

유체로 채워진 강체 실린더에 잠긴 원판의 고유진동 해석 Free Vibration Analysis of a Circular Plate Submerged in a Fluid-filled Rigid Cylinder

° 정경훈* · 최순** · 정명조***

Kyeong-Hoon Jeong, Suhn Choi and Myung-Jo Jung

Key Words : Fluid submerged (물에 잠긴), Circular plate (원판), Free vibration analysis (고유진동해석), Fourier-Bessel series expansion (Fourier-Bessel 급수전개), Offcentered distance (편심거리), Rayleigh-Ritz method (Rayleigh-Ritz 방법).

ABSTRACT

An analytical method for the free vibration of single circular plate submerged in a fluid-filled rigid cylindrical vessel was developed by the Rayleigh-Ritz method based on the Fourier-Bessel series expansion. It was assumed that the plate is clamped at an offcentered location of the cylinder, and the non-viscous incompressible fluid contained in the cylinder is bisected by the plate. It was found that the theoretical results can predict well the fluid-coupled natural frequencies with excellent accuracy comparing with the finite element analysis results. The offcentered distance effect on the natural frequencies was also observed.

1.0 서론

유체와 접촉하는 구조물은 공기중의 고유진동수보다 유체로 인한 부가질량의 증가로 접수구조물의 고유진동수는 감소하게 된다. 이러한 유체-구조물간의 상호 간섭문제는 많은 연구자들이 연구해 오고 있다. 무한유체 위에 떠있는 원판에 대해서는 Kwak [1, 2]이 연구하였고, 유한 깊이를 갖는 유체 위에 떠있는 원판은 Kwak [3]과 Amabili [4]가 연구하였다. Chiba [5]는 유체로 채워진 강체 원통형 바닥에 균일 탄성지지된 원판의 해석을 다루었다. Bauer [6]는 원통형 실린더에 이상유체가 채워있고 상단에 원판이 덮혀 있는 구조물에 대한 해석을 수행하였다. Jeong [7]은 두 원판이 강체 원통 사이에 유체가 채워진 경우의 고유진동 특성을 파악하기 위하여 공기중 모드를 조합하는 Rayleigh-Ritz 방법을 적용한 이론적인 해석방법을 제시하고, 고유진동수를 구한 다음 유한요소 해석으로 검증하였다. 본 논문에서는 단일 원형 평판이 강체 실린더에 고정되고 원판 상하로 유체가 가득 담긴 구조물의 고유진동 해석에 대한 이론을 유도하고 유한요소 해석으로 검증하고자 한다.

2.0 이론 해석

2.1 수식전개

Fig.1은 유체는 유체에 잠긴 단일 원판을 보여주고 있다. 여기서 R 과 h 는 원판의 반경과 두께를

각각 나타낸다. 그리고 H_1 과 H_2 는 상부 및 하부의 유체 높이를 각각 나타낸다. 이론해석을 위하여 다음과 같이 가정하였다. (a) 유체의 운동이 매우 작아서 선형으로 취급할 수 있다. (b) 유체는 비압축성, 비점성 그리고 비회전성의 이상유체다. (c) 원판의 동적거동은 선형탄성 범위 내에 있다. (d) 중력의 영향은 무시할 수 있다.

유체와 접하는 원판의 상하방향 변위 w 에 대한 운동방정식은 다음 식으로 나타낸다.

$$D \nabla^4 w + \rho h w_{,tt} = \sum_{j=1}^2 p_j \quad (1)$$

여기서 $D = E h^3 / 12 (1 - \mu^2)$ 는 원판의 강성도이며, ρ, μ, p_j 및 E 는 판의 밀도, Poisson 비, 원판에 작용하는 유체압력, 그리고 탄성계수를 각각 나타낸다. 그리고 수식에서 첨자 1은 상부 유체를 나타내고 2는 하부 유체를 나타낸다. 식(1)의 미분방정식 해는 극좌표 (r, θ) 에 대하여 원판의 공기중 변위의 조합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w(r, \theta, t) = \cos(n\theta) \sum_{m=1}^M q_m W_{nm}(r) \exp(i\omega t) \quad (2)$$

여기서 q_m 은 미정계수이고 n 은 절점직경 (nodal diameter)의 수를 나타낸다. 원판이 고정단 경계조건을 갖는 경우, $r = R$ 에서 변위가 영이 되어야 하므로 원판의 동적변위에 대한 식을 얻을 수 있다.

$$W_{nm}(r) = J_n(\lambda_{nm} r) - J_n(\lambda_{nm} R) I_n(\lambda_{nm} r) / I_n(\lambda_{nm} R) \quad (3)$$

여기서 ω 와 λ_{nm} 은 원판의 공기중 고유진동수와 주파수 파라미터를 나타낸다. J_n 와 I_n 는 각각 제 1

* 한국원자력연구소, 정희원, Tel. (042) 868-8792
E-mail : khjeong@kaeri.re.kr

** 한국원자력연구소, 정희원.

*** 한국원자력안전기술원, 정희원.

종 Bessel 함수와 1종 수정 Bessel 함수다. 첨자 m 은 공기중 진동모드의 절점원(nodal circle)의 수를 나타내고 접수진동 모드에서는 반경방향 진동모드 전개항을 나타낸다. 원판이 고정단을 갖는 경우, $r = R$ 에서 기울기도 영이 되어야 하므로 식(4)로부터 λ_{nm} 값을 얻을 수 있다.

$$J_n(\lambda_{nm} R)I_{n+1}(\lambda_{nm} R) + J_{n+1}(\lambda_{nm} R)I_n(\lambda_{nm} R) = 0 \quad (4)$$

2.2 속도 포텐셜 (Velocity Potential)

원판과 강체 실린더로 둘러싸인 상부 및 하부의 이상유체 운동은 속도포텐셜의 Laplace 방정식으로 나타난다.

$$\nabla^2 \Phi_j(x, r, \theta, t) = 0 \quad (5)$$

식(5)의 속도포텐셜은 변수분리를 이용하면 식(6)으로 나타낼 수가 있다.

$$\Phi_j(x, r, \theta, t) = i\omega \phi_j(r, \theta, x) \exp(i\omega t) \quad (6)$$

식(6)을 적용하면 식(5)의 일반해는 식(7)로 나타난다.

$$\phi_j(r, \theta, x) = \cos(n\theta) \sum_{s=1}^{\infty} J_n(\beta_{ns} r) \left\{ \begin{array}{l} E_{nsj} \sinh(\beta_{ns} x) \\ + F_{nsj} \cosh(\beta_{ns} x) \end{array} \right\} \quad (7)$$

그런데 강체 실린더 벽에서 반경방향의 유속은 영이 되어야 하므로 식(8)을 얻을 수 있다.

$$\partial \phi_j / \partial r \Big|_{r=R} = 0 \quad (8)$$

식(8)에 식(7)을 대입하면 계수 β_{ns} 를 모두 구할 수 있는 식(9)를 얻는다.

$$J_n'(\beta_{ns} R) = 0 \quad (9)$$

한편 강체 실린더의 바닥에서 유체 경계조건식은 다음과 같이 나타난다.

$$\text{상부 유체에 대하여 } \partial \phi_1(r, \theta, H_1) / \partial x = 0, \quad (10)$$

$$\text{하부 유체에 대하여 } \partial \phi_2(r, \theta, -H_2) / \partial x = 0. \quad (11)$$

식 (10)과 (11)의 유체 경계조건을 적용한 속도포텐셜은 결국 다음 식으로 나타난다.

$$\begin{aligned} \phi_1(r, \theta, x) &= \cos(n\theta) \sum_{s=1}^{\infty} E_{ns1} J_n(\beta_{ns} r) \\ &\times \{ \sinh(\alpha_{ns} x) - \cosh(\alpha_{ns} x) / \tanh(\alpha_{ns} H_1) \}, \quad (12a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2(r, \theta, x) &= \cos(n\theta) \sum_{s=1}^{\infty} E_{ns2} J_n(\beta_{ns} r) \\ &\times \{ \sinh(\alpha_{ns} x) + \cosh(\alpha_{ns} x) / \tanh(\alpha_{ns} H_2) \}. \quad (12b) \end{aligned}$$

2.3 해석 방법

원판과 유체가 만나는 접수면에서 연직방향의 유속은 동일해야 하므로 다음 식을 얻을 수 있다.

$$w = \partial \phi_1 / \partial x \Big|_{x=0}, \quad (13a)$$

$$w = \partial \phi_2 / \partial x \Big|_{x=0}. \quad (13b)$$

식(2)와 (3) 및 식(12a)와 (12b)를 식(13a)와 식(13b)에 대입하면 식(14a)와 (14b)를 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M q_m [J_n(\lambda_{nm} r) - I_n(\lambda_{nm} r) J_n(\lambda_{nm} R) / I_n(\lambda_{nm} R)], \\ = \sum_{s=1}^{\infty} E_{ns1} \beta_{ns} J_n(\beta_{ns} r), \quad (14a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M q_m [J_n(\lambda_{nm} r) - I_n(\lambda_{nm} r) J_n(\lambda_{nm} R) / I_n(\lambda_{nm} R)], \\ = \sum_{s=1}^{\infty} E_{ns2} \beta_{ns} J_n(\beta_{ns} r). \quad (14b) \end{aligned}$$

그런데 식(14a)과 식(14b)의 Bessel 함수 $J_n(\lambda_{nm} r)$ 과 $I_n(\lambda_{nm} r)$ 을 Bessel-Fourier 급수전개로 전개하면 식(15a)와 (15b)를 얻는다[7, 8].

$$J_n(\lambda_{nm} r) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{nms} J_n(\beta_{ns} r), \quad (15a)$$

$$I_n(\lambda_{nm} r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{nms} J_n(\beta_{ns} r). \quad (15b)$$

여기서,

$$\begin{aligned} a_{nms} &= \frac{2(\lambda_{nm} R)(\beta_{ns} R)^2 J_n'(\lambda_{nm} R)}{\{(\beta_{ns} R)^2 - (\lambda_{nm} R)^2\} \{(\beta_{ns} R)^2 - n^2\} J_n(\beta_{ns} R)}, \\ b_{nms} &= \frac{2(\lambda_{nm} R)(\beta_{ns} R)^2 I_n'(\lambda_{nm} R)}{\{(\beta_{ns} R)^2 + (\lambda_{nm} R)^2\} \{(\beta_{ns} R)^2 - n^2\} J_n(\beta_{ns} R)}. \end{aligned} \quad (16a, b)$$

따라서 속도포텐셜은 계수 E_{nsj} 대신 미정계수 q_m 으로 각각 나타낼 수가 있다.

$$\phi_j(r, \theta, x) = \cos(n\theta) \sum_{m=1}^M q_m \sum_{s=1}^{\infty} A_{nms} J_n(\beta_{ns} r)$$

$$\times \{ \sinh(\beta_{ns} x) - \cosh(\beta_{ns} x) / \tanh(\beta_{ns} H_1) \}, \quad (17a)$$

$$\phi_2(r, \theta, x) = \cos(n\theta) \sum_{m=1}^M q_m \sum_{s=1}^{\infty} A_{nms} J_n(\beta_{ns} r) \\ \times \{ \sinh(\beta_{ns} x) + \cosh(\beta_{ns} x) / \tanh(\beta_{ns} H_2) \}. \quad (17b)$$

여기서,

$$A_{nms} = \frac{4 R (\beta_{ns} R) (\lambda_{nm} R)^3 J_n'(\lambda_{nm} R)}{[(\beta_{ns} R)^2 - n^2] [(\beta_{ns} R)^4 - (\lambda_{nm} R)^4]} J_n(\beta_{ns} R) \quad (18)$$

수치해석을 수행할 경우, 전개항 m 을 충분히 큰 값 M 까지 고려하기 위하여 미정계수 벡터 \mathbf{q} 을 정의하면 다음과 같다.

$$\mathbf{q} = \{ q_1 \quad q_2 \quad q_3 L \quad L \quad q_m \}^T \quad (19)$$

계의 고유진동수를 계산하려면 원판 및 유체의 운동에너지를 계산해야 한다. 먼저 유체의 운동에너지를 계산하면 식(20)이 된다.

$$T_F = -\frac{1}{2} \rho_o \kappa_\theta \left[\int_0^R w \phi_1(r, 0) r dr + \int_0^R w \phi_2(r, 0) r dr \right] \quad (20)$$

여기서 $n = 0$ 일 때 $\kappa_\theta = 2\pi$ 이고, $n > 0$ 일 때 $\kappa_\theta = \pi$ 이다. 식(20)에 식(2), 식(3), 그리고 식(17)을 대입하면 유체의 운동에너지는 다음 식으로 나타난다.

$$T_F = \rho_o \kappa_\theta \mathbf{q}^T \mathbf{G} \mathbf{q}. \quad (21)$$

원판의 운동에너지는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_d = \frac{\rho h \kappa_\theta}{2} \int_0^R w^2 r dr. \quad (22)$$

식(22)에 식(2)를 대입하면 원판의 운동에너지는 식(23)과 같이 나타낼 수 있으며 동일한 방법으로 원판의 포텐셜에너지도 식(24)와 같이 나타낼 수 있다.

$$T_d = \rho h \kappa_\theta \mathbf{q}^T \mathbf{Z} \mathbf{q}. \quad (23)$$

$$V_d \approx \kappa_\theta D \int_0^R (\nabla^2 w)^2 r dr = \kappa_\theta \mathbf{q}^T \mathbf{P} \mathbf{q}. \quad (24)$$

여기서 \mathbf{G} , \mathbf{Z} , \mathbf{P} 는 수식을 정리하여 유도되는 행렬이다. 식(21), (23) 및 (24)로부터 미정계수 q_m 에

대하여 Rayleigh 지수 $V_d / (T_d + T_F)$ 를 최소화시키는 고유치 행렬식 (25)를 구할 수 있으며 이 식으로부터 유체로 연성된 원판의 고유진동수를 얻을 수 있다.

$$\{ \mathbf{P} - \omega^2 (\rho h \mathbf{Z} + \rho_o \mathbf{G}) \} \mathbf{q} = \{ 0 \} \quad (25)$$

3.0 계산에 및 고찰

3.1 수치해석 모델

고정된 원판이 반경방향으로 갈혀 있는 이상유체로 연성될 때, 고유진동수를 2.3 절에서 제시된 절차에 따라서 구할 수가 있다. 이 이론적인 방법의 타당성을 확인하기 위하여 상용 유한요소해석 코드인 ANSYS 6.1 을 이용하여 축대칭 유한요소 해석모델을 만들어 해석을 수행하였다. 해석에 사용된 원판은 알루미늄 재질로 되어 있다고 가정하였다. 이 원판의 반경은 120 mm 이고 두께는 2 mm 이며, 물성치는 다음과 같다: 탄성계수 = 69.0 GPa, Poisson 비 = 0.3, 밀도 = 2700 kg/m³. 원판 상하에 채워지는 유체는 물로서 밀도가 1000 kg/m³ 이다. 원판이 강체 실린더와 만나는 경계조건은 고정단으로 가정하였다. 유한요소 해석모델은 축대칭 조화 유체요소 (FLUID81)와 축대칭 조화 탄성 쉘요소 (SHELL61)로 구성되었다. 유체요소 절점은 강체 실린더 벽에서 반경방향의 변위만을 구속하였고 실린더 상하벽에서는 상하방향의 변위만 구속하였다. 그리고 원판과 접촉하는 유체의 절점이 원판의 절점과 연직방향으로만 같이 움직일 수 있도록 연성시켰다. 이것은 식(13a)와 (13b)를 모사하게 된다. 두 원판사이의 거리는 $H_1 = 60$ mm, $H_2 = 20$ mm 인 경우, 유한요소 해석모델은 Fig.2 에서 보는 바와 같이 1536 (48 × 32)개의 유체요소와 48 개의 쉘요소로 이루어져 있다.

3.2 이론의 검증 및 결과

Table 1 은 유한요소 해석 및 이론해석 결과를 보여주고 있다. 이론해석 계산에서 Bessel-Fourier 급수전개의 수렴성을 조사하여 수렴 속도가 빠르다는 것을 확인하였고 따라서 충분히 큰 급수전개항을 계산에서 사용하였다. Bessel-Fourier 급수전개항 s 는 200 을 취하여 해가 충분히 수렴하도록 하였다. Rayleigh-Ritz 방법을 적용할 때 공기중의 모드를 중첩시키는데 m 에 충분히 큰 값 40 을 취하여 계산하였다. Table 1 에서 보는 바와 같이 이론치 고유진동수와 유한요소 해석결과가 $n = 0$, $m = 1$ 인 모드를 제외하고 상당히 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있었다. 고유진동 모드 중에서 $n = 0$ 이고 $m = 0$ 인 모드는 관찰할 수 없는데 그 이유는 물리적으로 이 모드가 유체질량의 보존에 위해

되기 때문이다.

원판에 미치는 유체의 영향을 정량화하기 위하여 유체와 접하는 원판의 고유진동수를 이 모드에 해당되는 공기중 고유진동수로 나누어 정규화 고유진동수(normalized natural frequency)를 정의할 때, 이 정규화 고유진동수는 유체의 부가질량(added mass)의 영향으로 항상 1과 0 사이의 값을 갖는다는 것은 잘 알려진 사실이다. 일반적으로 모드수가 증가하면 유체와 접하는 구조물에서 정규화 고유진동수는 증가하게 된다. Fig.3은 모드 증가에 따른 정규화 고유진동수의 변화를 나타내고 있다. 여기서 알 수 있듯이 반경방향 모드수(m')가 증가할 경우나 모드의 절선 수(n)가 증가하면 정규화 고유진동수는 증가한다. 즉 모드수가 증가할 때 유체의 부가질량의 영향이 점차 감소하는 것을 보여준다. Fig.4와 Fig.5는 편심도에 따른 정규화 고유진동수의 변화를 보여준다. 여기서 편심도(Off-center factor)는 다음 식으로 정의하였다.

$$\eta = \frac{|H_1 - H_2|}{H_1 + H_2} \quad (26)$$

Fig. 4와 Fig.5에서 보는 바와 같이 편심도가 증가함에 따라서 즉 원판이 강체 실린더의 바닥에 가까워지면 고유진동수가 급격하게 감소함을 알 수 있다. 그리고 저차 모드의 경우에 고유진동수의 감소가 서서히 진행되지만 원주방향 모드수 (m')가 늘어나면 높은 편심도에서 급격하게 고유진동수가 감소한다는 것을 확인할 수 있다.

4.0 결론

본 논문은 물로 잠긴 원판에 대한 고유진동수를 구하는 해석방법을 제시하였다. 그리고 유체와 연성된 이 구조물의 동적특성을 고찰하였다. 이 방법을 타당성을 확인하기 위하여 원판의 경계조건이 고정된 경우에 대하여 고유진동수를 이론적으로 구하고 상용 컴퓨터 코드로 검증하였다. 이론값의 고유진동수와 유한요소 해석결과로 얻은 고유진동수가 $n=0$ 인 경우 저차 모드를 제외하고는 매우 잘 일치하였다. 편심거리가 증가하여 원판이 실린더의 바닥에 접근하면 유체의 양은 동일하더라도 원판사이의 연성효과는 증가하게 되어 고유진동수가 급격히 감소하게 됨을 확인하였다.

참고문헌

1. Kwak, M. K., 1991, "Vibration of circular plates in contact with water," *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, pp.480-483.
2. Kwak, M. K. and Kim, K. C. 1991, "Axisymmetric vibration of circular plates in contact with fluid,"

Journal of Sound and Vibration, Vol. 146, pp.381-389.

3. Kwak, M. K. and Han, S. B., 2000, "Effect of fluid depth on the hydroelastic vibration of free-edge circular plate," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 230, pp.171-185.
4. Amabili, M., 1996, "Effect of finite fluid depth on the hydroelastic vibrations of circular and annular plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 193, pp. 909-925.
5. Chiba, M., 1994, "Axisymmetric free hydroelastic vibration of a flexural bottom plate in a cylindrical tank supported on an elastic foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 169, pp. 387-394.
6. Bauer, H. F., 1995, "Coupled frequencies of a liquid in a circular cylindrical container with elastic liquid surface cover," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 180, pp.689-704.
7. Jeong, K. H., 2003, "Free vibration of two identical circular plates coupled with bounded fluid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 260, pp.553-670.
8. Sneddon, I. N., 1951, *Fourier Transforms*, New York; McGraw-Hill; p.82.

후 기

본 연구는 과학기술부 원자력연구개발사업의 일환으로 수행되었음.

Table 1. Comparison of FEM and theoretical natural frequencies for a circular plate submerged in a fluid ($H_1=60$ mm, $H_2=20$ mm).

Mode	Natural Frequency (Hz)		Error (%)	
	n	m'		
0	1	320.0	346.6	8.31
	2	1045.4	1086.7	3.95
	3	2244.7	2275.1	1.35
	4	3954.4	3973.2	0.48
1	0	123.3	123.3	0.00
	1	620.0	619.7	-0.05
	2	1573.7	1571.3	-0.15
	3	3022.3	3014.5	-0.26
2	0	296.3	296.4	0.03
	1	1004.7	1004.2	-0.05
	2	2193.1	2190.1	-0.14
	3	3894.5	3885.3	-0.24
3	0	529.0	529.1	0.02
	1	1464.0	1463.6	-0.03
	2	2895.8	2892.7	-0.11
	3	4856.1	4846.3	-0.20

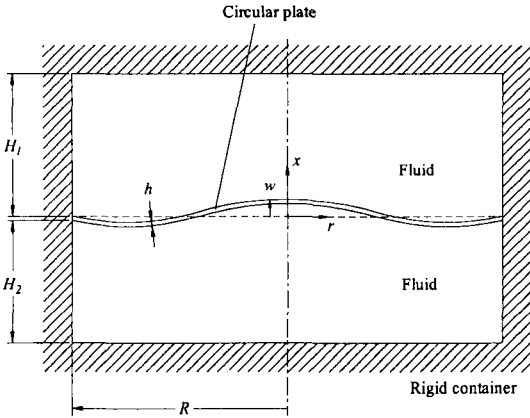


Fig. 1 A circular plate submerged in a fluid-filled rigid cylinder.

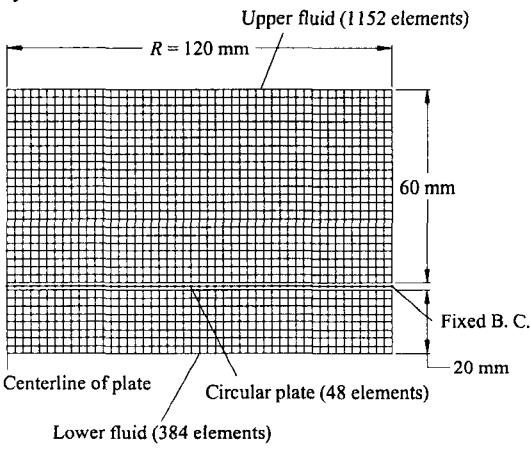


Fig. 2 Axisymmetric finite element model of a plate submerged in a fluid

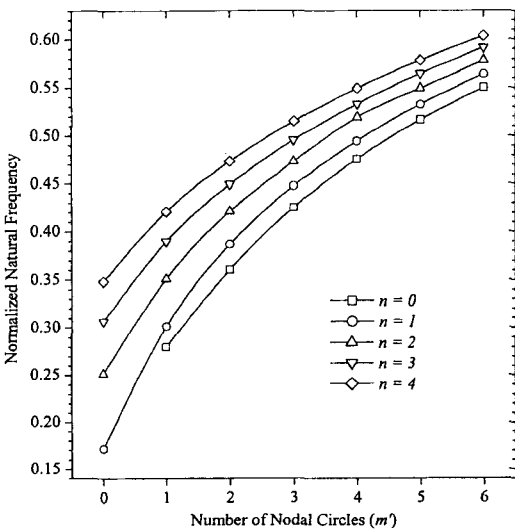


Fig. 3. Normalized natural frequency for $H_1=60$ mm and $H_2=20$ mm

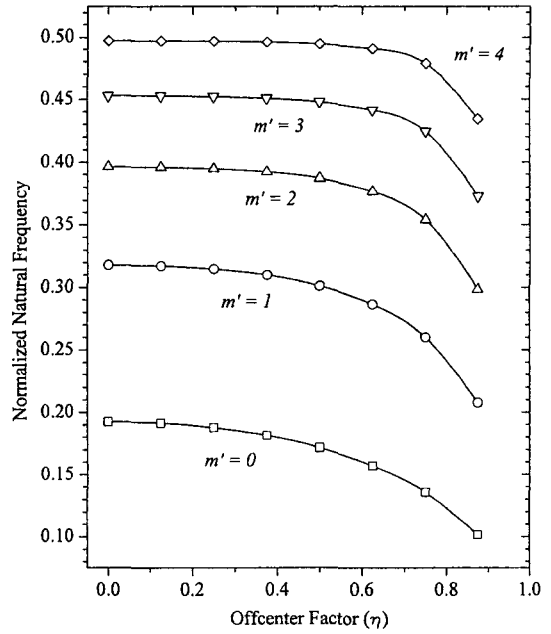


Fig. 4 Offcenter effect on normalized natural frequency for $n=1$

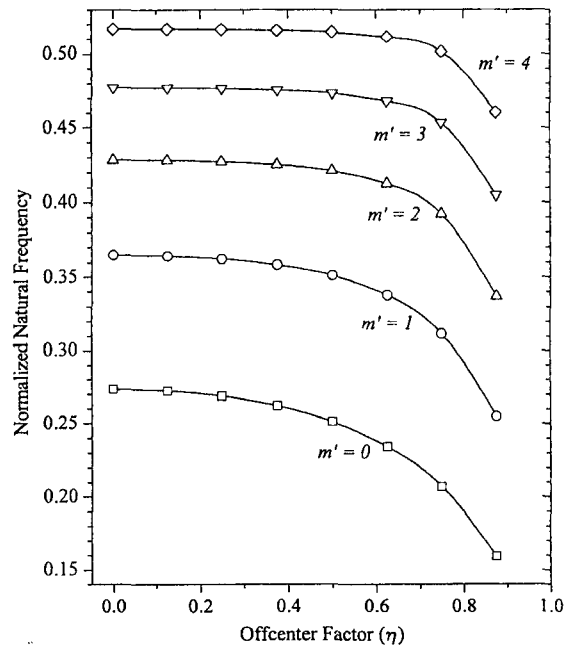


Fig. 5 Offcenter effect on normalized natural frequency for $n=2$