 결정은 거더 및 주탑의 모멘트와 처짐을 동시에 최소화시킬 수 있고 매우 빠른 수렴속도를 보이므로 실제 교량의 예비 설계단계로 실용적인 사용이 가능할 것이라 판단된다.

#### 참고문헌

1. P.H. Wang, "Parametric Studies on Cable-Stayed Bridges", Computers & Structures, Vol.60, No.2 1996, pp243~260
2. Furukawa, K "Studies on Optimization of Cable Prestressing for Cable-Stayed Bridges", Proceedings of the International Conference on Cable-Stayed Bridges, Bangkok, Thailand, 1987, pp723~734
3. Hiroshi Tanaka, "Cable Tension adjustment by Structural System Identification", Proceedings of the International Conference on Cable-Stayed Bridges, Bangkok, Thailand, 1987, pp856~866
4. 김제춘, "초기부재력을 이용한 사장교의 초기형상 및 캠버량 결정", 대한토목학회 논문집, 제19권 제1-3호, 1999, pp.377~386
5. M.S. Troitsky "Cable-Stayed Bridges : theory and design", BSP Professional Books, 1988
6. William Weaver, JR, "Matrix Analysis of Framed Structures, secont edition", D. Van Nostrand Company, 1980