

유한요소법에서의 파진행 문제를 위한 흡수경계 성능에 관한 연구

A Study on the Performance of Absorbing Boundaries for Wave propagation Using Finite Element Method

김희석* 이종세**

Kim, Hee Seok Lee, Jong Seh

ABSTRACT

In this paper an analytical study is carried out to examine the effectiveness of absorbing boundaries using dashpot. Validity of the absorbing boundary conditions suggested by Lysmer-Kuhlemeyer and White et al. is investigated by adopting the solution of Miller and Pursey. The Miller and Pursey's problem is then numerically simulated using the finite element method. The absorption ratios are calculated by comparing the displacements at the absorbing boundary to those at the free field without the absorbing boundary. The numerical verification is carried out through comparison of displacement at the boundary.

1. 서론

다양한 동적문제의 해석적 연구에 있어서의 합리적인 접근방법은 이 문제들을 무한 또는 반무한 영역에서의 파의 진행문제로서 고려하는 것이지만 대부분의 문제들이 복잡한 형상 때문에 해석적인 해(closed form solution)를 찾는 것이 거의 불가능하다. 따라서 수치적인 방법을 이용하는 것이 필요하며, 경계요소법, 유한요소법 및 이들을 조합하는 방법 등이 쓰이고 있다.(이종세, 손윤기, 1998) 이중 유한 요소법은 요소화된 모든 영역에 있어서 운동방정식을 그대로 사용하기 때문에 불연속면에서의 모드변환 등 여러 가지 중요한 현상들을 직접 관찰할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 그러나 무한영역을 유한의 요소영역으로 모형화 할 경우에 파가 제한된 대상 모형의 유한 경계에 도달한 후 반사 현상이 발생하게 되며 이로 인해 구조계 전체의 응답에 큰 영향을 미치게 된다. 따라서 무한영역을 모형화 하는데 있어서는 반사파의 영향을 상쇄시켜주는 인공적인 경계요소가 필요한데, 이러한 인공적인 경계요소를 흡수경계(absorbing boundary)라고 하며 파진행의 문제에 널리 쓰이고 있다. 지금까지 Lysmer-Kuhlemeyer(1969), Smith(1974), Engquist-Majda(1977), White et al.(1977), 그리고 Liao-Wong(1984) 등, 여러 연구자들에 의해 많은 경계요소들이 제안되어졌으며, 이중 Lysmer-Kuhlemeyer 그리고 White 등에 의해 제안된 흡수경계는 점성감쇠기를 이용하는 방법으로써 요소의 경계에 점성감쇠기를 부착하여 흡수효과를 구현하므로 일반적인 FEM프로그램에 응용이 용이하다. 그러나 광범위한 공학적 문제에 대해 흡수경계를 적용한 수치해석을 수행하기 위해서는 다양한 형태의 하중에 대한 흡수경계의 성능에 대해 규명이 이루어져야 한다.

*정회원 · 한양대학교 토목환경공학과 박사과정

**정회원 · 한양대학교 토목환경공학과 교수

본 연구에서는 지표면에서의 주기하중에 의한 점성감쇠기를 이용한 흡수경계의 성능에 대해 연구를 수행하였다. 먼저 지표면에서의 주기하중에 의한 전파방정식에 대한 Miller and Pursey(1954)의 해를 이용하여 점성감쇠기 흡수경계의 성능을 조사하였으며, 다음으로 유한요소해석을 통해 흡수율을 산정 하였다.

2. 주기하중에 의한 전파방정식

본 연구에서는 해석적 방법 및 수치적 방법을 통해 점성감쇠기를 이용한 흡수경계성능을 조사하였다. 해석적 방법은 지표면에서의 주기하중에 의한 전파식(Miller and Pursey, 1954)에 흡수경계식을 직접 삽입하는 방법이며, 이를 위해서는 전파식에 대한 수정이 불가피 하다.

지표면에 수직으로 주기하중을 받고 있는 반무한 영역에서의 전파방정식은 식 (1) 및 식 (2)와 같다.

$$u_R = \frac{a \exp\left\{i\left(\frac{3\pi}{4} - R\right)\right\}}{\mu} \left(\frac{2}{\pi R}\right)^{1/2} \frac{\cos\theta(k^2 - 2\sin^2\theta)}{F_0(\sin\theta)} \quad (1)$$

$$u_\theta = \frac{a \exp\left\{i\left(\frac{5\pi}{4} - kR\right)\right\}}{\mu} \left(\frac{2k^5}{\pi R}\right)^{1/2} \frac{\sin 2\theta(k^2 \sin^2\theta - 1)^{1/2}}{F_0(k \sin\theta)} \quad (2)$$

여기서 $F_0(\zeta) = (2\zeta^2 - k^2)^2 - 4\zeta^2(\zeta^2 - 1)^{1/2}(\zeta^2 - k^2)^{1/2}$ (3)

이며, 위 식을 본 연구에 사용하기 위해서는 정규화(normalize)된 파수(wave number) k 를 x 방향 파수 k_1 과 y 방향 파수 k_2 로 분리시켜야 한다. 이는 3장에서 설명할 흡수 경계조건식에 식 (1)과 식 (2)를 직접 대입할 경우 강제 진동수(ω)의 영향에 무관하게 되기 때문이다.

$$u_R = \frac{a \exp\left\{i\left(\frac{3\pi}{4} - k_1 R\right)\right\}}{\mu} \left(\frac{2}{\pi R}\right)^{1/2} \frac{k_1^{\frac{3}{2}} \cos\theta(k_2^2 - 2k_1^2 \sin^2\theta)}{F(-k_1 \sin\theta)} \quad (4)$$

$$u_\theta = \frac{a \exp\left\{i\left(\frac{5\pi}{4} - k_2 R\right)\right\}}{\mu} \left(\frac{2k_2^5}{\pi R}\right)^{1/2} \frac{\sin 2\theta(k_2^2 \sin^2\theta - k_1^2)^{1/2}}{F(-k_2 \sin\theta)} \quad (5)$$

여기서 $F(\zeta) = (2\zeta^2 - k_2^2)^2 - 4\zeta^2(\zeta^2 - k_1^2)^{1/2}(\zeta^2 - k_2^2)^{1/2}$ (6)

이며, 식 (4) 및 식 (5)는 수학적 연산을 거쳐 k 를 k_1 과 k_2 로 분리시킨 식이다.

3. 흡수경계의 해석적 검증

식 (7)과 식 (8)은 흡수경계조건을 나타내는 식으로, Lysmer-Kuhlemeyer는 $a=b=1$ 의 값을 제안하였 으며 White et al.은 표 1의 값을 제안하였다. 그림 1은 식 (7) 및 식 (8)을 경계면에서 표현한 것이다.

$$\sigma = a\rho V_p \dot{u}_1, \quad \tau = b\rho V_s \dot{u}_3 \quad (7), (8)$$

표 1. 흡수경계 계수 값(White et al. 1977)

Poisson's ratio	a	b	Poisson's ratio	a	b
0	0.959	0.769	0.25	0.986	0.744
0.05	0.967	0.761	0.3	0.986	0.742
0.1	0.975	0.756	0.35	0.992	0.74
0.15	0.982	0.751	0.4	1.007	0.746
0.2	0.986	0.747	0.45	1.011	0.773

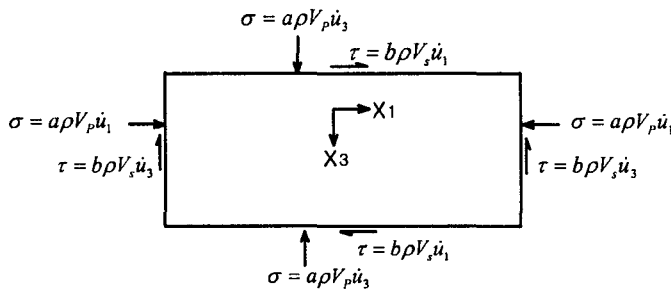


그림 1. 흡수경계조건

먼저 식 (7)과 식(8)에 일반적인 2차원 조화파동식인 식 (9)와 식 (10)을 삽입하면 식 (11) 및 식 (12)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 u_{1(P)} &= \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = ik_p A \cos \theta e^{i(k_p x_1 \cos \theta + k_p x_3 \sin \theta - \omega t)} & u_{1(S)} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x_3} = -ik_s C \sin \theta e^{i(k_s x_1 \cos \theta + k_s x_3 \sin \theta - \omega t)} \\
 u_{3(P)} &= \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = ik_p A \sin \theta e^{i(k_p x_1 \cos \theta + k_p x_3 \sin \theta - \omega t)} & u_{3(S)} &= \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = ik_s C \cos \theta e^{i(k_s x_1 \cos \theta + k_s x_3 \sin \theta - \omega t)}
 \end{aligned} \quad (9), (10)$$

$$\lambda + 2\mu \cos^2 \theta = -a(\lambda + 2\mu) \cos \theta, \quad \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = b \cos \theta \quad (11), (12)$$

임의의 λ , μ , a , b 값에 대해 식 (11)과 식 (12)를 동시에 만족시키는 θ 값은 0° 이다. 따라서 $\theta = 0^\circ$ 일 때, 즉 파가 경계면에 수직으로 입사할 때 흡수경계조건은 완벽히 만족됨을 알 수 있다. 이를 위해 식 (7)과 식 (8)을 극좌표에 대한 식으로 변환하고, 여기에 극좌표로 표현된 주기하중에 의한 전파식인 식 (4) 및 식 (5)을 삽입하게 되면 파를 경계면에 수직으로 입사시킬 수 있을 것이다.

극좌표에 대한 흡수경계조건은 식 (13) 및 식 (14)와 같다.

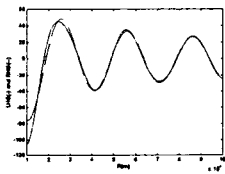
$$\tau_{rr} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{rr} + \lambda\epsilon_{\theta\theta} = a\rho V_p \dot{u}_r, \quad \tau_{r\theta} = 2\mu\epsilon_{r\theta} = b\rho V_s \dot{u}_\theta \quad (13), (14)$$

이제 식 (4)와 식 (5)를 식 (13) 및 식 (14)에 대입하여 검증할 수 있다. 이때 u_R 및 u_θ 의 편도함수들은 실제 미분이 쉽지가 않으므로 수치연산 프로그램인 MATLAB을 사용하여 각각의 도함수들을 구한 후 식 (13)과 식 (14)에 삽입하여 좌향 및 우향의 값을 θ 및 R 에 대해 구한다. 이때 사용된 매질의 물성 및 강제 진동수는 표 2와 같다.

표 2. 매질의 물성 및 강제 진동수

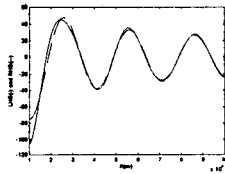
포아송비	밀도 ($N \cdot sec^2/m^4$)	탄성계수 (N/m^2)	전단탄성계수 (N/m^2)	강제 진동수 (rad/sec)
0.25	1066.6667	200E9	8E10	3.14159

그림 2와 그림 3은 $\theta = \pi/4$ 일 경우 식 (13)과 식 (14)의 좌향 및 우향의 값을 거리 R 의 함수로 표시한 것이다. 여기서 가로축은 거리 R ($1km \leq R \leq 100km$)을 나타내며 세로축은 좌향(LHS) 및 우향(RHS)의 값을 나타낸다.

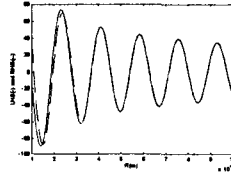


Lysmer-Kuhlemeyer

그림 2. 식 (13)의 좌향 및 우향 값($\theta = \pi/4$)

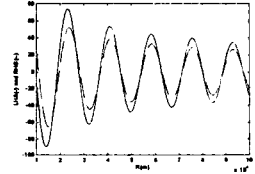


White et al.



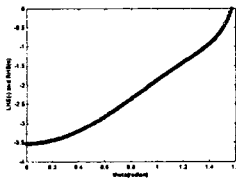
Lysmer-Kuhlemeyer

그림 3. 식 (14)의 좌향 및 우향 값($\theta = \pi/4$)



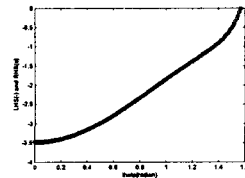
White et al.

그림 4와 그림 5는 $R = 10,000km$ 일 경우 식 (13)과 식 (14)의 좌향 및 우향의 값을 각 θ 의 함수로 표시한 것이다. 여기서 가로축은 각 θ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$)를 나타내며 세로축은 좌향(LHS) 및 우향(RHS)의 값을 나타낸다.

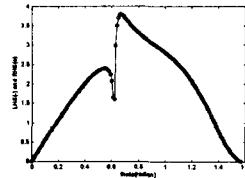


Lysmer-Kuhlemeyer

그림 4. 식 (13)의 좌향 및 우향 값($R = 10,000km$)

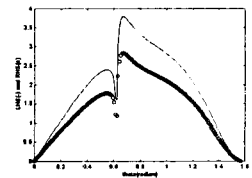


White et al.



Lysmer-Kuhlemeyer

그림 5. 식 (14)의 좌향 및 우향 값($R = 10,000km$)



White et al.

그림 2와 그림 3에서 Lysmer-Kuhlemeyer의 경계는 각각 약 $30km$ 와 $20km$ 이후에 그래프가 일치함을

볼 수 있다. 이는 각각 P파와 S파의 1 파장 이후로 식 (4)와 식 (5)는 Steepest-Descent method에 의해 구해진 asymptotic한 값을 가지는 원역해이기 때문이다. 그림 4와 그림 5에서 좌향과 우향의 그래프가 일치함을 볼 수 있는데 이로부터 Lysmer-Kuhlemeyer의 흡수경계가 지표면에서의 주기하중에 의한 전파식에 대해 완전한 성능을 가지고 있음을 알 수 있다.

White et al.의 경계는 그림 2와 그림 4에서 그래프가 일치함을 보이나, 그림 3과 그림 5에서는 차이가 남을 볼 수 있다. 이는 포아송비를 달리해도 같은 결과를 얻을 수 있는데, 이로부터 White et al.의 경계는 S파에 대해 완전한 성능을 가지고 있지 못함을 알 수 있다. 이는 최적의 a , b 값을 산출하는 과정에서 기인하는 결과로 판단되며, 이에 대해서는 추가적인 논의가 필요하겠으나, 본 연구의 목적은 점성감쇠기를 사용하는 흡수경계에 대한 성능을 조사하는 것으로서 여기서는 다루지 않기로 하겠다.

4. 흡수경계의 수치적(FEM) 검증

본 연구에서 수치해석을 수행한 해석모형 및 사용하중은 그림 6 ~ 그림 8과 같다. 그림 6에서 모든 경계면에 파를 수직으로 입사시키기 위해 경계면을 반원형으로 모형화 하였으며, 그림 7에서는 경사각을 가지고 입사하는 파에 대한 흡수경계의 성능을 조사하기 위해 경계면을 사각형으로 모형화 하였다. 그림 6과 그림 7에서 경계면에 Joint요소를 통해 점성감쇠기를 설치하여 입사되는 파가 반사되지 않고 흡수되게 함으로써 무한영역을 모형화 하였다.

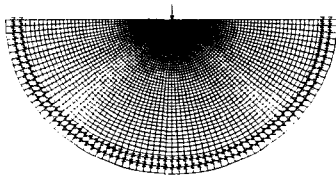


그림 6. 해석모형

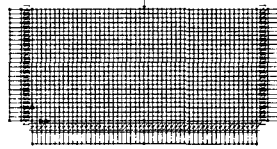


그림 7. 해석모형

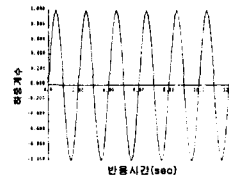


그림 8. 주기하중

주기하중에 대한 흡수경계 성능을 조사하기 위해 그림 9와 그림 10에서의 각각의 모형 A와 모형 B를 비교하였다. 그림 9와 그림 10에서의 모형 B는 모형 A의 하중 작용점으로부터 5km 지점에 점성감쇠기를 부착하여 흡수경계를 구현한 모형이다. 수신점은 2km 및 5km에 위치시켜 모형 A에서 수신점에 반사파가 도달하기 전까지의 변위를 측정하였다.

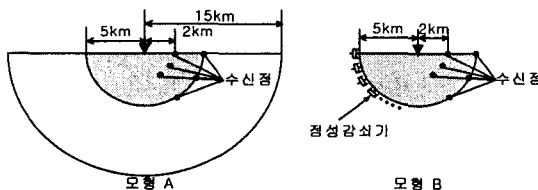


그림 9. 원형경계 모형

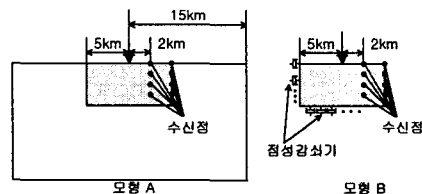
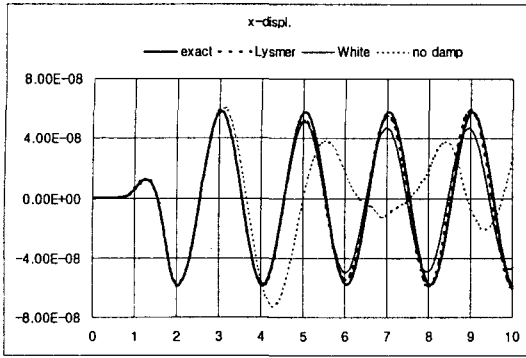
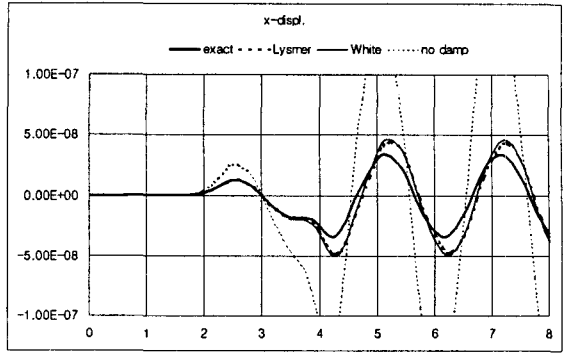


그림 10. 사각형경계 모형

그림 11과 그림 12는 각각 그림 9 및 그림 10에서의 모형 A와 모형 B에서의 변위를 나타낸다.

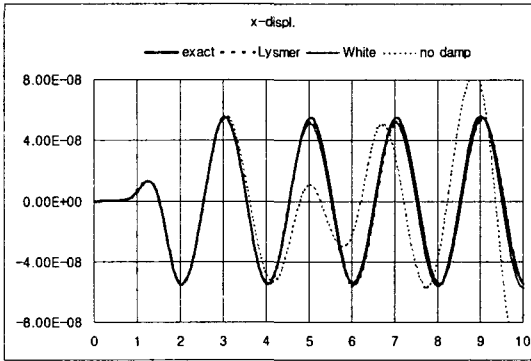


R=2km

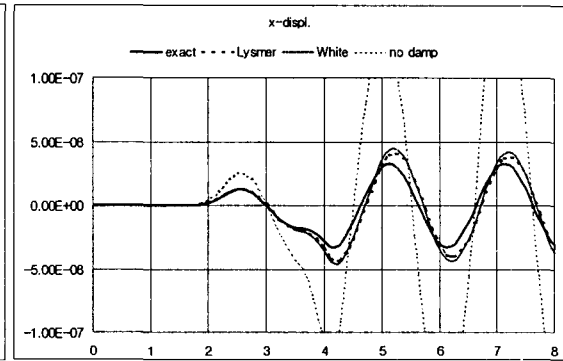


R=5km

그림 11. 그림 9의 지표면에서의 변위



L=2km



L=5km

그림 12. 그림 10의 지표면에서의 변위

그림 11 과 그림 12에서 흡수경계가 적용되지 않은 모형 B에서의 변위는 반사파가 도달하지 않은 모형 A에서의 변위와 전혀 일치하지 않음을 볼 수 있는 반면, 흡수경계가 적용된 모형 B에서의 변위는 모형 A에서의 변위와 일치하는 경향을 보임을 알 수 있다. 다음 표 3은 그림 9에서 수신점의 위치에 따른 x 방향 및 y 방향의 변위에 대한 흡수율을 나타낸다. 여기서 θ 는 y 축으로부터 반시계 방향으로 측정된 값이다.

표 3. 그림 9에서의 위치에 따른 흡수경계 흡수율

θ	R=2000m(내부점)				R=5000m(경계점)			
	x방향		y방향		x방향		y방향	
	Lysmer	White	Lysmer	White	Lysmer	White	Lysmer	White
90°	89.80%	83.27%	90.23%	92.27%	61.48%	62.07%	54.84%	56.10%
60°	94.48%	95.95%	92.23%	92.10%	77.58%	69.47%	86.19%	80.05%
30°	97.38%	96.81%	85.69%	84.35%	84.81%	79.24%	85.39%	82.62%

다음 표 4는 그림 10에서 수신점의 위치에 따른 x 방향 및 y 방향의 변위에 대한 흡수율을 나타낸다. 여기서 θ 는 y 축으로부터 반시계 방향으로 측정된 값이다.

표 4. 그림 10에서의 위치에 따른 흡수경계 흡수율

θ	L=2000m(내부점)				L=5000m(경계점)			
	x방향		y방향		x방향		y방향	
	Lysmer	White	Lysmer	White	Lysmer	White	Lysmer	White
90°	97.13%	91.11%	92.41%	92.54%	65.83%	64.70%	63.69%	67.93%
75°	92.90%	90.55%	95.16%	93.90%	57.60%	61.51%	88.13%	78.35%
60°	95.46%	95.64%	92.56%	91.12%	75.41%	74.27%	83.88%	84.99%
45°	97.53%	80.07%	86.48%	71.52%	51.97%	53.94%	49.86%	56.76%

표 2 및 표 3에서 경계점에서의 흡수율에 비해 내부점에서의 흡수율이 더 높은 것을 볼 수 있는데 이는 내부점의 경우 경계면에서 한번 흡수된 반사파가 측정되기 때문으로 경계점보다 상대적으로 반사파의 영향이 적기 때문으로 분석된다.

앞서 식 (11)과 식 (12)를 동시에 만족하는 θ 값이 0°라는 것을 언급했다. 이것은 θ 값이 0°가 아닐 경우, 즉 경사각을 가지고 경계면에 입사하는 파의 경우 점성감쇠기를 이용하는 흡수경계는 성능이 완전하지 않음을 의미한다. 이것은 다음과 같은 두가지의 결과로 확인 할 수 있다. 첫째, 표 2(R=5000m)에서 지표면에서의 흡수율이 다른 지점에서의 흡수율 보다 상대적으로 작은 것을 볼 수 있는데 이는 지표면에서 발생하는 Rayleigh파의 영향으로, 타원형으로 입자운동을 하는 Rayleigh파가 경계면에 경사각을 가지고 입사하기 때문에 판단된다. 둘째, 표 3(L=5000m)에서 θ 의 변화에 따라 흡수율이 상당한 차이가 나며, 표 2에 비해 상대적으로 낮은 값을 가짐을 볼 수 있다. 그러나 표 2(R=5000m)의 경우에는 지표면을 제외한 지점에서 일정한 흡수율을 가지며 표 3에 비해 상대적으로 높은 값을 가짐을 볼 수 있다. 이것은 지표면에서 Rayleigh파의 영향과 같은 경우로, 경계면에 파가 사각을 가지고 입사하기 때문으로 판단된다.

표 2와 표 3에서 White et al.의 흡수경계가 근소하게 낮은 흡수율을 보이는데, 이것은 그림 2 ~ 그림 5의 결과와 같은 것으로서 S파에 대해 완전한 성능을 가지고 있지 않기 때문으로 판단된다.

5. 결론

감쇠기를 사용하는 흡수경계 성능을 해석적인 방법과 수치적인 방법으로 검증하였다. 해석적인 검증은 주기하중에 의한 전파식을 흡수경계조건에 직접 삽입하여 수행하였으며, 수치적인 검증은 점성감쇠기를 사용한 FEM 모형에서의 변위를 측정함으로써 수행하였다.

해석적인 검증을 통해 파가 경계면에 수직으로 입사할 경우 흡수경계의 성능이 완전히 발휘되는 것을 알 수 있었다. 또한 Lysmer-Kuhlemeyer 경계의 경우 흡수경계식의 좌향 및 우향의 값이 약 1 파장 이후 일치함을 알 수 있었는데, 이로부터 주기하중에 의한 전파식에 대해 완벽한 성능을 가지고 있음을 알 수 있었다. 그러나 White et al. 경계의 경우는 S파에 대해 불완전한 성능을 가짐을 알 수 있었다.

수치적인 검증을 통해 흡수율을 산정 하였다. 지표면에서 흡수율이 상대적으로 작은 것을 볼 수 있었는데 이는 타원형으로 입자운동을 하는 Rayleigh파의 전파특성으로 판단되며, 경사각을 가지고 입사되는 파에 대해서는 수직으로 입사하는 경우보다 흡수경계의 성능이 상대적으로 떨어짐을 알 수 있었다.

파진행 문제를 유한요소법으로 해석하는데 있어 파가 수직으로 입사하도록 경계면을 모형화 하기는 현실적으로 어려움이 있다. 따라서 보다 효과적인 흡수경계 사용을 위해서는 Rayleigh 파를 포함하여 경사각에 대한 흡수경계의 지속적인 연구가 이루어 져야 할 것이다.

감사의 글

본 연구는 한국과학기술부 국가지정연구실 사업에 의해 이루어졌으며 이에 감사 드립니다.

참고 문헌

1. 이종세, 손윤기, "표면파 산란거동의 유한요소 해석", 한국전산구조공학회 학술발표회 논문집, 제11권 제1집, 1998, pp. 383~389
2. Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R. L., "Finite Dynamic Model for Infinite Media. *Journal of the Engineering Mechanics Division*," ASCE, Vol. 95, No. EM4, Proc., Paper 6719, 1969, Aug., pp. 859~877
3. Smith, W. D., "A Non-reflecting Plane Boundary for Wave Propagation Problems," *Jornal of Computational Physics*, 15, 1974, pp. 492~503
4. Engquist, B. and Majda, A., "Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves," *Math Comp.*, 31(139), 1977, pp. 629~651
5. White, W., Valliappan, and Lee, M., "Unified Boundary for Finite Dynamic Models," *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 103, No. EM5, 1977, pp. 949~964
6. Liao, Z. P. and Wong, H. L., "A Transmitting Boundary for the Numerical Simulation of Elastic Wave Propagation," *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 3(4), 1984, pp. 174~183
7. Miller, G. F. and Pursey, H., "The Field and Radiation Impedance of Mechanical Radiators on the Free Surface of a Semi-Infinite Isotropic Solid," *Proc., R., Soc.*, A223, 1954, pp. 521~541