

회전관성 및 전단변형을 고려한 변단면 포물선 아치의 자유진동 Free Vibrations of Tapered Parabolic Arches Considering Rotatory Inertia and Shear Deformation

오 상 진* · 박 광 규* · 최 규 문** · 이 중 국***

Sang Jin Oh, Kwang Kyou Park, Kou Moon Choi and Jong Kook Lee

Key Words : tapered arch(변단면 아치), parabolic arch(포물선 아치), free vibration(자유진동), natural frequency(고유진동수), rotatory inertia(회전관성), shear deformation(전단변형)

ABSTRACT

The differential equations governing free, in-plane vibrations of non-circular arches with non-uniform cross-section, including the effects of rotatory inertia, shear deformation and axial deformation, are derived and solved numerically to obtain frequencies. The lowest four natural frequencies are calculated for the prime parabolic arches with hinged-hinged, hinged-clamped, and clamped-clamped end constraints. Three general taper types for rectangular section are considered. A wide range of arch rise to span length ratios, slenderness ratios, and section ratios are considered. The agreement with results determined by means of a finite element method is good from an engineering viewpoint.

1. 서 론

구조물의 고유한 성질 중의 하나인 자유진동 특성은 동하중이 작용하는 구조물의 동적응답 해석시 매우 중요한 변수이며, 구조물의 설계과정 또는 공용 중인 구조물의 안정성 평가 등에서도 중요한 평가지수로 이용되고 있다. 따라서 대상구조의 정확한 자유진동 특성을 파악하는 것은 진동공학 분야에서 가장 먼저 선행되어야 할 연구과제 중의 하나이다.

1928년 Den Hartog가 Rayleigh-Ritz method를 이용하여 등단면 원호아치의 자유진동에 관한 논문⁽¹⁾을 발표한 이래 많은 연구자들에 의해 아치의 자유진동에 관한 활발한 연구가 이루어지고 있다. 그러나 이들 대부분의 연구에서는 회전관성 및 전단변형을 고려하지 않은 Bernoulli-Euler 보 이론, 회전관성만을 고려한 Rayleigh 보 이론을 적용하였다. Bernoulli-Euler 보 이론이나 Rayleigh 보 이론은 일반적으로 공학문제를 해석하는데 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있는 이론이라고 알려져 있다. 그러나 지간길이에 비해 아치단면

이 큰 경우 즉 세장비가 작은 경우나, 고차모드까지 정확한 해석이 요구되는 경우 이들 이론에 의한 결과는 많은 오차를 포함하게 된다. 따라서 세장비가 작은 아치구조 또는 고차모드까지 정확한 고유진동수 및 진동형이 요구되는 경우에는 회전관성 및 전단변형을 고려한 Timoshenko 보 이론을 적용한 해석이 요구된다.

교량, 댐구조, 아치뱀대구조 등 실제 구조물에는 변화단면을 갖는 아치가 이용⁽²⁾되고 있어, 변화단면을 갖는 아치의 정확한 고유진동수 및 진동형을 산출하기 위해 Timoshenko 보 이론을 적용한 연구가 필요할 것으로 판단된다.

이러한 연구배경으로 본 연구에서는 회전관성 및 전단변형을 고려한 변단면 포물선 아치의 자유진동 특성을 고찰하고자 한다. 이를 위해 Timoshenko 보 이론을 적용하여 변단면 변화곡률 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 유도된 지배방정식에 포물선 아치를 적용하여 수치해석함으로써 대상 구조의 고유진동수를 산출하고자 한다.

2. 수학적 모형

Fig. 1은 아치 정부를 기준으로 좌우대칭인 변단면 포물선 아치의 기하학적 형상과 제변수를 나타낸 것이다. 이 그림에서 l , h 및 α 는 각각 아치 지간길이, 높이 및 중심각이며, A 및 I 는 아치축상 임의점 (x, y) 에서의 단면적과

† 담양대학 토목과
E-mail : sjoh@damyang.ac.kr
Tel : (061) 380-8502, Fax : (061) 381-9100

* 대전대학교 토목공학과

** 백두 Plant

*** COMES기술단

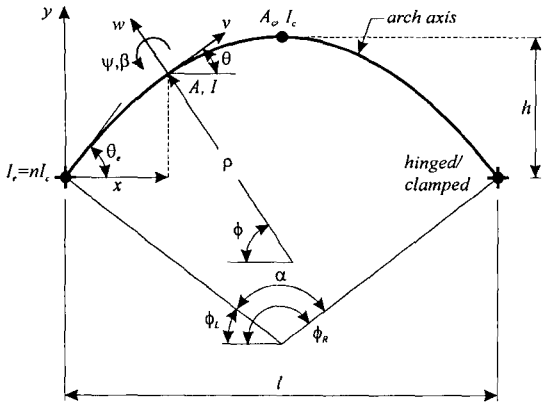


Fig. 1 Arch geometry and variables.

단면2차모멘트이다. 아치 정부에서 단면적과 단면2차모멘트는 각각 A_c 및 I_c 로 표시하였으며, 아치단부에서 단면2차모멘트는 I_e 로서 표시되어 있다. 한편 ρ , ϕ 및 θ 는 각각 아치축상 임의점 (x, y) 에서의 곡률반경, 곡률중심방향과 수평축이 이루는 각도 및 아치축의 접선각을 의미한다. 또한 w 및 v 는 각각 곡률중심방향 및 접선방향 변위이며, ϕ 와 β 는 각각 순수회전에 의한 단면회전각과 전단변형률이다.

아치축상 임의점에서의 단면적 및 단면2차모멘트를 아치 정부에서의 단면적과 단면2차모멘트를 기준으로 ϕ 에 관한 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$A = A_c F(\phi) = A_c F \quad (1)$$

$$I = I_c H(\phi) = I_c H \quad (2)$$

Fig. 2는 아치가 면내 진동하는 경우 아치 미소요소에 작용하는 힘들을 나타낸 것이다. 아치가 면내 진동하게 되면 진동변위에 의하여 아치단면에는 축방향력 N , 전단력 Q 및 휨모멘트 M 의 합응력이 발생한다. 또한 질량을 가지고 있는 아치가 진동함으로써 아치 미소요소에는 곡률중심방향 관성력 P_r , 접선방향 관성력 P_t , 및 회전관성우력 T 가 발생한다. 아치 미소요소에 작용하는 이들 합응력과 관성력의 동적평형방정식을 세우면 다음과 같다.

$$\frac{dN}{d\phi} + Q - \rho P_t = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dQ}{d\phi} - N - \rho P_r = 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dM}{d\phi} - Q + T = 0 \quad (5)$$

진동시 부재단면에 발생하는 휨모멘트 M 및 축방향력 N 을 변위함수로 표현하면 다음과 같다.⁽³⁾

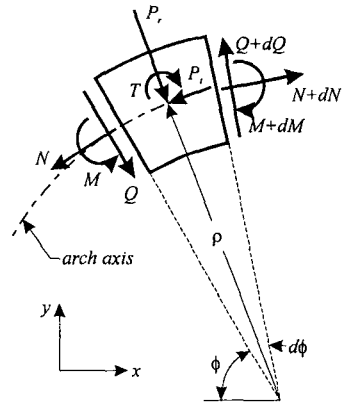


Fig. 2 Loads on an arch element.

$$M = -\frac{EI}{\rho} \frac{d\phi}{d\phi} = -\frac{EI_c H}{\rho} \frac{d\phi}{d\phi} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} N &= \frac{EA}{\rho} \left(\frac{dv}{d\phi} + w \right) + \frac{EI}{\rho^2} \frac{d\phi}{d\phi} \\ &= \frac{EA_c F}{\rho} \left(\frac{dv}{d\phi} + w \right) + \frac{EI_c H}{\rho^2} \frac{d\phi}{d\phi} \end{aligned} \quad (7)$$

식 (6), (7)에서 E 는 부재재료의 탄성계수이다.

전단변형을 고려하는 경우 전단력은 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} Q &= kAG\beta = \frac{kAG}{\rho} \left(\frac{dw}{d\phi} - v - \rho\psi \right) \\ &= \frac{kA_c FG}{\rho} \left(\frac{dw}{d\phi} - v - \rho\psi \right) \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)에서 G 와 k 는 각각 부재재료의 전단탄성계수 및 단면형상에 따른 상수이다.

아치가 면내에서 조화진동을 한다고 가정하면 아치 미소요소에 발생하는 곡률중심방향 및 접선방향 관성력과 회전관성우력은 식 (9)~(11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_r = -\gamma A \omega^2 w = -\gamma A_c F \omega^2 w \quad (9)$$

$$P_t = -\gamma A \omega^2 v = -\gamma A_c F \omega^2 v \quad (10)$$

$$T = -\gamma I \omega^2 \psi = -\gamma I_c H \omega^2 \psi \quad (11)$$

위의 식에서 γ 는 부재재료의 밀도, ω 는 고유각진동수 (rad/s)이다.

지배 미분방정식을 무차원 형태로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 이용한다.

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \zeta = \rho/l \quad (12-14)$$

$$\delta = w/l, \quad \lambda = v/l \quad (15,16)$$

$$f = h/l, \quad s = l/\sqrt{I_c/A_c} \quad (17,18)$$

$$n = I_e/I_c, \quad \mu = kG/E \quad (19,20)$$

$$C_i = \omega_i s \sqrt{\gamma/E}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (21)$$

식 (17)~(20)에서 f , s , n , μ 는 각각 아치높이 지간길이 비(rise to span length ratio), 세장비(slenderness ratio), 아치 단부와 아치 정부의 단면2차모멘트비인 단면비(section ratio) 및 전단계수(shear parameter)이다. 그리고 식 (21)에서 C_i 는 무차원 고유진동수(frequency parameter), i 는 모드번호이다.

식 (7)~(9)를 식 (4)에, 식 (7), (8), (10)을 식 (3)에, 식 (6), (8), (11)을 식 (5)에 대입하고, 식 (12)~(21)의 무차원 변수를 이용하여 정리하면 다음의 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta}{d\phi^2} &= \left(\frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{d\phi} - \frac{1}{F} \frac{dF}{d\phi} \right) \frac{d\delta}{d\phi} + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\xi^2 C_i^2}{\mu s^2} \right) \delta \\ &+ \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) \frac{d\lambda}{d\phi} + \left(\frac{1}{F} \frac{dF}{d\phi} - \frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{d\phi} \right) \lambda \\ &+ \left(\xi + \frac{H}{\xi \mu s^2 F} \right) \frac{d\psi}{d\phi} + \frac{\xi}{F} \frac{dF}{d\phi} \psi \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\lambda}{d\phi^2} &= \left(\frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{d\phi} - \frac{1}{F} \frac{dF}{d\phi} \right) \frac{d\lambda}{d\phi} + \left(\mu - \frac{\xi^2 C_i^2}{s^2} \right) \lambda \\ &- (1 + \mu) \frac{d\delta}{d\phi} + \left(\frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{d\phi} - \frac{1}{F} \frac{dF}{d\phi} \right) \delta \\ &- \frac{H}{\xi s^2 F} \frac{d^2\psi}{d\phi^2} + \frac{1}{\xi s^2 F} \left(\frac{2H}{\xi} \frac{d\xi}{d\phi} \right. \\ &\left. - \frac{dH}{d\phi} \right) \frac{d\psi}{d\phi} + \xi \mu \psi \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{d\phi^2} &= \left(\frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{d\phi} - \frac{1}{H} \frac{dH}{d\phi} \right) \frac{d\psi}{d\phi} + \left(\frac{\xi^2 \mu s^2 F}{H} \right. \\ &\left. - \frac{\xi^2 C_i^2}{s^2} \right) \psi - \frac{\xi \mu s^2 F}{H} \frac{d\delta}{d\phi} + \frac{\xi \mu s^2 F}{H} \lambda \quad (24) \end{aligned}$$

이상에서 식 (22)~(24)는 축변형, 회전관성 및 전단변형 효과를 고려한 임의 선형과 단면을 갖는 아치의 면내 자유 진동을 지배하는 상미분방정식이다.

Fig. 1에 보인 높이 h , 지간길이 l 인 포물선 아치의 선형식을 식 (12), (13), (17)의 무차원 변수를 이용하여 표현하면 식 (25)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\eta = -4f\xi(\xi - 1) \quad (25)$$

식 (25)를 이용하면 식 (26)~(28)에 보인 바와 같이 포물선 아치에 대한 ϕ 및 변화곡률계수 ξ 와 $d\xi/d\phi$ 를 구할 수 있다.

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}[-4f(2\xi - 1)] \quad (26)$$

$$\xi = \frac{1}{8f} [1 + 16f^2(2\xi - 1)^2]^{3/2} \quad (27)$$

$$\frac{d\xi}{d\phi} = \frac{3}{2} (2\xi - 1) [1 + 16f^2(2\xi - 1)^2]^{3/2} \quad (28)$$

식 (22)~(24)의 지배방정식에 포함된 단면형상계수의 결정과정은 다음과 같으며, 여기서 모든 변수들은 Fig. 1에서 정의한 바와 같다. 본 연구에서는 아치단면의 변화로서 경제적인 아치 구조물 설계시 많이 고려되는 1차원(prime) 변단면을 택하였다. 1차원 변단면인 경우 아치축상 임의점에서의 단면2차모멘트를 아치 정부에서의 단면2차모멘트를 기준으로 나타내면 다음 식과 같다.⁽¹⁾

$$I = \frac{I_c}{\cos \theta \left[1 - \left(1 - \frac{I_c}{I_e \cos \theta_e} \right) \frac{\sin \theta}{\sin \theta_e} \right]} \quad (29)$$

Fig. 1로부터 θ 와 θ_e 는 다음과 같이 ϕ 이 관한 항으로 표현할 수 있다.

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \phi, \quad \theta_e = \frac{\alpha}{2} \quad (30,31)$$

식 (30), (31)을 식 (29)에 대입하고 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$I = \frac{I_c}{\sin \phi (1 + B_p \cos \phi)} \quad (32)$$

식 (32)에서 B_p 의 내용은 식 (33)과 같다.

$$B_p = \frac{1}{\sin(\alpha/2)} \left[\frac{1}{n \cos(\alpha/2)} - 1 \right], \quad \phi \leq \pi/2 \quad (33a)$$

$$B_p = -\frac{1}{\sin(\alpha/2)} \left[\frac{1}{n \cos(\alpha/2)} - 1 \right], \quad \phi > \pi/2 \quad (33b)$$

식 (2)와 식 (32)를 비교하면 아치 정부에서의 단면2차모멘트를 기준으로 하는 단면2차모멘트 변화식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H = \frac{1}{\sin \phi (1 + B_p \cos \phi)} \quad (34)$$

식 (34)는 1차원 변단면인 경우 단면2차모멘트 변화식이며, 이로부터 $dH/d\phi$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dH}{d\phi} = H^2 (B_p - 2B_p \cos^2 \phi - \cos \phi) \quad (35)$$

직사각형 단면을 갖는 변단면인 경우 아치 정부와 아치축상 임의점에서의 단면적과 단면2차모멘트 관계식으로부터 다음 식에 보인 바와 같이 F 및 $dF/d\phi$ 를 단면2차모멘트 변화식 H 의 함수로 나타낼 수 있다.

$$F = H^e \quad (36)$$

$$\frac{dF}{d\phi} = eH^{e-1} \frac{dH}{d\phi} \quad (37)$$

식 (36), (37)에서 e 는 단면변화의 형태에 따라 다음 값을 갖는다.

$$\text{변화높이 직사각형 단면} : e = 1/3 \quad (38)$$

$$\text{변화폭 직사각형 단면} : e = 1 \quad (39)$$

$$\text{정방형 변단면} : e = 1/2 \quad (40)$$

본 연구에서는 아치의 단부조건으로 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정을 고려하였으며, 이들 단부조건에 따른 경계조건식은 다음과 같다. 먼저 회전단 ($\theta = \theta_L$ 또는 θ_R)에서는 곡률중심방향 변위 w , 접선방향 변위 v , 식 (6)의 휨 모멘트 M 이 발생하지 않으므로 무차원 변수를 이용하면 식 (41)의 경계조건식을 얻을 수 있다.

$$\delta = 0, \lambda = 0, d\psi/d\phi = 0 \quad (41a-c)$$

고정단 ($\theta = \theta_L$ 또는 θ_R)에서는 곡률중심방향 변위 w , 접선방향 변위 v , 단면회전이 발생하지 않으므로 무차원 변수를 이용하면 식 (42)의 경계조건식을 얻을 수 있다.

$$\delta = 0, \lambda = 0, \psi = 0 \quad (42a-c)$$

3. 수치해석 예 및 고찰

식 (22)~(24)의 지배방정식으로부터 해석대상구조의 고유진동수를 산출하기 위하여 사용된 수치해석 방법의 개략적인 내용은 다음과 같다⁽⁴⁾. 식 (22)~(24)의 지배방정식에는 불확정량인 고유치 C_i 항이 포함되어 있으므로 먼저 이 값을 가정하여 미분방정식에 대입한 후 좌단의 경계조건을 이용하여 수치적분을 시행한다. 가정한 C_i 값이 대상구조에 대한 고유치인지는 수치적분결과 얻어진 우단에서의 결과들이 경계조건을 만족하는지 여부로서 판단하며, 이 과정에서 행렬값 탐사법을 이용하였다. 본 연구에서 미분방정식의 수치적분은 정도가 높아 공학관련문제에서 많이 이용되고 있는 Runge-Kutta method를 이용하였으며, 행렬값 탐사법을 적용하는 과정에서 고유치 C_i 를 찾기 위해서는 Regula-Falsi method를 이용하였다. 이상의 수치해석 과정을 컴퓨터 프로그램화하였으며, 본 논문에서는 최저차 4개의 무차원 고유진동수를 산출하였다.

Table 1은 본 연구결과와 유한요소법에 의한 구조해석용 범용프로그램인 SAP2000의 결과를 비교한 것이다. SAP 2000에 의한 해석결과는 아치를 100개의 직선보 요소로서 모형화하고 전단면적(shear area)을 고려하여 얻은 결과이

Table 1. Comparison of results between finite element method and this study($\mu=0.3$)

Geometry	mode	Reference	
		This study	SAP2000
Hinged-hinged depth taper $f=0.15, s=50, n=2$	1	34.78	35.07
	2	49.83	50.02
	3	80.19	81.71
	4	134.9	138.3
Hinged-clamped breadth taper $f=0.2, s=80, n=2$	1	37.48	37.63
	2	80.58	81.13
	3	104.2	104.4
	4	138.7	140.2
Clamped-clamped square taper $f=0.2, s=50, n=3$	1	52.26	52.81
	2	63.78	64.03
	3	100.9	102.8
	4	150.7	153.9

다. 이 표에서 두 결과들은 매우 우수하게 근접하고 있어 본 연구결과의 타당성을 검증할 수 있다.

Fig. 3~5는 세장비 $s=50$, 단면비 $n=2$, 전단계수 $\mu=0.3$ 인 변단면 포물선 아치의 무차원 고유진동수 C_i 와 아치높이 지간길이비 f 사이의 관계를 나타낸 것이며, Fig. 6~8은 아치높이 지간길이비 $f=0.2$, 단면비 $n=2$, 전단계수 $\mu=0.3$ 인 변단면 포물선 아치의 무차원 고유진동수 C_i 와 세장비 s 사이의 관계를 나타낸 것이다. 또한 Fig. 9~11은 아치높이 지간길이비 $f=0.2$, 세장비 $s=50$, 전단계수 $\mu=0.3$ 인 변단면 포물선 아치의 무차원 고유진동수 C_i 와 단면비 n 사이의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림들에서 실선은 변화폭 직사각형 단면, 점선은 변화높이 직사각형 단면, 일점쇄선은 정방형 변단면에 대한 결과이다.

Fig. 3~5의 무차원 고유진동수와 아치높이 지간길이비 사이의 관계에서 일반적으로 높은 아치는 낮은 아치에 비해 고유진동수가 작은 경향을 보이고 있음을 알 수 있다. 그러나 아치높이 지간길이비 f 가 일정값에 도달하기 이전에는 f 가 증가함에 따라 각 모드별 무차원 고유진동수는 증가와 감소의 경향을 함께 나타내고 있다. 또한 이 그림에서 아치높이 지간길이비 f 가 "0"에 접근함에 따라 무차원 고유진동수는 동일한 제원을 갖는 직선보의 고유진동수로 수렴함을 알 수 있다.

Fig. 6~8의 무차원 고유진동수와 세장비 사이의 관계에서 세장비 s 가 증가하는 경우 무차원 고유진동수는 항상 증가함을 알 수 있다. 또한 이 그림들에서 세장비 s 가 증가함에 따라 각 모드별 무차원 고유진동수는 일정값으로 수렴하며, 저차모드일수록 작은 세장비에서 수렴이 시작됨을 알 수 있다.

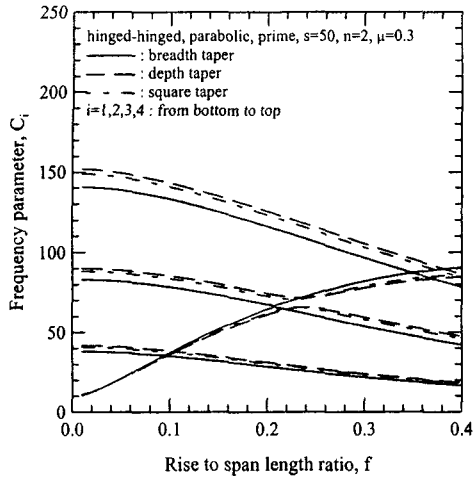


Fig. 3 Effect of f on frequency(hinged-hinged).

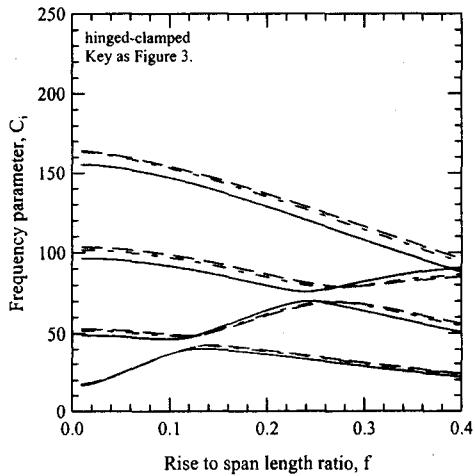


Fig. 4 Effect of f on frequency(hinged-clamped).

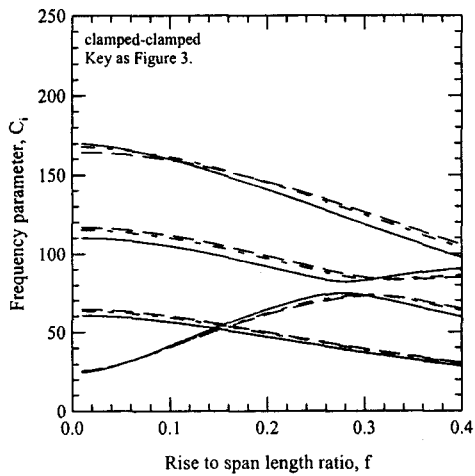


Fig. 5 Effect of f on frequency(clamped-clamped).

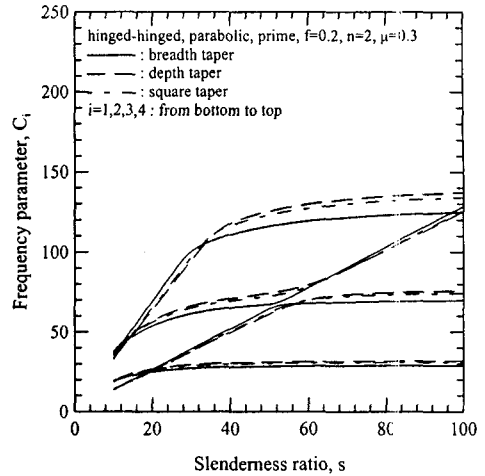


Fig. 6 Effect of s on frequency(hinged-hinged).

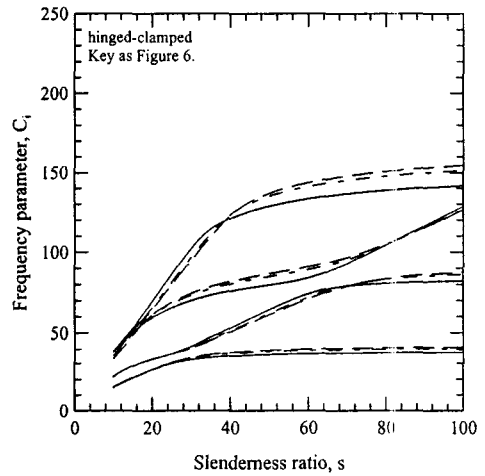


Fig. 7 Effect of s on frequency(hinged-clamped).

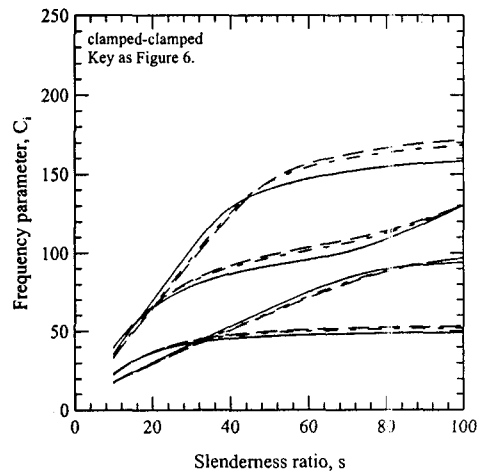


Fig. 8 Effect of s on frequency(clamped-clamped).

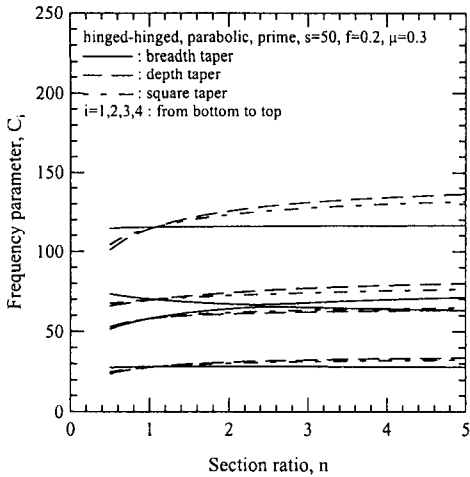


Fig. 9 Effect of n on frequency(hinged-hinged).

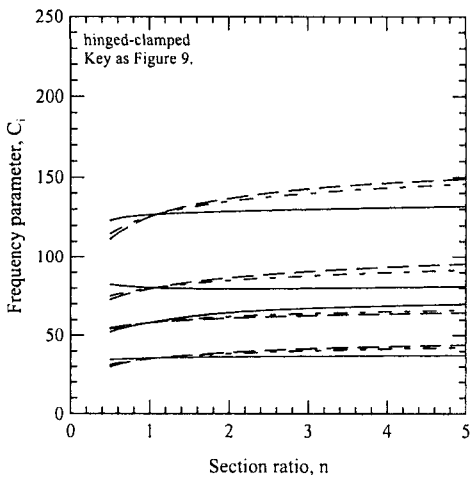


Fig. 10 Effect of n on frequency(hinged-clamped).

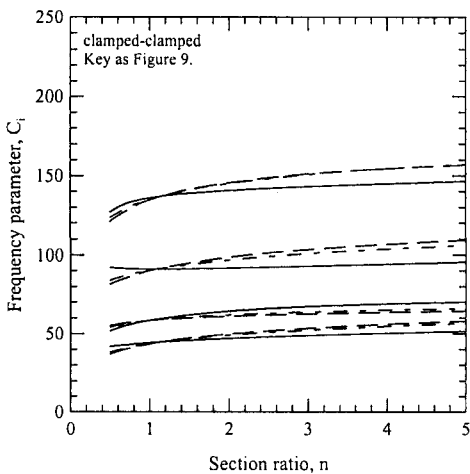


Fig. 11 Effect of n on frequency(clamped-clamped).

Fig. 9~11의 무차원 고유진동수 C_i 와 단면비 n 사이의 관계에서 단면비 n 이 증가하는 경우 일반적으로 무차원 고유진동수는 증가함을 알 수 있다.

한편 Fig. 3~8에서 무차원 고유진동수 곡선이 서로 교차하는 지점을 발견할 수 있는데, 이는 이 지점의 제원을 갖는 아치인 경우 동일한 고유진동수에 대하여 2개의 진동모드가 존재함을 의미한다.

4. 결론

본 연구는 아치의 면내 자유진동에 관한 연구이다. 이 연구에서는 진동시 아치 미소요소에 작용하는 합용력과 관성력의 동적 평형방정식을 이용하여, 축변형, 회전관성 및 전단변형 효과를 고려한 변단면 변화곡을 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였다. 수치해석기법을 이용하여 유도된 지배미분방정식으로부터 고유진동수 및 진동형을 산출할 수 있는 컴퓨터 프로그램을 작성하였다.

유도된 지배방정식에 1차원 변단면 포물선 아치를 적용하였으며, 단부조건으로 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정, 단면형상으로는 변화높이 직사각형 단면, 변화폭 직사각형 단면 및 정방형 변단면을 고려하였다.

유한요소법(SAP2000)에 의한 결과와 본 연구결과를 비교하여 본 논문의 이론 전개과정 및 작성된 컴퓨터 프로그램을 검증하였다.

수치해석 결과로서 해석대상 아치의 제원을 나타내는 무차원 변수인 아치높이 지간길이비, 세장비, 단면비의 변화에 따른 무차원 고유진동수를 제4모드까지 산출하고, 그 결과를 분석하였다.

이상에서 본 연구에서 유도한 지배 미분방정식과 수치해석방법은 실용적인 범위 내의 다양한 제원을 갖는 아치의 고유진동수 및 진동형을 산출하는데 매우 효율적이고 정확한 해석방법인 것으로 평가된다.

참고문헌

- (1) Den Hartog, J.P., 1928, "The Lowest Natural Frequency of Circular Arcs," Philosophical Magazine, Vol. 5, pp.400~408.
- (2) Leontovich, V., 1969, Frames and Arches, McGraw-Hill.
- (3) Borg, S.F. and Gennaro, J.J., 1959, Advanced Structural Analysis, Van Nostrand.
- (4) Oh, S.J., Lee, B.K. and Lee, I.W., 2000, "Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-Uniform Cross-Section," International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, pp.4871-4891.