

# 박판 구조물의 방사 소음에 대한 크기설계 민감도 해석 및 최적 설계

<sup>0</sup>이제원\*, 왕세명\*\*

## Sizing Design Sensitivity Analysis and Optimization of Radiated Noise from a Thin-body

Jeawon Lee and Semyung Wang

### ABSTRACT

There are many industrial applications including thin-body structures such as fins. For the numerical modeling of radiation of sound from thin bodies, the conventional boundary element method (BEM) using the Helmholtz integral equation fails to yield a reliable solution. Therefore, many researchers have tried to solve the thin-body acoustic problems. In the area of the design sensitivity analysis (DSA) and optimization methods, however, there has been just a few study reported. Especially for the thin-body acoustics, however, no further study in the DSA and optimization fields has been reported. In this research, the normal derivative integral equation is adopted as an analysis formulation in the thin-body acoustics, and then used for the sizing DSA and optimization. Since the gradient-based method is used for the optimization, it is important to have accurate gradients (design sensitivities) of the objective function and constraints with respect to the design variables. The DSA formulations are derived through chain-ruled derivatives using the finite element method (FEM) and BEM by using the direct differentiation and continuum variation concepts. The proposed approaches are implemented and validated using a numerical example.

### 1. 서 론

방열판이나 내외부가 서로 뚫린 구조의 판재와 같은 박판 구조물의 음향 해석에 있어서, 이론적으로 가장 간단한 방법이 바로 다영역 경계 요소법(multi-domain BEM)[1]이다. 그러나 다영역 경계 요소법은 상대적으로 가상 평면(imaginary surface)이 넓은 경우에는 계산 효율이 매우 떨어지는 단점이 있다.

반면에 법선 도함수 적분식(normal derivative integral equation)[2]은 개념적으로는 다영역 경계 요소법과 마찬가지로 가상 평면을 구축하지만, 압력과 속도의 연속성을 이용하여 적분 과정에서 이를 고려하지 않게 된다. 간접 변분법(Indirect variational method)[3]도 박판 구조물의 음향 해석에 사용된다. 간접 변분법은 이산화 후에 대칭 행렬을 얻을 수 있다는 장점이 있지만, 이때 이중 면 적분을 수행해야 한다.

소음 분야에서의 설계 민감도 해석에 관한 연구는 구조 분야에 비해 상대적으로 활발하지는 못했다. Coyette 등[4]이 Helmholtz 방정식을 이용한 일반적인 경계 요소법을 기반으로 크기설계 민감도를 유도하였다. 그들은 우선 경계 요소법에 사용되는

\* 삼성전자 DA 연구소 요소기술그룹  
E-mail : jeawon.lee@samsung.com  
Tel : (031) 218-5217, Fax : (031) 218-5195  
\*\* 광주과학기술원 기전공학과

이산화 식을 이용하여 음향 설계 민감도 식을 유도한 후, 이를 NASTRAN 등의 상용 프로그램에서 지원하는 구조 설계 민감도와 연계함으로써 구조물의 크기설계 변수에 대한 광역 음향 설계 민감도를 계산하였다. Cunefare[5]도 마찬가지로의 방법으로 계산되어진 설계 민감도를 이용하여 크기 최적 설계를 구현하였다. Wang과 Lee[6]는 구조 설계 민감도와 음향 설계 민감도를 연속체 법을 이용하여 해석적인 방법으로 계산함으로써 더욱 빠르고 정확한 민감도 계산 방법을 구현하였다. 그러나 이상의 모든 방법들은 기본적으로 일반적인 경계 요소법을 기반으로 하였으므로 박판 구조물 등에는 적용할 수가 없다. Lee와 Wang[7]에 의하여 박판 구조물의 형상 설계 민감도 해석과 최적 설계 기법이 개발되었으나, 아직 크기설계에 대해서는 전혀 연구 결과가 발표된 바가 없다.

본 연구에서는 법선 도함수 적분식을 기본 해석식으로 하여, 박판 구조물의 방사 소음에 대한 구조물의 크기설계 민감도를 해석적인 방법으로 유도하였다. 계산되어진 민감도 해석 결과를 검증하기 위하여 간단한 판재의 소음 방사를 예제로 다루었으며, 이 민감도 결과를 이용하여 최적 설계를 수행하였다.

## 2. 크기설계 민감도 해석

### 2.1 음향 설계 민감도 식

Wu와 Wan은 다음과 같이 법선 도함수 적분식을 유도하였다. [2]

$$\int_S \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} \mu dS + p_i \quad (1)$$

$$= \begin{cases} p(\hat{x}) & \hat{x} \text{ not on } S \\ c(\hat{x})p^+(\hat{x}) + c^0(\hat{x})p^-(\hat{x}) & \hat{x} \text{ on } S \end{cases}$$

$$\frac{\partial p(\hat{x})}{\partial \mathbf{n}_i} = -j\omega\rho v_n(\hat{x}) \quad (2)$$

$$= \int_S \{(\mathbf{n}_i \times \nabla_i G) \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \mu) + k^2(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n})G\mu\} dS + \frac{\partial p_i}{\partial \mathbf{n}_i}$$

이때 음향 설계 민감도 해석을 위한 목적 함수는 식 (3)과 같이 임의의 수음점에서의 음압으로 표현할 수 있다.

$$\Psi = p(\hat{x}) = \int_S (\nabla G \cdot \mathbf{n}) \mu(\hat{y}) dS \quad (3)$$

크기설계 민감도는 목적 함수인 식 (3)에 미분을 취함으로써 구할 수 있다.

$$\Psi' = p'(\hat{x}) = \int_S [(\nabla G \cdot \mathbf{n})' \mu(\hat{y}) + (\nabla G \cdot \mathbf{n}) \mu'(\hat{y})] dS \quad (4)$$

식 (4)에서 Green 함수 G와 경계면의 직교 벡터  $\mathbf{n}$ 은 경계면의 형상과 주파수에만 관계되어진다. 따라서 크기 변화에 대해서는 독립적이므로, 식 (4)는 다음과 같이 간단하게 정리될 수 있다.

$$p'(\hat{x}) = \int_S (\nabla G \cdot \mathbf{n}) \mu'(\hat{y}) dS \quad (5)$$

그러나 식 (5)를 이용하여 임의의 수음점에서의 음압에 대한 크기설계 민감도를 계산하기 위해서는 미지 변수의 미분치인  $\mu'$ 을 알아야 한다. 따라서 음향 설계 민감도를 위해서는 또 하나의 민감도 식이 필요하게 되며, 이 식은 식(2)를 미분함으로써 얻어질 수 있다.

$$-j\omega\rho v_n'(\hat{x}) = \int_S \{(\mathbf{n}_i \times \nabla_i G) \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \mu') + k^2(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n})G\mu'\} dS \quad (6)$$

식 (6)에서 수음점  $\hat{x}$ 은 경계면 상에 존재하고 있다. 따라서 속도의 미분치  $v_n'(\hat{x})$ 는 구조물의 진동 속도에 대한 크기설계 민감도를 의미한다.

## 2.2 구조 설계 민감도 식

구조물의 속도에 대한 크기설계 민감도는 식 (11) 과 같은 구조물의 에너지 변분식으로부터 유도되어진다 [6].

$$b_u(z, \bar{z}) = l_u(\bar{z}) \quad (7)$$

식 (8)과 같이 절점  $\bar{c}$ 에서의 변위를 목적 함수로 정의한 후, 보조 변수법을 이용하여 민감도 식을 유도하면 식 (9)와 같다.

$$\Psi = \int_{\Omega'} \delta(x - \hat{x}) z d\Omega' \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Psi' &= l'_{\bar{c}u}(\lambda) - b'_{\bar{c}u}(z, \lambda) \\ &= \int_{\Omega'} f_u \lambda^* \delta u d\Omega' \\ &+ \int_{\Omega'} [\omega^2 \lambda^* m_u z + j\omega \lambda^* C_u z + \lambda^* A_u z] \delta u d\Omega' \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)에서 보조 변위  $\lambda$  는 식 (10)의 보조식으로부터 계산되어진다.

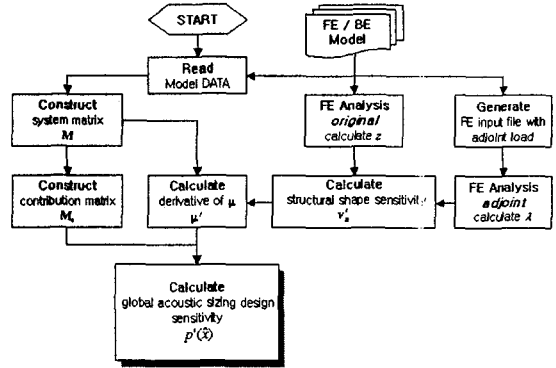
$$\begin{aligned} b_u(\bar{\lambda}, \lambda) &= \int_{\Gamma} \bar{\eta} \lambda^* \mathbf{n} d\Gamma + d(\bar{\eta}, \eta) - \omega^2 \int_{\Gamma} \bar{\eta} \lambda^* \mathbf{n} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega'} \delta(x - \hat{x}) \bar{\lambda} d\Omega' \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)에서 보조 변수  $\lambda$  와  $\eta$  는 각각 구조물의 변위와 음압을 나타낸다. 결국 구조물의 속도에 대한 크기설계 민감도는 식 (7)에서 계산되어진 기본 응답과 식 (10)에서 계산되어지는 보조 응답을 식 (9)에 대입함으로써 계산된다.

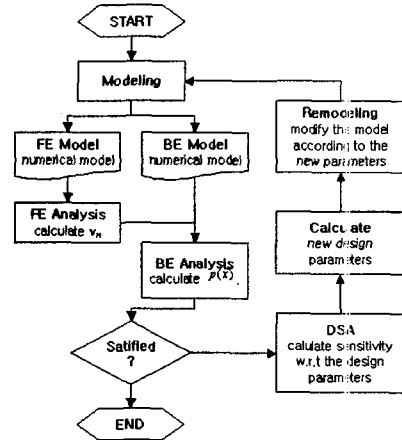
## 2.3 광역 음향 설계 민감도 해석

광역 음향 설계 민감도는 소음 설계 민감도와 구조 설계 민감도를 chain-rule 을 이용하여 연계함으로써 계산되어진다. 본 연구에서는 그림 1 에 보인 바와 같이, 구조해석을 통해 기본 응답과 보조 응답을 계산한 후, 각 해석 결과를 이용하여 구조 설계 민감도를 계산하고, 이를 계산되어진 음향

설계 민감도와 연계하여 광역 크기설계 민감도를 계산할 수 있는 자체 프로그램 *SATA* (sensitivity analyzer for thin-body acoustics)를 개발하였다. 그림 1-(b)는 *SATA* 를 이용하여 최적 설계를 수행하는 과정을 나타내고 있다.



(a) Sizing design sensitivity analysis



(b) Optimization using SPL

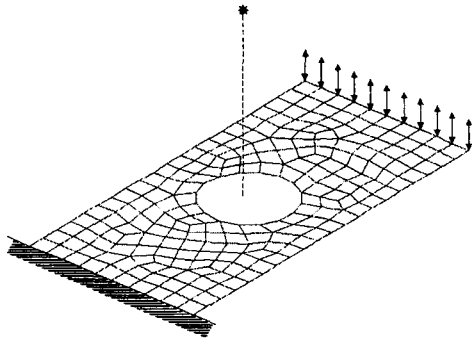
Figure 1. Flow chart of the global acoustic sizing design sensitivity analysis and the optimization procedures

## 3. 수치 예제

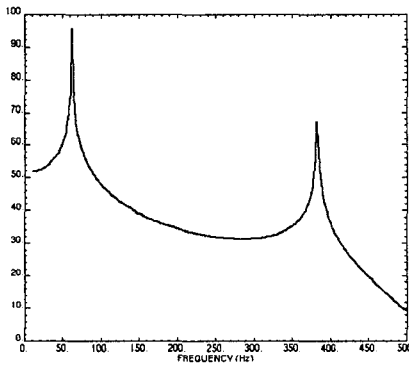
### 3.1 크기설계 민감도 해석

본 연구에서는 제안된 방법을 검증하기 위하여 중간에 구멍을 가지고 있는 단순 평판을 이용하

여 광역 음향 크기설계 민감도를 계산하였다. 경계 조건은 그림 2-(a)와 같이 한쪽 면을 완전히 구속한 상태에서 반대편 모서리에 조화 가진을 주는 것으로 하였으며, 평판 중앙 위에 수음점을 위치시켰다. 전체 모델은 202 개의 요소로 이루어져 있다.



(a) Cantilever plate model



(b) analysis results of the radiated sound [dB]

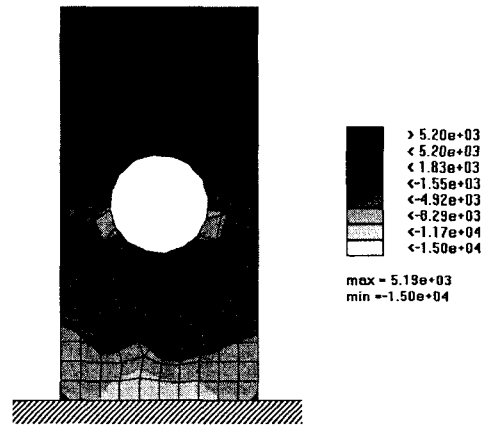
**Figure 2.** Simple model of a cantilever plate with a hole and its acoustic analysis results

(★ - field points, ◀▶ - exciting force)

설계 민감도를 계산하기 전에, NASTRAN 을 이용하여 구조물의 진동 속도를 계산하고, 모델과 속도를 SATA 로 읽어 들여서 수음점에서의 음압을 계산하였으며, 그 결과를 그림 2-(b)에 보였다. 그림에서 알 수 있듯이, 주어진 예제의 경우에는

62Hz 에서 99.2 dB 의 1 차 극치를 가지고 있다. 이 주파수는 구조물의 고유 해석을 통해 확인한 1 차 굽힘 고유 진동수와 일치한다. 따라서 이 주파수에서의 음압을 설계 민감도 해석의 목적 함수로 결정하였으며, 설계 변수는 202 개 요소 각각의 두께로 정의하였다.

설계 민감도 해석을 위하여, 해석 단계에서 계산하였던 기본 응답 외에 보조력 조건 하에서의 보조 응답을 추가로 계산하였으며, 이 결과들을 SATA 에서 읽어 구조 설계 민감도를 계산하였다. 음향 설계 민감도는 모델 데이터를 이용하여 SATA 에서 계산된 행렬식을 이용하여 계산되었으며, 다시 이 둘을 연계하여 202 개의 설계 변수에 대한 광역 음향 크기설계 민감도를 계산하였다.



**Figure 3.** Contour plots of the global acoustic sizing DSA for the plate

그림 3 은 계산되어진 설계 민감도를 나타낸 것이다. 계산된 설계 민감도의 정확성을 확인하기 위하여, 202 개의 설계 민감도 결과 중에서 음과 양 각각에 대해 가장 큰 값을 가지는 두 요소의 결과치를 유한 차분법을 이용한 결과와 비교하였다. 표 1 에서 알 수 있듯이 설계 민감도 해석 결과는 3% 이내의 오차를 가지고 있는 것을 확인하였다.

**Table 1.** Sensitivity verification for the element 25 and 49 of the plate model

Design variable	Perturb. [%]	$\Psi(d + \delta d)$	$\Psi(d - \delta d)$	$\Delta\Psi$ *	$\Psi'$	Accuracy ( $\Psi'/\Delta\Psi$ ) [%]
Elem. 25	1	189.44	176.87	2095	5194.8	40.3
	0.1	184.31	181.27	5067		97.5
Elem. 49	1	166.53	203.01	-6080	-15220.5	40.0
	0.1	179.74	189.17	-15717		103.2

\*  $\Delta\Psi = \frac{\Psi(d + \delta d) - \Psi(d - \delta d)}{2\delta d}$ , central finite difference and  $\Psi'$  is an analytical sensitivity result

### 3.2 최적 설계

앞에서 계산된 설계 민감도를 이용하여 최적 설계를 수행하기 위하여 다음과 같이 최적 설계 식을 구성하였다.

**Minimize** mass of the plate [kg]

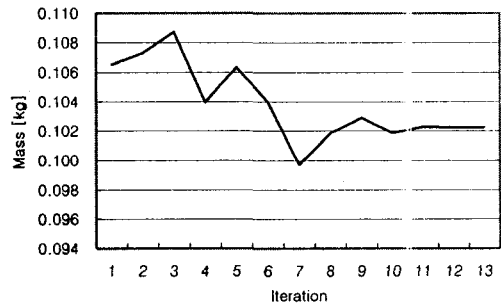
**Subject to** Sound Pressures at 60, 62, 64 Hz must be less than 70 [dB]

**Side constraints**  $0.1 \leq t_i \leq 0.5$  [cm]

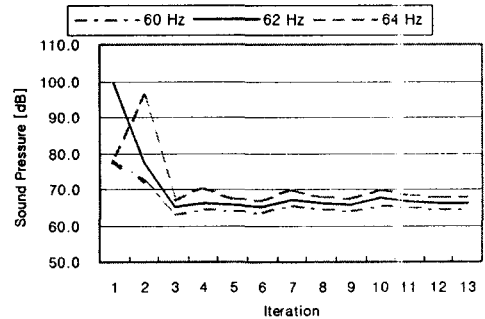
where,  $i = 1$  to 202, number of design variables

최적 설계는 구조물의 질량과 목표 주파수에서의 음압 모두를 줄이는 것을 기본 방향으로 하기 위해, 구조물의 질량을 목적함수로 하고 관심 주파수에서의 음압을 모두 70 dB 이하가 되도록 구속 조건을 주었다. 설계 변수는 202 개 요소 각각의 두께로 하였으며, 초기치가 0.3 cm 임을 고려하여 0.1 ~ 0.5 cm 까지 변할 수 있도록 허용 범위를 설정하였다. 그 결과 SATA 는 13 iterations 만에 최적 해를 찾아 수렴하였다. 그림 4 에는 최적 설계 과정에서의 목적함수 값(질량)과 구속 조건(음압)

의 변화를 보였으며, 초기 모델과 최적 모델의 각 수치들을 표 2 에 보였다.



(a) Objective (mass of the plate)



(b) Constraints (sound pressure [dB])

**Figure 4.** Optimization history

**Table 2.** Initial design and optimum design of the plate

	Objective (mass)	Constraint (sound pressure) [dB]			Design Variable (thickness)
		60 Hz	62 Hz	64 Hz	
Initial Design	0.1065	77.9	99.2	76.5	0.3
Optimum Design	0.1022	64.5	66.2	68.2	0.23 ~ 0.32

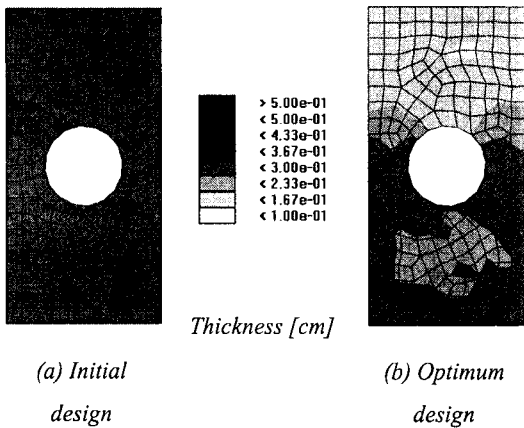


Figure 5. Thickness of the initial design and the optimum design

그림 5 에는 초기 모델과 최적 모델이 크기 변수인 두께를 Cntour 로 나타내었다. 최적해의 경우, 각 요소의 두께가 초기 0.3 cm 에서 0.23~0.32 cm 사이로 바뀌면서 질량이 4% 감소하였으며, 동시에 목표 주파수로 선정하였던 62 Hz 와 상하의 60, 64Hz 모두 70 dB 이하를 만족하였다.

#### 4. 결론 및 고찰

본 연구에서는 범선 도함수 적분식을 기반으로 하여 해석적인 방법으로 광역 음향 크기설계 민감도 식을 유도하였으며, 이 식을 적용하여 최적 설계 프로그램인 SATA 를 개발하였다. 제안된 방법을 검증하기 위하여 단순 평판 모델을 이용하여 설계 민감도 해석과 최적 설계를 수행하였으며, 그 결과로부터 제안된 방법이 충분히 실제 문제에 적용될 수 있다는 판단을 하였다.

다만 이러한 방법을 이용하여 실제 현장에서의 문제를 해결하기 위해서는 몇 가지 고려해야 할 사항이 있다. 우선은 목표 주파수의 선정이다. 여기에는 주파수의 간격과 범위가 모두 해당될 수

있다. 즉 주파수의 간격을 세밀하게 하거나 주파수의 범위를 넓게할 때 보다 좋은 결과를 얻을 수 있을 것이기 때문이다. 그러나 이 경우에는 기술적으로는 아무런 문제가 없지만 계산 시간이 길어진다는 단점이 있다. 그렇다고 주파수 범위를 너무 작게 선정하는 경우에는 소음의 극치가 작아지는 것이 아니라 단순히 옮겨지는 경우가 발생할 수도 있으므로 적절한 주파수 선정에 주의하여야 한다. 마지막으로 민감도 해석이나 최적 설계를 수행하기 전에 모델에 대한 검증이 반드시 선행되어야 함은 당연하다고 할 것이다.

#### REFERENCES

1. A.F. Seybert, C.Y.R. Cheng, T.W. Wu, "A multidomain boundary element solution for silencer and muffler performance prediction", *Journal of Sound and Vibration*, **151**, 119-129 (1991)
2. T.W. Wu, G.C. Wan, "Numerical modeling of acoustic radiation and scattering from thin bodies using a Cauchy principal integral equation", *Journal of Acoustical Society of America*, **92**, 2900-2906 (1992)
3. X.F. Wu, A.D. Pierce, J.H. Ginsberg, "Variational method for computing surface acoustic pressure on vibrating bodies, applied to transversely oscillating disks", *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **OE-12**, 412-418 (1987)
4. J.P.G. Coyette, H. Wynendaele, M. Chargin, "Evaluation of global acoustic sensitivities using a combined finite element / boundary element", *Noise-con 93(INCE/USA)*, Williamsburg, Virginia, 2-5 (1993)
5. K.A. Cunefare, S.P. Crane, S.P. Engelstad, E.A. Powell, "Design Minimization of Noise in Stiffened Cylinders Due to Tonal External Excitation", *Journal of Aircraft*, **36**, 563-570 (1999)
6. S. Wang, J. Lee, "Acoustic Design Sensitivity Analysis and Optimization for Reduced Exterior Noise", *AIAA Journal*, **39**, 574-580 (2001)
7. J. Lee, S. Wang, "Shape design sensitivity analysis for the radiated noise from the thin-body", *Journal of Sound and Vibration*, **261**, 895-910, 2003