

## 평면구조계 반응변화도의 포아송비에 의한 영향

### Effects of Poisson Ratio on Response Variability of Plane Structures

노혁천\*

Noh, Hyuk-Chun

---

#### ABSTRACT

The structures have intrinsic uncertainties in analysis/design parameters contrary to the assumptions of perfect constant over the structural domain. The material and geometrical parameters are the exemplary ones. The influences of uncertainties in Young's modulus, which are the representative random design variables, on the structural response have been the center of focus in the realm of stochastic analysis. In this study, a formulation to obtain the response variability due to the randomness in the Poisson's ratio is given. In that the previous researches in the literature deal with the response variability due mainly to the uncertainty in the elastic modulus, with the results of this research, it can be asserted to obtain the response variability taking into consideration of uncertainties in all the material constants becomes possible.

---

#### 1. 서 론

구조계가 내포하고 있는 불확실성은 구조재료인수, 구조형상인수 그리고 작용하중 등 세 가지로 대별할 수 있다. 최근까지 추계론적해석(stochastic analysis)분야에서 주로 다루고 있는 문제들은 재료상수와 구조형상인수의 영향에 대한 평가<sup>(1,2,5,7)</sup>이며, 작용하중의 임의성에 의한 영향은 추계론적 동적해석부분<sup>(8)</sup>으로 분리되어있다고 할 수 있다. 전술한 구조계 상수들의 임의성은 구조계의 거동에 영향을 미치게 되는데 이러한 영향은 확정론적해석(deterministic analysis)결과에 더하여 구조 반응의 확률적 특성을 제시하게 된다.

추계론적 해석은 두 가지로 나눌 수 있는데 하나는 몬테카를로 방법을 포함하는 통계학적 해석법이며 다른 하나는 비통계학적 해석법으로서 섭동법, 국부평균법, 가중적분법 등이 포함된다.<sup>(3,6,9)</sup> 본 연구에서는 비통계학적 추계론적해석의 한 방법인 가중적분법(weighted integral)에서 포아송비의 임의성을 고려하는 정식화를 수행하고자 한다.

평면문제는 평면응력(plane stress)문제와 평면변형률(plane strain)문제로 나눌 수 있다. 포아송비는 하중작용 직각방향으로의 변형특성을 표현하는 재료계수로서 실제적으로는 평면변형률의 문제에서 중요성이 있을 것으로 예상된다. 따라서, 본 논문에서는 평면응력문제에서 포아송비의 공간적 불확실성에 의한 구조계 반응변화도에의 영향평가를 위한 정식화를 제시하고자 한다.

---

\* 연구원, 스마트 사회기반시설 연구센터, 한국과학기술원

## 2. 평면응력/평면변형률상태에서의 응력-변형률 행렬

유한요소의 강성행렬에서 포아송비를 포함하는 부분은 응력-변형률 행렬로서 식 (1)은 평면응력 ( $pss$ ) 및 평면변형률 ( $psn$ ) 상태에서의 응력-변형률 행렬이다.

$$\mathbf{D}_{pss} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{psn} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

위 행렬의 각 요소들은 아래와 같이 다항식 전개가 가능한 형태를 취하고 있는 것을 알 수 있다.

$$\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \dots, \quad \frac{x}{1 \pm x} = x(1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \dots) \quad (2)$$

위의 전개식은  $|x| < 1.0$  인 경우 성립하며  $x$ 의 값이 적을수록 그 수렴도가 향상된다.

해석인수의 공간적 불확실성을 표현하는 일반적인 방법을 적용하여 포아송비의 공간적 불확실성을  $\nu = \nu_0 [1 + f_\nu(\mathbf{x})]$ 와 같이 표현하고<sup>(1,2,5)</sup> (여기서,  $f_\nu(\mathbf{x})$ 는 공간좌표  $\mathbf{x}$ 의 함수로 주어지는 포아송비의 공간적 불확실성을 표현하는 추계장함수이다. 추후에는 단순히  $f(\mathbf{x})$ 로 나타낸다.) 식 (2)를 적용하면 응력-변형률 행렬은 다음과 같이 변형된 형태로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{D}_{pss} = E \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{21} & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{D}_{psn} = \mathbf{D}_{(a)} + \mathbf{D}_{(b)} = E \begin{bmatrix} e_{(a)11} & e_{(a)12} & 0 \\ e_{(a)21} & e_{(a)22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{(a)33} \end{bmatrix} + E \begin{bmatrix} e_{(b)11} & e_{(b)12} & 0 \\ e_{(b)21} & e_{(b)22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

여기에서, 평면응력상태를 나타내는 응력-변형률 행렬의 각 요소들  $e_{ij}$ 는 아래의 형태를 가지며, 평면변형률의 경우인  $e_{(k)ij}$  ( $k=a$  또는  $b$ )도 유사한 형태로 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} e_{11} = e_{22} \\ e_{12} = e_{21} \\ e_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ f \\ f^2 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기에서  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 는 포아송비의 평균값인  $\nu_0$ 의 다항식 형태로 주어진다. 추계장 함수가  $|f| < 1.0$ 인 조건을 만족하며 포아송비의 이론적 최대값이 0.5이므로  $\nu_0^4$ 과  $f^2$ 보다 고차인 항들은 무시할 수 있을 정도로 적을 것으로 가정하여 생략하였다. 그러나 평면변형률의 경우  $2\nu$ 의 값이 나타나므로 포아송비의 7내지 8승까지 전개되어야 99%이상의 정확성을 가질 수 있다.

### 3. 요소강성행렬

식 (3)의 응력-변형률 행렬을 이용하면 포아송비의 공간적 불확실성을 포함하는 요소강성행렬을 작성할 수 있다. 평면응력과 평면변형률에 대한 강성행렬이 유사하게 전개되므로 여기서는 평면응력의 경우에 대하여만 기술하고자 한다. 추계장함수를 포함하는 응력-변형률 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{D}_{pss} = \mathbf{D}^{(0)} + f(x)\mathbf{D}^{(1)} + f^2(x)\mathbf{D}^{(2)} \quad (5)$$

여기에서,

$$\mathbf{D}^{(i)} = E \begin{bmatrix} \alpha_{i+1} & \beta_{i+1} & 0 \\ \beta_{i+1} & \alpha_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{i+1} \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, 2$$

그러므로 요소 강성행렬  $\mathbf{k}^e$ 는 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{pss} \mathbf{B} d\Omega^e \\ &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{(0)} \mathbf{B} d\Omega^e + \int_{\Omega^e} f(x) \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{(1)} \mathbf{B} d\Omega^e + \int_{\Omega^e} f^2(x) \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{(2)} \mathbf{B} d\Omega^e \end{aligned} \quad (6)$$

여기에서,  $\mathbf{D}^{(0)}$ 는 추계론적 장함수  $f(\mathbf{x})$ 가 개입되지 않은 본래의 응력-변형률 행렬로서 포아송비의 평균치인  $\nu_0$ 가 사용된다. 즉, 확정론적 유한요소 해석에서 구성되는 응력-변형률 행렬과 동일하다. 그러므로 요소강성행렬은 다음의 식과 같이 쓸 수 있다. 여기에서 아래첨자 '0'는 평균을 의미한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^e &= \mathbf{k}_0^e + \Delta \mathbf{k}^{e(1)} + \Delta \mathbf{k}^{e(2)} \\ &= \mathbf{k}_0^e + \Delta \mathbf{k}^e \end{aligned} \quad (7)$$

요소강성행렬을 추계장함수의 적분에 의하여 표현되는 확률변수로 구성하기 위하여 변위-변형률 행렬  $\mathbf{B}$ 를 상수만을 요소로 가지는 상수행렬  $\mathbf{B}_i$ 와 독립적인 다항식  $p_i$ 의 곱의 합으로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_i p_i, \quad i = 1, 2, \dots, N_p \quad \text{sum on repeated index} \quad (8)$$

$N_p$ 는 변위-변형률 행렬  $\mathbf{B}$ 에 포함된 독립다항식  $p_i$ 의 수를 나타낸다. 이 경우 가감강성행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{k}^{e(1)} &= \int_{\Omega^e} f(x) \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{(1)} \mathbf{B} d\Omega^e & \Delta \mathbf{k}^{e(2)} &= \int_{\Omega^e} f^2(x) \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{(2)} \mathbf{B} d\Omega^e \\ &= \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}^{(1)} \mathbf{B}_j X_{ij}^{(1)} & &= \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}^{(2)} \mathbf{B}_j X_{ij}^{(2)} \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $i, j = 1, 2, \dots, N_p$ 이며, 확률변수는  $X_{ij}^{(k)} = \int_{\Omega^e} f^k(x) p_i p_j d\Omega^e$ 이다.

그러므로 가감강성행렬  $\Delta \mathbf{k}^e$ 는 확률변수  $X_{ij}^{(k)}$ 의 함수임을 알 수 있으며, 따라서 가감강성행렬을 포함하는 요소강성행렬  $\mathbf{k}^e$ 와 전체강성행렬  $\mathbf{K}$ 도 확률변수  $X_{ij}^{(k)}$ 의 함수임을 유추할 수 있다. 변위벡터  $\mathbf{U}$ 는 전체강성행렬의 역행렬과 확정론적으로 주어지는 하중 벡터  $\mathbf{F}$ 의 곱으로 주어지므로 변위벡터  $\mathbf{U}$  역시 확률변수  $X_{ij}^{(k)}$ 의 함수가 된다.

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(X_{ij}^{(k)}) \quad (10)$$

해석영역 내 각 유한요소의 확률변수 수는  $N_{RV} = N_{RV^{(1)}} + N_{RV^{(2)}}$ 로 주어지며, 여기에서 상첨자로 사용된 '(1)' 과 '(2)' 는 각각  $f(\mathbf{x})$ 와  $f^2(\mathbf{x})$ 을 포함하는 강성행렬에 나타나는 확률변수를 표시한다.

#### 4. 확률변수 평균값에 대한 변위벡터의 Taylor 전개

확률변수  $X$ 의 평균치에 대한 변위벡터  $\mathbf{U}$ 의 1차 전개식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{U}_o - \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{RV^{(1)}} X_{RV^{(1)}}^e \mathbf{K}_o^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{RV^{(1)}}^e} \right]_E \mathbf{U}_o - \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{RV^{(2)}} (X_{RV^{(2)}}^e - \sigma_{ff}^2 Y_{RV^{(2)}}) \mathbf{K}_o^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{RV^{(2)}}^e} \right]_E \mathbf{U}_o \\ &= \mathbf{U}_o - \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{RV=1}^{N_{RV}} X_{RV}^e \mathbf{K}_o^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{RV}^e} \right]_E \mathbf{U}_o + \sigma_{ff}^2 \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{RV^{(2)}} \mathbf{K}_o^{-1} \left[ Y_{RV^{(2)}} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{RV^{(2)}}^e} \right]_E \mathbf{U}_o \end{aligned} \quad (11)$$

$X_{RV}^{eo} = E[X_{RV}^e]$ 이며 ( $E[\bullet]$ 은 평균연산자), 평형방정식에 대한 편미분을 통하여 다음의 관계가 적용되었다. (1.3.5)

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X_{RV}^e} \right]_E = -\mathbf{K}_o^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{RV}^e} \right]_E \mathbf{U}_o \quad (12a)$$

$$X_{RV^{(1)}}^{eo} = 0, X_{RV^{(2)}}^{eo} = \int_{\xi} R_{ff}^2 (\xi = 0) p_i p_j d\Omega^e = \sigma_{ff}^2 \int_{\xi} p_i p_j d\Omega^e = \sigma_{ff}^2 Y_{ij} \quad (12b)$$

확률변수의 아래첨자로 사용된  $RV^{(k)}$  ( $k=1,2$ )는 가감강성행렬  $\Delta \mathbf{k}^{e(1)}$ 와  $\Delta \mathbf{k}^{e(2)}$ 에 포함된 확률변수를 나타내기 위하여 사용되었으며,  $Y_{ij}$ 는 추계론적장  $f(\mathbf{x})$ 를 포함하지 않는 확정론적 적분치를 나타내며 식 (11)의  $Y_{RV^{(2)}}$ 를 나타낸다.

##### 4.1 평균(Ensemble mean)

변위의 평균은 다음과 같이 계산된다.

$$E[\mathbf{U}] = \mathbf{U}_o + \sigma_{ff}^2 \mathbf{K}_o^{-1} \mathbf{K}^{(2)} \mathbf{U}_o \quad (13)$$

여기서,  $\mathbf{K}_o = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{k}_o^e$ ,  $\mathbf{K}^{(2)} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{k}^{e(2)}$  and  $\mathbf{k}^{e(2)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{(2)} \mathbf{B} d\Omega^e$

#### 4.2 공분산(Covariance)

변위의 공분산은 다음의 식으로 얻을 수 있다.

$$\text{Cov}[\mathbf{U}, \mathbf{U}] = E[\Delta \mathbf{U} \Delta \mathbf{U}^T] \quad (14)$$

여기서,

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U} - E[\mathbf{U}] = - \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{RV}^{N_{RV}} X_{RV}^e \mathbf{K}_o^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{RV}^e} \right]_E \mathbf{U}_o$$

그러므로 공분산은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\mathbf{U}, \mathbf{U}] &= E \left[ \left( \sum_{ei=1}^{N_e} \sum_{RVi}^{N_{RV}} X_{RVi}^{ei} \mathbf{K}_o^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{RVi}^{ei}} \right]_E \mathbf{U}_o \right) \left( \sum_{ej=1}^{N_e} \sum_{RVj}^{N_{RV}} X_{RVj}^{ej} \mathbf{K}_o^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{RVj}^{ej}} \right]_E \mathbf{U}_o \right)^T \right] \\ &= \sum_{ei, ej} \mathbf{K}_o^{-1} \bar{\mathbf{F}}_{ei, ej, E} \mathbf{K}_o^{-T} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서,  $\bar{\mathbf{F}}_{ei, ej, E} = E[\Delta \mathbf{k}^{ei} \mathbf{U}_o \mathbf{U}_o^T \Delta \mathbf{k}^{ej}]$ 으로 정리되며, 이는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_{ei, ej, E} &= \int_{\Omega^{ei}} \int_{\Omega^{ej}} R_{ff}(\xi) \tilde{\mathbf{k}}^{ei(1)} \mathbf{U}_o \mathbf{U}_o^T \tilde{\mathbf{k}}^{ej(1)} d\Omega^{ej} d\Omega^{ei} \\ &\quad + \int_{\Omega^{ei}} \int_{\Omega^{ej}} (\sigma_{ff}^4 + 2R_{ff}^2(\xi)) \tilde{\mathbf{k}}^{ei(2)} \mathbf{U}_o \mathbf{U}_o^T \tilde{\mathbf{k}}^{ej(2)} d\Omega^{ej} d\Omega^{ei} \end{aligned} \quad (16)$$

여기에서  $\tilde{\mathbf{k}}^{ei(k)} = \mathbf{B}_{ei}^T \mathbf{D}_{ei}^{(k)} \mathbf{B}_{ei}$ ,  $i=1, \dots, N_e$

공분산의 계산에 적용된 자동상관함수는 아래와 같다.

$$R_{ff}(\xi) = \sigma_{ff}^2 \exp \left\{ - \frac{|\xi_1| + |\xi_2|}{d} \right\} \quad (17)$$

자동상관함수에 사용된  $d$ 의 값은 상관관계거리를 나타내며  $\sigma_{ff}$ 는 추계장의 분산계수를 나타냈다.

## 5. 예제해석

본 연구에서는 통계학적전처리과정<sup>(4)</sup>을 이용한 난수표본의 생성과 생성된 표본을 사용한 몬테 카를로 시뮬레이션을 수행하여 그 결과를 비교하였다. 추계장의 통계적 특성을 만족시키기 위하여 생성되어야 하는 난수표본의 수는  $4 \times nf \times N_e$ 이며,  $nf$ 는 난수생성 알고리즘의 인수이고  $N_e$ 는

구조체내의 요소 수이다.

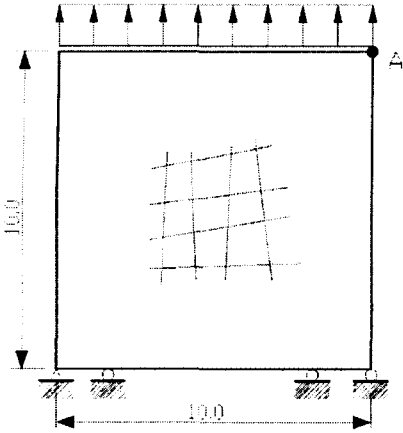


그림 1 해석예제의 형상

해석대상 구조는 평면 구조로서 가로 세로 각 10의 크기를 가지고 면의 상부에 상향으로 등분포하중이 작용하는 구조이다. 탄성계수는 1.0을 사용하였고, 포아송비는 0.25이다. 경계조건은 강체운동을 제약하는 최소의 조건을 부여하였다. 해석결과는 변위가 가장 크게 발생하는 A점에 대하여 제시하였다.

추계론적 해석 결과는 반응에 대한 평균과 공분산으로 주어지지만 공분산만 가지고는 반응의 변화도를 측정하기 어려우므로 일반적으로 표준편차와 평균의 비로 표현되는 변화도계수(coefficient of variation, COV) 값을 제시하게 된다.

$$COV = \frac{\sigma_R}{R} \quad (18)$$

몬테카를로 시뮬레이션의 경우 반응의 평균값은 확정론적해석과 거의 유사한 결과를 나타냈다. 본 연구에서 제안된 가중적분법의 경우 식 (13)과 같이 약간의 증가가 있으나 증가되는 값은 평균치의 0.5% 이내로서 상대적으로 적은 양으로 나타났다.

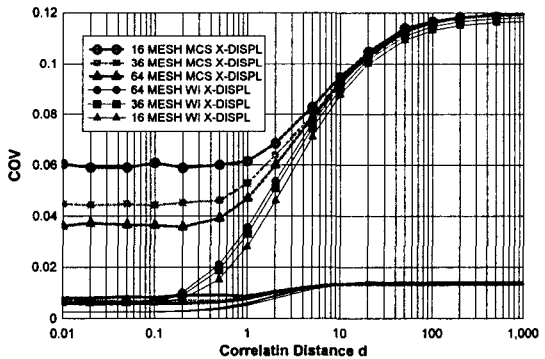
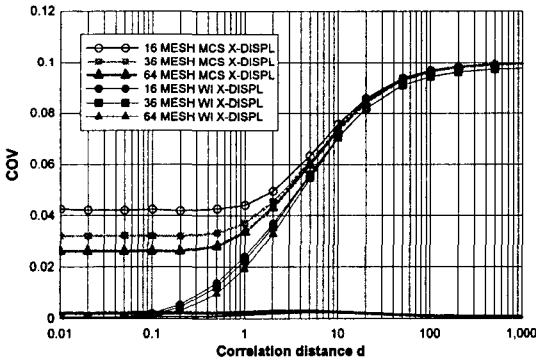


그림 2, 3. 상관관계거리  $d$ 와 변화도계수 (평균응력, 평면변형률)

그림 2와 3은 상관관계거리  $d$ 의 변화에 따른 변화도계수 COV의 값을 보여주고 있다. 몬테카를로 (MCS)방법의 경우와 제안된 가중적분법에 의한 결과는 요소망의 세분화에 따라 각각 하한경계와 상한경계를 가지며 수렴하는 것을 볼 수 있다. MCS의 경우  $d$ 의 값이 적은 구역에서는 추계장에 대한 정확한 모사가 불가능하여 COV의 값이 상대적으로 크게 나타나는 것을 볼 수 있다.  $d$ 의 증가에 따른 수렴치인 0.1과 0.12는 그림 1의 A점으로 표시된 점의 x-방향의 변위에 대한 결과이며 y-방향 변위에 대한 결과는 하단에 적은 값을 나타내며 보여지고 있다. 이는 하중의 직각 방

향인 x-방향의 포아송 값에 의한 영향이 크다는 것을 나타내고 있으며 이는 직관에 의한 결과와 일치한다. 반응변화도의 수렴치는 평면응력(0.1)보다는 평면변형률(0.12) 상태에서 더 크게 나타나고 있다.

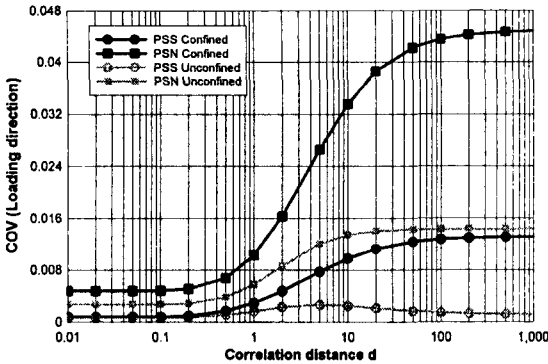


그림 3. 경계조건에 의한 영향

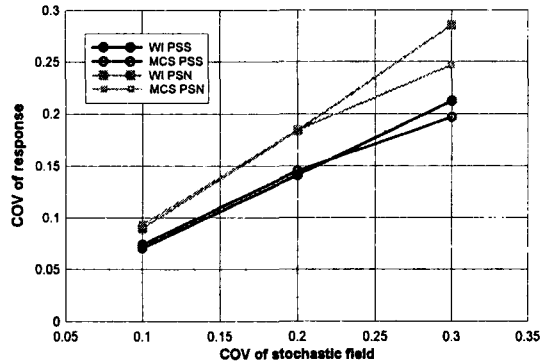


그림 4. 추계장 임의성강도의 영향( $d=10$ )

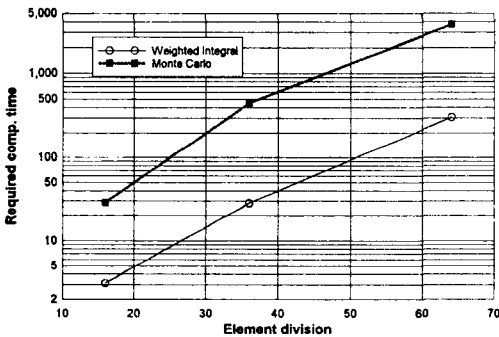


그림 5. 모델 크기에 따른 해석시간의 비교

그림 3은 그림 1의 구조에서 x-방향의 변위를 묶고 구조 상부에 하중방향 변위만을 허용했을 경우 하중방향의 변위에 대한 COV값을 나타낸 것이다. 전술되었던 경계조건의 경우(unconfined)와 비교하여 이 경우에는 하중방향 변위의 변화도가 더 크게 나타나는 것을 알 수 있다. 이 경우에도 평면응력 상태보다는 평면변형률 상태에서의 변화도가 크게 나타나 경계조건에 관계없이 포아송비의 임의성에 의한 반응의 변화도는 평면변형률 상태에서 상대적으로 크게 나타남을 보여주고 있다. 그림 4는 추계장 임의성강도(intensity of randomness)의 증가가 구조계 반응변화도에 미치는 영향을 나타낸 것이다. 임의성강도가 높은 경우 MCS해석에서는 난수발생의 어려움으로 인하여 정확한 해석결과를 기대하기 어렵다. 실제로 추계장의 표준편차가 0.2 이상이 될 경우 난수발생을 통하여 얻을 수 있는 통계특성치들은 목표치의 85% 정도를 나타내었다. 그림 4에서 보는 바와 같이 가중적분법이 높은 임의성강도에서도 합리적인 결과를 보이는 반면 MCS해석은 이에 준하지 못하는 결과를 보여주고 있다. 비통계학적 추계론적 해석의 장점은 MCS에 비하여 해석 비용이 적다는 것으로 이는 그림 5에 잘 나타나고 있다. 그림에서 보듯이 MCS는 가중적분법에 비하여 한 차수 높은 해석시간을 요하여 경제성이 떨어지고 있는 것을 볼 수 있다.

## 6. 결론

본 연구에서는 평면구조에서 재료상수의 하나인 포아송비의 공간적 임의성에 의한 구조반응의 변화도를 산정할 수 있는 새로운 정식화를 제안하였다. 분수식의 다항식 전개를 적용한 정식화를 통하여 요소강성행렬을 평균항과 가감항의 두 항으로 분리할 수 있었으며 이를 통하여 구조반응의 평균과 공분산의 산정을 위한 정식화를 완성하였다. 제안된 정식화에 의한 결과는 통계학적 방법인 MCS의 경우와 잘 일치하였으며, 추계장의 임의성강도가 높은 경우에도 잘 적용되었고 해석의 경제성도 높은 것으로 나타났다.

포아송비의 임의성에 의한 구조반응의 변화도는 구조의 경계조건에 영향 받는 것으로 나타났으며, 평면응력상태의 경우 추계장 임의성강도와 동일한 정도로, 그리고 평면변형률 상태의 경우에는 120%정도의 변화도를 나타내어 포아송비에 의한 구조반응변화도의 영향도 매우 큰 것을 알 수 있었다. 본 논문의 의의는 본 정식화를 통하여 구조내의 모든 재료상수의 불확실성에 대한 체계론적 해석이 가능해졌다는 것에서 찾을 수 있다.

## 감사의 글

본 연구는 한국과학재단 및 스마트 사회기반시설 연구센터(SISTeC)의 지원으로 수행되었음을 밝히며 이에 감사드립니다.

## 참고문헌

1. C.K. Choi, H.C. Noh, *Stochastic finite element analysis of plate structures by weighted integral method*, Structural Engineering and Mechanics, 4(6), (1996a), 703-715.
2. C.K. Choi, H.C. Noh. "Stochastic Analysis of Shape Imperfection in RC Cooling Tower Shells", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 126, No. 3, pp.417-423, March, 2000.
3. C.K. Choi, H.C. Noh, "Weighted Integral SFEM Including Higher Order Terms", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 126, No. 8, pp.859-866, August, 2000.
4. F. Yamazaki, M. Shinozuka, G. Dasgupta *Neumann expansion for stochastic finite element analysis*, J. Engrg. Mech., ASCE, 114(8), (1988), 1335-1353.
5. G. Deodatis, W. Wall, M. Shinozuka, *Analysis of two-dimensional stochastic systems by the weighted integral method*", Eds. Spanos, P. D. and Brebbia, C. A. Computational stochastic mechanics, (1991), 395-406.
6. K. Liu, T. Belytschiko, A. Mani, *Probabilistic finite elements for nonlinear structural dynamics*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 56, (1986), 61-81.
7. M. A. Lawrence, *Basis random variables in finite element analysis*, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 24, (1987), 1849-1863.
8. To, C. S. W. *The stochastic central difference method in structural dynamics*, Comp. & Struct., Vol. 23, No. 6. (1986).
9. W. Q. Zhu, Y. J. Ren, W. Q. Wu, *Stochastic FEM based on local averages of random vector fields*, J. Engrg. Mech., ASCE, 118(3), (1992), 496-511.