

정현상 변단면 기둥의 유효길이 계수

Effective Length Factors of Framed Columns with Sinusoidally Tapered Sections

박재영* 송상용* 김순철** 이수곤***
Park, Jae-Young Song, Sang-Yong Kim, Soon-Chul Lee, Soo-Gon

Abstract

A method for the determination of effective length factors of the framed columns with sinusoidally tapered sections is proposed. In the study, the stability analysis of the single story-two equal bay, frame with tapered columns is performed first by finite element method. The changes of the critical load coefficients of frames are represented by algebraic equations of the analysis parameters. The effective length factor formula is expressed in terms of proposed algebraic equation. The effective length factors for the prismatic columns ($\alpha=0.0$) estimated by the proposed method coincide fairly well with those determined by the analytical method.

1. 서 론

가장 많이 이용하고 있는 AISC의 신 시방서인 LFRD나 한국의 강구조 한계상태 설계기준에서 채택하고 있는 Alignment chart는 몇가지의 불합리한 가정을 전제로 유도한 좌굴 방정식(buckling equation)을 기본으로 작성한 것이기 때문에 그 결과를 이용한 골조의 유효길이 계수가 정확한 값은 아니다. 이번 연구에서는 단층-등 2경간 골조 기둥의 형태가 부재축에 따라 정현곡선(sine curve)형태로 변할 때의 유효길이 산정방법에 관한 것이다. 가장 흔하게 이용하는 해석적 방법의 이용은 불가능하기 때문에 먼저 골조의 임계하중을 유한 요소법으로 산정하였다. 수치해석으로 결정된 임계하중 변화를 해석에서 고려한 변수들의 대수 함수식으로 표시한 다음 대수함수식의 계수들은 회귀 분석(regression analysis) 기법을 이용하여 결정하였다. 끝으로 이들 대수식을 이용하여 유효길이를 산정하는 방법을 제한하였다. 기둥이 변단면 일때의 임계하중 산정 자료는 없기 때문에 등단면 골조 기둥의 유효길이 산정 결과를 제안식과 비교해 보았든바 유한 요소법의 결과는 Alignment chart보다는 정해치라 할수 있는 수정 처짐각법의 결과에 보다 근접함을 보여준다.

* 전남대학교 대학원

** 동신대학교 건축공학과 교수

*** 전남대학교 건축학부 명예교수

2. 골조구성 등단면 기둥의 유효길이 계수

다음의 그림 1 과 같은 beam-column에서 수정 처짐각법의 기본식은

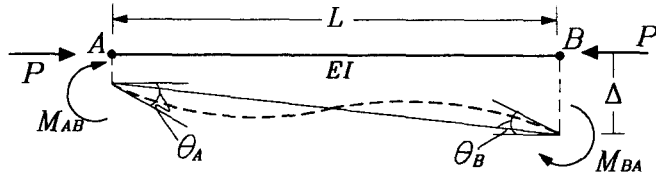


그림 1 Beam-column 의 변형

$$M_{AB} = \frac{EI}{L} \left(\alpha_n \theta_A + \alpha_f \theta_B - (\alpha_n + \alpha_f) \frac{\Delta}{L} \right), \quad M_{BA} = \frac{EI}{L} \left(\alpha_f \theta_A + \alpha_n \theta_B - (\alpha_n + \alpha_f) \frac{\Delta}{L} \right) \quad (1.a,b)$$

여기서 α_n 과 α_f 는 각각 Merchant의 stability function으로

$$\alpha_n = \frac{\Phi_n}{\Phi_n^2 - \Phi_f^2}, \quad \alpha_f = \frac{\Phi_f}{\Phi_n^2 - \Phi_f^2} \quad (2.a,b)$$

으로 표시된다. 단 식중의 Φ_n 과 Φ_f 는 각각 ($kL = L\sqrt{P/EI}$)

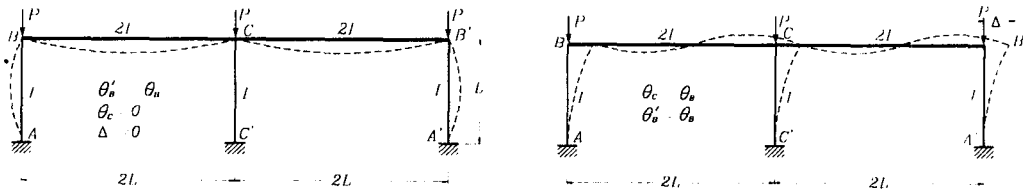
$$\Phi_n = \frac{1}{(kL)^2} (1 - kL \cot kL), \quad \Phi_f = \frac{1}{(kL)^2} (kL \csc kL - 1) \quad (3.a,b)$$

극한으로 $kL \rightarrow 0$ 즉 축방향력이 없으면 $\Phi_n = 4.0$, $\Phi_f = 2.0$ 으로 되어 식 (1)은 통상적인 처짐 각법식 즉 다음과 같이 된다.

$$M_{AB} = \frac{EI}{L} \left(4\theta_A + 2\theta_B - 6 \frac{\Delta}{L} \right), \quad M_{BA} = \frac{EI}{L} \left(2\theta_A + 4\theta_B - 6 \frac{\Delta}{L} \right) \quad (4.a,b)$$

2.1 주각 고정 골조 (fixed base frame)

식 (1)과 (4)의 응용예로 먼저 그림 2와 같은 골조의 임계하중을 산정키로 하는데 이런 골조는 다시 가세골조와 비가세골조로 나눌수 있다.



(a) 가세골조

(b) 비가세골조

그림 2 등-2경간 주각 고정 골조

2.1.1 가새 골조 (braced frame)

주어진 골조가 전단벽(shear wall)이나 수평 가새(bracing)등으로 인하여 수평이동 (side-sway)이 구속될 때의 좌굴 변형은 그림 3과 같이 중앙점 C에 관하여 대칭으로 된다.

이와 같은 골조에서의 좌굴 방정식(buckling equation)은

$$f(kL) = \alpha_n + 4 = 0 \quad (5.a)$$

식 (2.a)로 주어지는 삼각함수식 α_n 을 윗식에 대입하면 시행착오법 (trial and error method)으로 kL 값을 구할 수 있는데 그 결과는 $kL = 5.3290$ 이다. 따라서 임계하중과 유효길이 계수, K 는

$$(kL)^2 = (5.329)^2, \quad P_{cr} = \frac{2.877\pi^2 EI}{L^2} \doteq \frac{\pi^2 EI}{(0.590L)^2}, \quad (K = 0.590) \quad (5.b)$$

양단 고정 단일 압축재의 유효길이 계수가 $K = 0.50$ 이라는 점을 감안하면 그림 2(a)와 같은 골조의 외측기둥은 유효길이 계수 값이 18% 증가함을 알수 있다.

2.1.2 비가새 골조 (unbraced frame)

수평이동이 허용된 골조 즉 비가새 골조에서 좌굴을 일으켰을 때의 골조형상은 그림 2(b) 같이 된다. 이때에는 $\sum M_B = 0$ 과 외측기둥 자체의 모멘트 평형을 고려하여야 하는데 그 결과 얻어지는 좌굴 방정식 기타는 다음식으로 된다.

$$f(kL) = (\alpha_n + \alpha_\beta)^2 - 2(6 + \alpha_n)(\alpha_n + \alpha_\beta) + (kL)^2(6 + \alpha_n) = 0.0 \quad (6.a)$$

$$(kL)^2 = (2.7165)^2, \quad P_{cr} = \frac{0.747\pi^2 EI}{L^2} \doteq \frac{\pi^2 EI}{(1.157L)^2}, \quad (K = 1.157) \quad (6.c)$$

2.2 주각 단순지지 골조

지면 관계상 계산 결과만을 기록하면 아래와 같다.

(가새골조)

$$(kL)^2 = (3.8288)^2, \quad P_{cr} \doteq \frac{1.218\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.906L)^2}, \quad (K = 0.906) \quad (7.a)$$

(비가새 골조)

$$(kL)^2 = (1.3496)^2, \quad P_{cr} = \frac{0.184\pi^2 EI}{L^2} \doteq \frac{\pi^2 EI}{(2.328L)^2}, \quad (K = 2.328) \quad (7.b)$$

3. 골조구성 변단면 기둥

이번 연구의 목적은 골조구성 기둥의 단면이 축방향에 따라 정현곡선 형태로 변할때의 임계하중 및 유효길이 산정으로 수정 처짐각법의 적용은 불가능하다. 따라서 수치 해석법의 하나인 유한요소법으로 먼저 임계하중부터 산정키로 한다.

3.1 요소의 처짐함수 및 강성행렬

그림 3 과 같은 beam-column 요소에서 휨강성의 부재축에 따른 변화를 무시하면, 처짐함수, $v(x)$ 는 전체 자유도가 4이므로

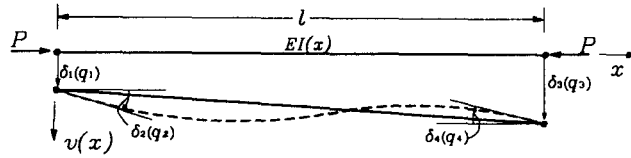


그림 3 요소의 절점변형과 절점 하중

$$v = v(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 \quad (8)$$

로 표시할 수 있다. 위의 식에서 계수 A_0, \dots, A_3 등을 절점 변형성분, δ_i 로 표시한 다음 정리하면

$$v = v(x) = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4] \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = [f] \cdot \{\delta\} \quad (9.a)$$

식 (9.a)에서 $[f]$ 는 shape function set으로 그 내용은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, & f_2 &= x\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \\ f_3 &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, & f_4 &= -\frac{x^2}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \end{aligned} \quad (9.b)$$

식 (9.b)에서 $\delta_1, \dots, \delta_4$ 는 그림 3.1의 절점 변형 성분을 나타낸다.

요소의 강성행렬은 요소의 휨 변형에너지 (flexural strain energy)가 절점하중 성분 q_i 및 일정 축력 P 에 의한 외부일 (external work)과 같다고 놓으므로써 유도되는데 최종 결과는 아래식으로 된다.

$$[k] = [k_b] - P[k_g]$$

$$[k_b] = \int_0^l \left[\frac{d^2N}{dx^2} \right]^T \cdot EI(x) \cdot \left[\frac{d^2N}{dx^2} \right] dx = \frac{EI(e)}{l^3} \begin{vmatrix} 12 & & & & & \\ 6l & 4l^2 & & & & \text{symm} \\ -12 & -6l & 12 & & & \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 & & \end{vmatrix} \quad (10.a)$$

$$P[k_g] \text{ (=geometric stiffness matrix)} = \left(\frac{1}{30}\right) \cdot \frac{P}{l} \cdot \begin{vmatrix} 36 & & & & & \\ -3l & 4l^2 & & & & \text{symm} \\ -36 & 3l & 36 & & & \\ -3l & -l^2 & 3l & 4l^2 & & \end{vmatrix} \quad (10.b)$$

변단면 부재에서는 부재축에 따라 휨 강성 $EI(x)$ 이 변화기 때문에 정확한 적분은 대단히 복잡하게 된다. 이번 연구에서는 각 요소 중앙점에서의 단면 2차 모멘트 값 $I(e) = I(x=0.5l)$ 를 이용하여 휨 강성행렬을 구하였는데 그 결과가 식 (10.a)의 오른쪽 마지막 행렬이다. 적분 과정에서

$I(x)$ 를 $I(e)$ 로 대치시키면 당연히 오차 발생은 예측되나 오차는 통상 $\pm 10\%$ 이내로 실용상 큰 문제는 없다. Newmark는 이와 같은 강성의 대치로 인한 고유치 (eigenvalue)의 오차가 미소하다고 지적하였다.

3.2 임계하중의 산정

그림 3.2는 이번 연구에서 택한 골조 및 수치해석에서 택한 변수 및 범위들을 나타낸다.

▶ 골조의 구분

가세 골조 (braced frame, 수평동이 구속된 골조)

비가세 골조 (unbraced frame, 수평동이 허용된 골조)

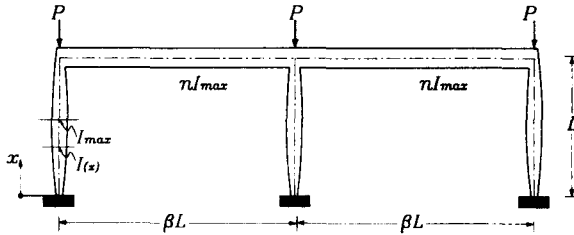


그림 4 1층 2경간 골조

▶ 기둥의 매개변수

$$I(x) = I_0 \left(1 + \alpha \sin \frac{\pi x}{L} \right)^m, \quad \alpha \text{ (taper parameter) : } 0.0, 0.2, 0.4, \dots, 2.0$$

m (sectional property parameter) : 2, 3 또는 4

▶ 골조의 매개변수

β (경간대 층고비) : 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 / n (단면 2차 모멘트 비) : 0.5, 1.0, 1.5, 2.0

▶ 주각의 경계조건

고정-고정-고정 (fixed-fixed-fixed bases) / 활절-활절-활절 (hinge-hinge-hinge bases)

이번 연구에서는 변단면 기둥은 10등분, 등단면 보는 2등분하여 식 (10)에 의한 요소의 강성행렬들을 산정한 후 이들을 차례로 조합하였다. 조합된 강성행렬에 경계조건을 고려하면 최종적으로 다음과 같은 행렬 방정식을 얻는다.

$$([K_b] - P[K_g])\{\Delta\} = \{Q\}, \quad \{Q\} = \{0\} \tag{11.a}$$

여기서 $\{\Delta\}$ 와 $\{Q\}$ 는 각각 절점 변형 및 절점 하중 vector인데 $\{Q\} = \{0\}$ 이므로 식 (11.a)는 전형적인 고유치 문제 (eigenvalue problem)이다. 실제의 계산에서는 행렬의 차원 (dimension)이 대단히 크므로 우리가 필요로 하는 최소 고유치는 computer를 이용한 반복법 (iterative method)를 이용하였다. 반복법 적용으로 최소 고유치 (임계하중)을 구하기 위하여 먼저 위의 식을 다음과 같이 변환시킨다.

$$\left([K_b]^{-1}[K_g] - \frac{1}{P}[I] \right)\{\Delta\} = \{0\} \tag{11.b}$$

그림 4에서 고려한 각 변수에 대하여 식 (14)를 적용시켜 산정한 임계하중의 계수 C_{jem} 의 일부만을 표 1에 표시하였다. 즉 임계하중은

$$P_{cr} = C_{fem} \cdot \frac{EI_0}{L^2}, (C_{est} = C_{fem}) \quad (12.a)$$

표에서 알수 있듯이 주각의 고정도 증가와 taper parameter, α 및 sectional property parameter m 의 증가는 임계하중 계수를 증가시킨다. 반면 β 의 증가 즉 경간대 높이의 비가 커질수록 임계하중 계수는 감소한다.

표 1. 주각고정, 비가세 골조의 임계하중 및 회귀상수 ($m = 4$)

A_0	1.8065	C_0	1.088	E_0	1.6709
A_1	-1.4331	C_1	10.7592	E_1	-5.9694
A_2	7.2790	C_2	-2.5128	E_2	1.2781
B_0	2.2282	D_0	0.0000	F_0	-0.2482
B_1	34.9160	D_1	-17.7596	F_1	-1.9770
B_2	-9.9480	D_2	5.0977	F_2	0.4066

$\beta = 1$	$n = 0.5$		$n = 1.0$		$n = 1.5$		$n = 2.0$		
α	C_{fem}	C_{est}	C_{fem}	C_{est}	C_{fem}	C_{est}	C_{fem}	C_{est}	ρ
0.0	5.8030	5.3525	7.0477	6.5462	7.7680	7.6158	8.2226	8.5613	
0.2	8.9835	8.9538	10.5602	10.3174	11.3579	11.3674	11.8205	12.1037	
0.4	12.6178	12.7082	14.3914	14.2167	15.1909	15.2383	15.6270	15.7730	
0.6	16.5237	16.6156	18.3707	18.2441	19.1286	19.2286	19.5290	19.5691	
0.8	20.6937	20.6760	22.5302	22.3995	23.2326	23.3382	23.5939	23.4921	
1.0	24.9810	24.8895	26.7435	26.6829	27.3864	27.5671	27.7157	27.5419	
1.2	29.3371	29.2560	30.9981	31.0944	31.5866	31.9153	31.8824	31.7186	
1.4	33.9793	33.7755	35.5343	35.6339	36.0727	36.3828	36.3414	36.0221	
1.6	38.6772	38.4481	40.1303	40.3015	40.6225	40.9696	40.8703	40.4525	
1.8	43.4562	43.2737	44.8108	45.0971	45.2663	45.6758	45.4931	45.0098	
2.0	48.4041	48.2524	49.6700	50.0208	50.0946	50.5013	50.3068	49.6939	0.9998

4. 유효길이 계수

일반적으로 압축재의 임계하중은 다음식으로 표시한다.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (12.b)$$

여기서 유효길이 계수, K 의 식을 유도하기 위하여 먼저 유한 요소법으로 산정한 임계하중의 계수변화를 각각의 m (sectional property parameter)에 대하여 다음과 같은 대수 함수식으로 표시한다.

$$C_{fem} \doteq C_{est} = (A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2) + (B_0 + B_1\alpha + B_2\alpha^2)\frac{1}{\beta} + (C_0 + C_1\alpha + C_2\alpha^2)n \\ + (D_0 + D_1\alpha + D_2\alpha^2)\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 + (E_0 + E_1\alpha + E_2\alpha^2)\left(\frac{n}{\beta}\right) + (F_0 + F_1\alpha + F_2\alpha^2)n^2 \quad (13)$$

식 (13) 중의 계수 A_0, A_1, \dots, F_2 등은 유한 요소법으로 산정한 임계하중 계수를 기본으로 하여 회귀 분석법으로 산정 하였고 그 결과는 표 1의 상단에 주어지고 있다. 부록 2에서 C_{fem} 은 유한 요소법으로 산정한 임계하중 계수이고 C_{est} 은 제안식 식 (13)과 표 1에 표시한 회귀 상수값으로부터 추정된 계수로 그 차이가 크지 않음을 보여준다. 실제로 C_{fem} 과 C_{est} 의 상관계수는 거의 단위치 (1.0)에 가까운 값으로 식 (13)의 정당성을 입증하고 있다.

이제 식 (12)를 서로 같다고 놓으면 유효길이 계수, K 는

$$K = \frac{\pi}{\sqrt{C_{est}}} \quad (14)$$

표 1에서 $\alpha=0.0$ 은 등단면 기둥을 의미한다. 표에서 $\alpha=0.0, \beta=2.0, n=2.0$ 은 그림 2와 같은 골조를 나타내는데 수정 처짐각법과 제안식으로 산정한 유효길이 계수를 비교하면 표 2와 같다. 표에서 알수 있듯이 오차는 $\pm 5.5\%$ 로 제안식은 실제의 구조설계에 이용하여도 설계상의 커다란 오차 발생은 없을 것으로 판단된다. 다음의 표 3은 m (=sectional property parameter)= 2, α (=taper parameter)= 0.2, β (=span to height ratio)= 2.0, n (=second moment of area ratio)= 1.0 인 골조 구성 변단면 기둥에 대한 것이다. 표 3에서 보면 비가세 골조의 유효길이 계수는 1.0 보다 크게 나타났으나 taper parameter, α 의 값이 커지면 1.0보다 작게 된다. 즉 등단면 기둥에서 $K \geq 1.0$ 이라는 법칙이 변단면 기둥에서는 성립하지 아니하는 경우도 있다.

표 2 등단면 골조기둥의 유효길이 계수 비교 ($\alpha=0.0, \beta=n=2.0$)

	비가세 골조		가세 골조
	주각고정골조	처짐각법	$K=1.157$ (식 6.c)
제안식		$K=\pi/\sqrt{6.6191}=1.221$	$K=\pi/\sqrt{26.1908}=0.614$
오차		+5.5%	+4.0%
주각활절골조	처짐각법	$K=2.328$ (식 7.b)	$K=0.906$ (식 7.a)
	제안식	$K=\pi/\sqrt{1.9028}=2.277$	$K=\pi/\sqrt{13.4679}=0.856$
	오차	-2.2%	-5.5%

표 3 골조구성 변단면 기둥의 유효길이 계수 ($\alpha=0.2$, $\beta=2.0$, $n=1.0$)

	비가세 골조	가세 골조
주각고정 골조	$K=\pi/\sqrt{6.4085}=1.241$	$K=\pi/\sqrt{28.6156}=0.587$
주각활절 골조	$K=\pi/\sqrt{1.8560}=2.306$	$K=\pi/\sqrt{14.0845}=0.815$

5. 결 론

골조를 구성하는 기둥이 정현곡선 (sine curve) 형태의 변단면 일 때 유효길이 계수 산정식을 유도하기 위하여 먼저 유한 요소법으로 골조의 임계하중을 산정한 다음 임계하중 계수의 변화를 수치 해석에서 고려한 변수들의 대수 함수식으로 표시하였고 대수식에 포함된 대수들은 회귀 분석 방법으로 결정하였다. 제안한 대수 함수식을 이용하면 유효길이 계수의 식이 간단한 식으로 표시되는데 그 결과를 요약하면 다음과 같다.

1. 유한 요소법에 의한 임계하중 계수 (C_{fem})의 변화와 제안한 대수 함수식으로 추정된 임계하중 계수 (C_{est})의 상관계수는 어느 경우에도 거의 단위치 (1.0)에 가까운 값으로 제안식의 타당성을 뒷받침한다.
2. 등단면 기둥의 경우 정확한 방법이라 할수 있는 수정 처짐각법을 기본으로 한 유효길이 계수와 제안식을 이용한 계수의 오차는 $\pm 5.0\%$ 정도로 제안식을 실제의 구조설계에 이용하여도 큰 무리는 없겠다.
3. 골조구성 기둥이 변단면 형태일 경우, taper parameter, α 가 작을 때에는 비가세 골조의 유효길이 계수가 단위치 (1.0) 보다 크나 α 값이 커지면 단위치 보다 작게 된다. ($K < 1.0$) 즉 비가세 골조에서는 $K \geq 1.0$ 이라는 등단면 골조에서의 법칙은 성립하지 않는다.

참고문헌

1. AISC., *Specification for the Allowable Stress Design, Fabrication, and Erection of Structural Steel for Building*, Chicago, IL, July, 1989
2. 이수곤., **구조물의 안정이론**, 전남대학교 출판부, 1995
3. 김상식, **구조 안정해석**, 문운당, 1999
4. Chen W.F. and et al, *Structural Stability*, Elsevier Science Publishing Co., Inc, 1987
5. Kinney J.S., *Indeterminate Structural Analysis*, Addison Wesley Publishing Co., Inc, 1957