

## 유한요소해석과 B-스플라인 모델링의 연동에 기초한 셸 곡면의 형상 최적 설계

### Shape Optimization of Shell Surfaces Based on Linkage Framework between B-spline Modeling and Finite Element Analysis

김 현 철\*      노 희 열\*      조 맹 효\*\*  
Kim, Hyoncheol   Roh, Hee-Yuel   Cho, Maenghyo

---

#### ABSTRACT

In the present study, a shape design optimization scheme in shell structures is implemented based on the integrated framework of geometric modeling and analysis. The common representation of B-spline surface patch is used for geometric modeling. A geometrically-exact shell finite element is implemented. Control points on the surface are employed as design variables. In the computation of shape sensitivity, semi-analytical method is employed. Sequential linear programming is applied to the shape optimization of surfaces. The developed integrated framework should serve as a powerful tool to design and analysis of surfaces.

---

#### 1. 서      론

최적화는 주어진 구속조건을 만족시키는 최적의 해를 찾기 위한 수학적 도구이다. 소비자의 요구가 다양해지고 산업구조가 점차 복잡해짐에 따라 이러한 수학적 최적화 기법에 대한 수요는 여러 방면에서 높아지고 있다. 구조 설계분야에서도 마찬가지로 축적된 기존의 설계기술에 더하여, 최적화를 도입한 다양한 시도가 이루어지고 있다. 하지만 셸 구조물의 형상설계에 있어서는 막대한 계산비용 때문에 최적설계기법이 널리 사용되고 있지 않다.

유한요소법은 셸 구조물의 해석에 사용되는 보편적인 전산해석방법이다. 현재 통상적으로 적용되는 셸 유한요소해석에서는, CAD의 기하학적인 모델링에서 얻은 셸의 절점 자료가 유한요소 해석 프로그램의 입력자료로 전환된다. 그러나 이러한 구조는 종종 CAD 시스템과 유한요소 해석 모듈간의 상호 연동에 문제를 야기하고, 셸 표면을 나타내기 위해 사용된 보간 함수는 CAD의 자유곡면의 기하학적인 모델링만큼 정확하지 못하다. 심지어 격자를 세분화할 때, 세분화된 격자점들은 CAD 시스템과 유한요소해석 시스템의 상호 연동에서 불필요하게 반복적으로 얻어져야한다. 따라서 추출된 격자점들을 보간해서 셸의 곡면을 근사하는 것보다는 CAD 시스템에 의해 생성된 기하학적인 정보를 직접 이용하는 것이 더 효율적이며 정확하다.

CAD 시스템에 사용되는 기하학적인 모델링(Computer Aided Geometric Design)은 NURBS(Non Uniform

---

\* 서울대학교 기계항공공학부 대학원

\*\* 정희원 · 서울대학교 기계항공공학부 부교수

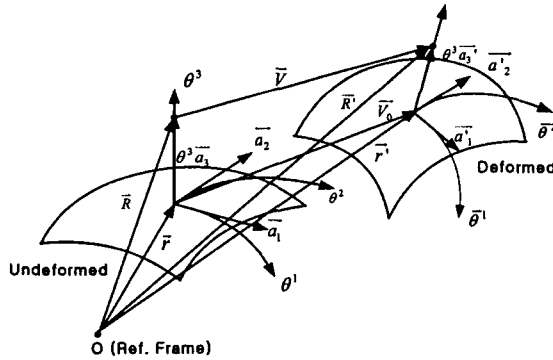


그림 1 변형전과 변형후의 셸의 기하학적 형상

Rational B-Spline) 방법 또는 B-스플라인 방법을 널리 채택하고 있다. 따라서 CAD 시스템에서 얻은 곡면 형상의 기하학적인 모델링을 셸 구조물의 유한요소해석과 직접 연결하고자 한다면 셸 유한요소 해석 처리순서 안에 NURBS 방법을 삽입하여 하나의 해석 프로그램을 만들면 효율적일 것이다. 일반 좌표계에 기초한 셸 유한요소는 이러한 목적에 적합한 요소이다.

일반 좌표계에 기초한 셸 유한요소와 B-스플라인 곡면 표현방법을 기반으로 통합된 설계 프레임워크는 모델링 부분에서 생성한 기하정보를 해석부분에서 그대로 사용하며, 모델이 변형된 후에도 유한요소 격자를 새로 생성하지 않고 기존의 격자를 그대로 사용하므로 일반적으로 여러 차례 반복 시행하는 모델링과 해석에서의 계산비용을 크게 절감할 수 있다. 또한 이를 기반으로 한 최적설계에서는 기하학적 모델링의 조정점을 설계변수로 택함으로써 설계변수의 수를 줄이고 해석 결과를 모델링에 반영할 때 필요한 곡면의 보간을 동시에 수행함으로써 실용적인 최적설계도구를 만들 수 있다.

## 2. Naghdi 셸 이론과 유한요소

### 2.1 Naghdi 셸 이론

일반 곡선좌표계와 텐서에 기초한 셸 이론에서는 일반적으로 변형을 텐서를 다음과 같이 나타낸다.

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta})$$

$$\gamma_\alpha = 2E_{\alpha 3} = (g_{\alpha 3} - g_{\alpha 3}) \quad (1)$$

변형을 텐서를 변형전의 표면 텐서로 나타내기 위해서는 먼저 변형후의 물리량을 변형전의 물리량으로 표현해야한다. 그림 1은 본 연구에서 사용되는 변형전과 변형후의 셸의 기하학적인 형상을 나타낸다. 일반좌표계에 기반을 둔 텐서에 대한 기초는 참고문헌<sup>(1),(2)</sup>에서 확인할 수 있다.

### 2.2 혼합 가정 변형을 범함수

Naghdi 셸에 기초한 유한요소 해석에서 셸의 두께가 얇아짐에 따라 발생하는 잠김현상을 해결하기 위해 가정된 변형률장을 사용하고 잠김을 효과적으로 억제하는 부분 혼합 변분 범함수를 도입한다. 본 연구에서 진단 변형률과 인장 변형률을 변분 변형을 매개변수로 도입한다. 변분 범함수의 자세한 내용은 참고문헌<sup>(3)</sup>을 참조할 수 있다.

### 2.3. 유한요소 정식화

유한요소 정식화를 위한 변위와 변형률 가정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (u_a, w, \psi_a) &= \sum (u_{ai}, w_i, \psi_{ai}) N_i + (u_a, w, \psi_a)_b N_b \\ (\varepsilon_a, \gamma_a) &= (P_1 \vec{\alpha}, P_2 \vec{\beta}) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $N_i$ 는 형상함수,  $N_b$ 는 거품함수 형태의 형상함수이고,  $P_1, P_2, \alpha, \beta$ 는 가정된 변형률장과 그 매개 변수이다. 자세한 내용은 참고문헌<sup>(3)</sup>을 참고할 수 있다.

부분혼합 범함수와 가정된 변형률 매개변수를 이용하여 유한요소 이산화룰 수행하면 이산화된 범함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Pi(\vec{d}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{1}{2} \vec{d}^T K_b \vec{d} - \frac{1}{2} \vec{\alpha}^T H_m \vec{\alpha} + \vec{\alpha}^T G_m \vec{d} - \frac{1}{2} \vec{\beta}^T H_\gamma \vec{\beta} + \vec{\beta}^T G_\gamma \vec{d} - \vec{d}^T \cdot f \quad (3)$$

$$\text{여기서 } K_b = \int_{\Omega} B_b^T D_b B_b \sqrt{ad} \theta^1 d\theta^2, \quad H_m = \int_{\Omega} P_1^T D_m P_1 \sqrt{ad} \theta^1 d\theta^2, \quad G_m = \int_{\Omega} P_1^T D_m B_m \sqrt{ad} \theta^1 d\theta^2$$

$$H_\gamma = \int_{\Omega} P_2^T D_\gamma P_2 \sqrt{ad} \theta^1 d\theta^2, \quad G_\gamma = \int_{\Omega} P_2^T D_\gamma B_\gamma \sqrt{ad} \theta^1 d\theta^2 \text{이고, } \vec{f} \text{는 외력에 의해 요소에 가해지는 하중}$$

벡터,  $\vec{d}$ 는 요소위 자유도 벡터,  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 는 미지 변형률 벡터이다. 문자에 사용한 하첨자  $m, b, \gamma$ 는 각각 멤브레인, 굽힘, 전단 변형을 표시한다.

요소의 자유도 벡터는 절점의 자유도와 일반적인 쉘 곡면의 접평면에서 2개의 곡면의 접선방향 변위( $u_a$ )와 수직변위( $w$ ), 2개의 회전각변위( $\psi_a$ )로 표시된다.

$$\vec{d} = [(u_1, u_2, w, \psi_1, \psi_2)_1, \dots, (u_1, u_2, w, \psi_1, \psi_2)_n, (u_b, u_b, w_b, \psi_b, \psi_b)]^T \quad (4)$$

여기서, 4절점 요소의 경우는  $n=4$ 이다.

$\vec{d}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 에 대한 변분을 취함으로써 다음과 같은 요소 평형 방정식을 얻는다.

$$K^e \vec{d} = \vec{f} \quad (5)$$

여기서 요소 강성 행렬  $K^e$ 는

$$K^e = K_b + G_m^T H_m^{-1} G_m + G_\gamma^T H_\gamma^{-1} G_\gamma \quad (6)$$

### 3. B-스플라인 곡면 표현

개발된 쉘 유한요소와 CAD에서의 기하학적 곡면 모델링의 연동을 위해서 B-스플라인 곡면을 구성해야한다. 본 절에서는 그 방법에 대해 간략히 설명한다. 자세한 내용은 참고 문헌에서 찾을 수 있다.<sup>(4),(5)</sup>

#### 3.1 쉘 곡면의 B-스플라인 보간

B-스플라인 곡선은 다음의 식(7)로 정의 된다.

$$C(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) V_i \quad (7)$$

여기서  $N_{i,p}(t)$ 는 B-스플라인의 기저함수,  $V_i$ 는  $x, y, z$ 로 구성된 조정점 벡터,  $p$ 는 B-스플라인 곡선의 차

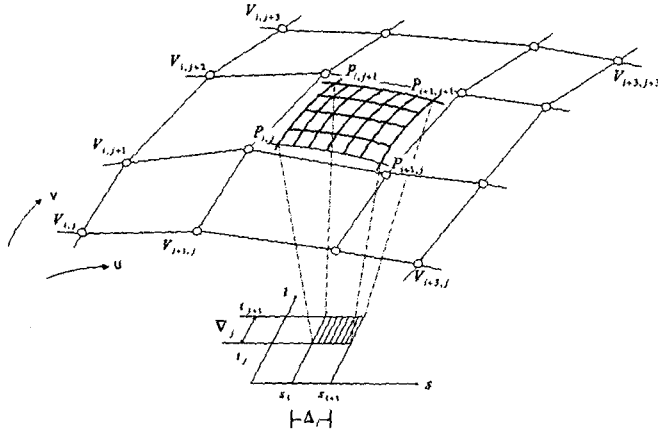


그림 2 쌍 3차 비균일 B-Spline 곡면의 기하학적 형상

수이다.  $[t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n+p}]$ 는 곡선을 따라 분포하는 매개변수  $t$ 의 매듭벡터이다. 곡선의 차수  $p$ 와 조정점의 수  $n+1$ , 매듭의 수  $m+1$ 의 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$m = n + p \quad (8)$$

B-스플라인 기저 함수  $N_{i,p}(t)$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

$$N_{i,p}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p+1} - t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p} - t}{t_{i+p} - t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t) \quad (10)$$

구간  $[t_i, t_{i+1}]$ 는  $i$ 번째 매듭 간격이라 한다. 편의를 위해서 일반적으로  $t_0 = 0, t_n = 1$ 로 둔다. 쌍매개변수 B-스플라인 곡면은 매개변수 B-스플라인 곡선을 확장하여 B-스플라인 곡선의 텐서곱으로 정의한다. 양 방향으로  $(p \times q)$ 의 차수를 가지는 B-스플라인 곡면은 다음과 같이 정의한다.

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n V_{i,j} M_{j,q}(v) N_{i,p}(u), \quad (u_{p-1} \leq u \leq u_{m+1}, v_{q-1} \leq v \leq v_{n+1}) \quad (11)$$

여기서  $(m+1) \times (n+1)$ 개의 조정점  $V_{i,j}$ 는 3차원 공간에 조정점 망을 형성한다.  $N_{i,p}(u), M_{j,q}(v)$ 는 각각  $u, v$ 방향으로  $p, q$  차수에 해당하는 B-스플라인의 기저 함수이다.

### 3.2 B-스플라인 곡면의 생성

이 절에서는 B-스플라인 곡면을 생성하는 순서를 다음과 같이 간단히 설명한다. 그림 2는 쌍 3차 비균일 B-스플라인 곡면 요소를 정의하는 여러 가지 기하학적 성분을 나타낸다. B-스플라인 곡면은 두 개의 직교하는 B-스플라인 곡선의 텐서곱 확장으로 정의한다. 각 방향으로  $d, e$ 의 차수를 가지는 복합 B-스플라인 곡면은 다음과 같이 구성된다.

$$S = \{V_{ij}\} \quad (i=0, \dots, m, j=0, \dots, n) \quad (12)$$

다음은  $(m-d+1) \times (n-e+1)$ 의 B-스플라인 곡면 요소이다. 동질의 곡면 요소 방정식은 행렬의 형태

로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$R_{i,j}^{d,e}(u, v) = UN_u H(N_v)^T V^T, \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (13)$$

여기서  $U = [1, u, u^2, \dots, u^d]$ ,  $V = [1, v, v^2, \dots, v^e]$ ,  $N_u$ 는  $(d+1) \times (d+1)$ ,  $N_v$ 는  $(e+1) \times (e+1)$  크기의 매듭 간격( $\Delta_i, \nabla_j$ )으로 구성된 행렬이다.

## 4. 형상 최적화

### 4.1 목적함수와 민감도

일반적으로 구조역학 문제에 있어서의 목적함수는 강성, 변형 에너지, 무게 등을 말한다. 본 연구에서는 최적화의 목적함수로 변형 에너지를 택했으며, 이는 다음과 같이 표현된다.

$$\min_s \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^M d_i K^{ij} d_j \quad (14)$$

여기서  $s$ 는 설계변수의 집합,  $L, M$ 은 절점의 수,  $d$ 는 변위 벡터,  $K$ 는 강성행렬이다.

본 연구에서는 순차적 선형계획법(Sequential Linear Programming; SLP)을 택했다. 이 방법은 가장 단순하면서도 보편적인 근사 방법으로 알려져 있으며, 다음과 같이 주어진다.<sup>(6)</sup>

$$\text{Minimize } f(x) \quad (15)$$

$$\text{Subject to } g_j(x) \geq 0, \quad j=1, \dots, n_g \quad (16)$$

여기서 (15)식의  $f(x)$ 는 목적함수, (16)식은 구속 방정식이다.

SLP는 시행 초기 변수에서 테일러 급수 전개로부터 구한 선형 근사식으로 목적함수와 구속방정식을 치환하여 사용한다.

$$\text{Minimize } f(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{oi}) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_0}$$

$$\text{Subject to } g_j(x_0) + \sum (x_i - x_{oi}) \left( \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right)_{x_0} \geq 0, \quad j=1, \dots, n_g, \quad a_{li} \leq x_i - x_{oi} \leq a_{ui} \quad (17)$$

마지막 구속 조건식은 “이동한계” 라고 하며,  $a_{li}$ 와  $a_{ui}$ 는 각각  $x_i$ 가 가질 수 있는 아래 끝, 위 끝이다.

전체 조정점 중에서 곡면의 특성을 대표하는 일부를 선별하여, 곡면에 수직한 방향의 좌표를 설계 변수로 택한다. 이는 그 방향의 좌표만으로 곡면의 전체적인 변화 양상을 잘 나타낼 수 있기 때문이다. SLP에서 테일러 급수 전개에 의해 치환된 목적 함수 및 구속 조건 방정식은 설계 변수에 대한 미분을 필요로 한다. 그러나 본 연구에서 목적함수로 택한 변형 에너지는 곡면 조정점의 좌표값을 음함수의 형태로 가지기 때문에, 이를 직접 미분하는 것은 쉽지 않다. 따라서 본 연구에서는 변형 에너지의 미분을 위해 준해석적 방법을 도입한다. 민감도 해석을 위한 준해석적 방법의 예는 참고문헌<sup>(7)</sup>에 나타나 있다.

유한요소법에 사용하는 평형방정식은 다음과 같다.

$$K\vec{d} = \vec{f} \quad (18)$$

이를 설계 변수에 대해 미분하면,

$$K \frac{\partial \vec{d}}{\partial x_i} = - \frac{\partial K}{\partial x_i} \vec{d} \quad (19)$$

여기서  $K$ 는 전역 강성 행렬,  $\vec{d}$ 는 자유도 벡터이다. 식 (14)를 미분하고, 식 (19)를 사용하면 (15)식에 주어진 목적함수  $f(x)$ 의 민감도는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{1}{2} \vec{d}^T K' \vec{d}, \quad K' = \frac{\partial K}{\partial x} = \frac{K(x+\Delta x) - K(x)}{\Delta x} \quad (20)$$

#### 4.2 수치 예제

예제에서의 기하학적 형상은 외부에서 주어지는  $41 \times 41$ 개의 데이터 점으로부터 재구성된다. 이 데이터 점 중에서 형상을 대표하는 선별된  $5 \times 5$ 개의 점으로부터  $7 \times 7$ 개의 조정점을 생성한다. 이렇게 선택된 조정점의 좌표 값을 최적화의 설계 변수가 된다. 선별된 조정점은 다시 유한요소 격자를 구성하는 데 쓰이며, 사용자가 임의로 격자의 간격을 조절할 수 있다.

민감도와 변형 에너지의 계산은 연이어서 얻은 두 상태의 변형 에너지가 일정한 오차내로 수렴할 때까지 반복된다. 이 오차 한계를 조정함으로써 반복 계산의 시간, 즉 최적화의 시간을 조절할 수 있다. 모든 예제에서 탄성계수는  $2 \times 10^6$ , 길이에 대한 두께비는  $1/100$ 으로 주어져 있다.

평판의 중심에 집중하중이 주어질 때, 최대 강성을 가지기 위한 최적 형상을 찾는 형상 최적화 문제이다.<sup>(8),(9)</sup> 예제문제는 평판의 네 변이 지지되어 있는 경우와 네 모서리가 지지되어 있는 경우에 대해서 변형에너지가 최소화되도록 최적화를 수행한다. 구속 조건식은 아래 끝은 0, 위 끝은 평판의 한 변의 길이의  $1/100$ 로 주었다. 목적함수의 계산을 반복 수행함에 따라 평판은 초기 형상에서부터 부풀어 오른다.(그림 3과 5 참조) 최적화를 통해서 목적함수의 값은 첫 번째 예제의 경우  $0.8197$ 에서  $0.3722 \times 10^{-2}$ 으로 줄었으며, 두 번째 예제의 경우  $2.5571$ 에서  $0.9750 \times 10^{-3}$ 으로 감소하였다.(그림 4와 6 참조)

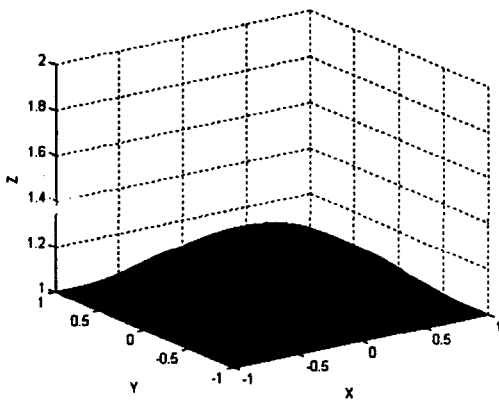


그림 3. 네 변이 고정된 판의 최적화 형상

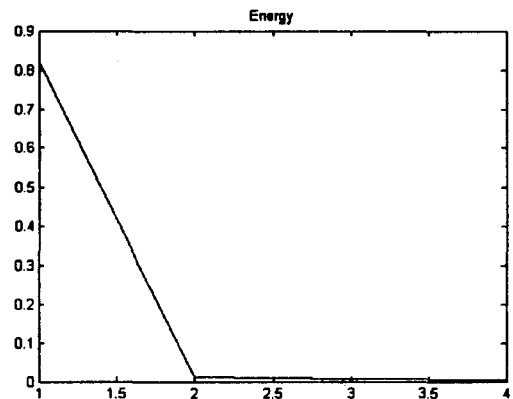


그림 4 반복계산에 따른 변형에너지 값의 변화

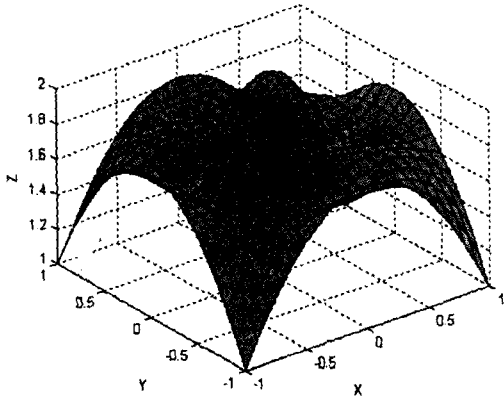


그림 5. 네 모서리가 고정된 판의 최적화 형상

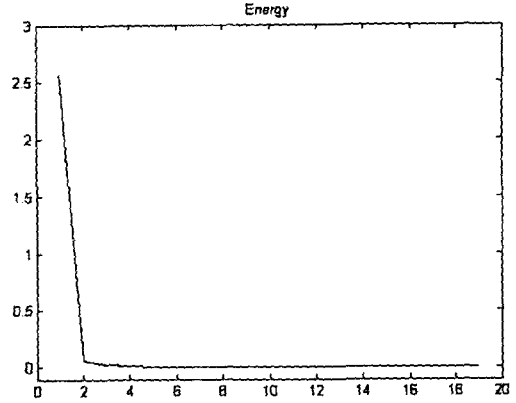


그림 6. 반복계산에 따른 변형에너지 값의 변화

## 5. 결론

본 연구에서는 일반 곡선 좌표계에 기초한 기하학적으로 정확한 쉘 유한요소와 B-스플라인 곡면을 이용한 기하 모델링의 연동 체계를 기반으로 형상 최적화 기능을 구현하였다.

매개화된 쉘 곡면의 일반적인 형태를 생성하기 위해서 쌍 3차 직교 B-스플라인 텐서 곡면 패치를 사용하였다. B-스플라인 함수를 도입함으로써 현재의 일반 좌표계에 기초한 텐서기반 쉘 요소가 임의의 자유 곡면을 다룰 수 있도록 하였다. 매개변수 영역에서 구성된 기하학적으로 정확한 쉘 요소는 컴퓨터 이용 곡면 모델링과 쉘 유한요소 해석의 연동 체계를 가능케 한다.

최적화 부분에서는 최적화의 목적함수, 즉 변형 에너지의 민감도를 구하기 위해서 준해석적 방법을 사용하였다. 최적화의 방법으로는 순차적인 선형계획법을 사용하였다. 주어진 기하 모델의 선택된 조정점의 좌표를 설계 변수로 택하였으며, 이는 기하 모델의 조정을 더욱 용이하게 한다.

본 연구에서 개발된 B-스플라인 곡면에 기초한 기하 모델링, 해석, 최적화 연동 체계는 곡면 통합 설계의 유용한 도구로 구현되었음을 알 수 있다.

## 참고 문헌

1. Naghdi PM, "Foundations of Elastic Shell Theory, Progress in Solid Mechanics 4", Edited by Sneddon, 1963,
2. Green AE, Zerna W., Theoretical Elasticity, 1968
3. Maenghyo Cho, Hee-Yuel Roh, "Development of Geometrically Exact New Shell Elements Based on General Curvilinear Coordinates", International Journal for numerical methods in engineering, Vol.56, No.1,

2003, pp.81-115

4. Farin G., "Curves and surfaces for computer aided geometric design: a practical guide", New York: Academic Press, 1993

5. DeBoor C., "On calculating with B-Splines, Journal of Approximation Theory", Vol.6, No.1, 1972, pp.50-62

6. R. T. Haftka, Z. Gurdal, M. P. Kamat, "Elements of Structural Optimization", Kluwer Academic Publishers, 1990

7. R. Ansola, J. Canales, J.A. Tarrago and J. Rasmussen, "On simultaneous shape and material layout optimization of shell structures", Struc. Multidisc. Optim. Vol.24, 2002, pp.175-184

8. F. Cirak, M. J. Scott, E. K. Antonsson, M. Ortiz, P. Schroeder, "Integrated modeling, finite-element analysis, and engineering design for thin-shell structures using subdivision", Computer-Aided Design, Vol.34, 2002, pp.137-148

9. E. Ramm, K-U. Bletzinger and S. Kimmich, "Strategies in Shape Optimization of Free Form Shells", Nonlinear Comp. Mechanics : State of the Art, 1991, pp.163-192