

유체를 수송하는 반원형 곡선관의 면내운동에 대한 비선형 진동 해석

Non-linear Vibration Analysis for the In-plane Motion of a Semi-circular Pipe Conveying Fluid

정두한* · 정진태**

Duhan Jung and Jintai Chung

Key Words : Vibration analysis(진동 해석), In-plane motion (면내운동), Semi-circular pipe(반원형 파이프), Pipe conveying fluid(유체를 수송하는 파이프)

ABSTRACT

The non-linear dynamic characteristics of a semi-circular pipe conveying fluid are investigated when the pipe is clamped at both ends. To consider the geometric non-linearity for the radial and circumferential displacements, this study adopts the Lagrange strain theory for large deformation and the extensible dynamics based on the Euler-Bernoulli beam theory for slenderness assumption. By using the Hamilton principle, the non-linear partial differential equations are derived for the in-plane motions of the pipe, considering the fluid inertia forces as a kind of non-conservative forces. The linear and non-linear terms in the governing equations are compared with those in the previous study, and some significant differences are discussed. To investigate the dynamic characteristics of the system, the discretized equations of motion are derived from the Galerkin method. The natural frequencies varying with the flow velocity are computed from the two cases, which one is the linear problem and the other is the linearized problem in the neighborhood of the equilibrium position. Finally, the time responses at various flow velocities are directly computed by using the generalized- method. From these results, we should describe the non-linear behavior to analyze dynamics of a semi-circular pipe conveying fluid more precisely.

1. 서 론

반원형 곡선파이프는 원자력, 화학공장, 열교환기 등 광범위한 산업분야에서 일반적인 배관계를 구성하기 위하여 널리 사용되고 있다. 이러한 배관계의 신뢰성과 안정성을 확보하기 위해서는 유체 유동을 포함하는 파이프의 동특성을 필수적으로 이해하여야 한다.

지금까지 내부에 유체를 수송하는 직선관에 대한 동적 거동은 많은 연구자들에 의하여 발표되었고, 특히 Paidoussis⁽¹⁾는 유체를 수송하는 다양한 관에 대한 광범위한 연구를 그의 저서에 수록하였다. 진동 특성이 더욱 복잡한 유체를 수송하는 곡선관에 대한 연구는 상대적으로 적은 주목을 받아왔으나, Svetlitskii⁽²⁾는 유연한 호스의 굽힘 강성을 무시하고 현으로 가정하여 면외(out-of-plane) 진동을 연구하였고, Chen^(3,4)은 파이프의 중심선은 인장 불가능(inextensible)하다는 가정을 사용하여 내부

유체의 유동 속도가 임계값을 초과하면 불안정 현상이 발생함을 예측하였다. 한편, Hill and Davis⁽⁵⁾는 곡선관 내부 유체의 원심력에 기인한 초기 장력을 고려한 연구를 수행하여 양단이 지지된 곡선 파이프에는 불안정 현상이 발생하지 않는다는 결론을 얻었다. 선행 연구의 불일치를 재평가하기 위하여 Misra *et al.*^(6,7)은 곡선 파이프의 중심선이 인장 가능(extensible)하다는 가정을 사용하여 Newton 방법으로 선형 운동방정식을 유도하고 인장 불가능 조건을 이용하여 두 이론의 차이점을 설명하였다. 그리고 Dupuis and Rousselet⁽⁸⁾은 유체를 수송하는 곡선관의 운동방정식에 대한 철저한 연구를 통하여 면내 및 면외 변위가 완전 연성된 비선형 방정식을 Newton 방법으로 유도하였으나, 비선형성을 고려함에 있어서 차수근사법(order-of-magnitude)과 미소 변형을 이론을 사용하여 유도과정이 복잡하고 유체 유동에서 발생하는 변형의 비선형성에 의한 영향은 평가하지 않았다.

본 논문에서는 양단이 고정된 유체를 수송하는 반원형 곡선관의 면내 진동에 대한 동적 해석을 수행하였다. 더욱 현실성이 있는 인장 가능 이론을 적용하였고, 변형에 대한 기하학적 비선형성을 고려하기 위하여 Lagrange 변형을 이론을 사용하

* 한양대학교 일반대학원 정밀기계공학과
E-mail : dhjung@ihanyang.ac.kr
Tel : (031) 406-6964, Fax : (031) 501-4590

** 한양대학교 공학대학 기계정보경영공학부

었다. Hamilton 원리로부터 면내운동에 대한 비선형 방정식을 유도하여 기존 연구와 비교하였다. 특히 비선형 항의 효과를 고찰하기 위하여 비선형 항이 무시된 선형의 경우와 평형위치 부근에서 선형화된 경우로 분리하여 유동 속도에 따른 고유진동수를 계산하고 결과를 비교 검토하였다. 최종적으로, 선형·비선형 동특성이 현저한 차이를 보이는 몇 가지 유동 속도에서 파이프의 동적 응답을 계산하여 결과를 검증하였다.

2. 운동방정식

유체가 흐르는 반형원 곡선관에 대한 개략도를 Fig. 1에 나타내었다. 여기서 XY 는 공간상에 고정된 관성 좌표계이고, xy 는 극 좌표계 $r\theta$ 에 부착된 지역 좌표계를 나타낸다. 그림에서 변형 전 파이프는 점선으로 나타내었고, 변형 후 파이프는 실선으로 나타내었다. 변형 전 파이프의 곡률 반경은 R 이고 내부에 비압축성 유체가 일정 속력 U 로 흐르고 있다. 변형 전 파이프의 중심선 상에 있는 점 P_0 는 반경방향 변위 u 와 원주방향 변위 v 에 의하여 점 P 로 이동한다. 만약 파이프 단면의 치수가 반경 및 길이에 비하여 상당히 작다고 하면 Euler-Bernoulli 빔으로 모델링 될 수 있다. 따라서 파이프 단면상에 있는 임의의 점의 변위는 중심선의 변위를 사용하여 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$u_r = u(\theta, t) \quad (1)$$

$$u_\theta = v(\theta, t) + x \left[\frac{v(\theta, t)}{R} - \frac{\partial u(\theta, t)}{R \partial \theta} \right] \quad (2)$$

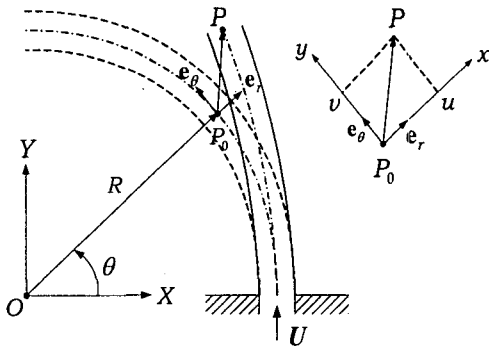


Fig. 1 Configuration of a Semi-circular pipe conveying fluid

변위와 변형의 관계는 기하학적 비선형성을 표현하기 위하여 Lagrange 변형을 이론을 적용한다. 빔으로 모델링 된 파이프는 1 차원 요소이므로 변형 전 파이프의 중심선에 수직인 단면은 변형 후에도 수직을 유지한다는 가정하에서 임의의 한 점에 대한 원주방향 변형을 ϵ_θ 는 다음 식으로 근사화된다.

$$\epsilon_\theta = \bar{\epsilon}_\theta + x \kappa \quad (3)$$

여기서

$$\bar{\epsilon}_\theta = \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{u}{R} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{u}{R} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{R \partial \theta} - \frac{v}{R} \right)^2 \right] \quad (4)$$

$$\kappa = \frac{\partial v}{R^2 \partial \theta} - \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \theta^2} \quad (5)$$

여기서 $\bar{\epsilon}_\theta$ 는 단면의 중심점에 대한 원주방향 수직 변형율을 나타내고, κ 는 곡률의 변화와 관련된 전단 변형율을 나타낸다. 식 (3)은 일반적으로 가느다란 빔에 큰 변형을 적용하는 문제에서 기하학적 비선형성을 효과적으로 고려하기 위하여 사용되는 관계식이다. 즉, 원주방향 수직 변형율은 비선형으로 표현되고, 비틀림에 의한 전단 변형의 비선형성은 무시되어 선형으로 근사된다.

파이프의 탄성변형에 의한 변형에너지는 구조물의 임의의 점의 응력과 변형율의 곱으로 나타낸 식을 적분함으로써 구할 수 있다. 파이프의 재료는 등방성으로 균질하다고 가정하여 후크의 법칙을 이용하면 변형에너지는 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$V = \frac{1}{2} \int_0^\pi (EA \bar{\epsilon}_\theta^2 + EI \kappa^2) R d\theta \quad (6)$$

여기서 E 는 파이프의 탄성계수, A 는 파이프의 단면적, I 는 단면의 면적 관성 모멘트이다.

다음으로 유체를 수송하는 반원관의 운동에너지를 고려해보자. 파이프는 가느다란 빔으로 취급되므로 파이프 단면의 회전 관성효과와 유체의 이차 유동효과는 무시한다. 먼저 파이프와 유체의 절대속도는 각각 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$v_p = \dot{u} e_r + \dot{v} e_\theta \quad (7)$$

$$v_f = \left[\dot{u} + U \left(\frac{u'}{R} - \frac{v}{R} \right) \right] e_r + (\dot{v} + U) e_\theta \quad (8)$$

여기서 도트(dot)와 프라임(prime)은 각각 시간 t 와 θ 에 대한 편미분을 나타낸다. 상대 유동 속도에서 기인하는 유체의 관성력은 비보존력으로 간주할 수 있다. 만약 유체의 유동이 없다면 파이프 속의 유체입자는 항상 동일한 입자로 남아있다. 따라서 시스템의 총 에너지는 시간의 변화에 무관한 보존계로 볼 수 있다. 그러나 유체의 유동이 있는 경우, 상대 유동 속도에서 기인하는 에너지는 시스템의 외부에서 발생하는 것이다. 결국 파이프 내의 유체의 입자는 시간에 따라서 변하게 되고 파이프의 경계를 통하여 제한되지 않는다. 따라서 상대유동속도에서 기인하는 에너지는 운동 에너지가 아닌 비보존력으로 간주하여야 한다. 이에 대한 자세한 논의는 참고문헌⁽⁹⁾에서 볼 수 있다. 따라서 유체를 수송하는 반원형 파이프 시스템의 보존 운동에너지는 다음 식으로 표현된다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\pi (m+M)(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) R d\theta \quad (9)$$

그리고 유체 관성력에 의한 가상일은 다음 식으로 표현되어 진다.

$$\delta W_{nc} = - \int_0^\pi \left\{ M \left[2 \frac{U}{R} (\dot{u}' - \dot{v}') + \frac{U^2}{R^2} (u'' - v'' - R) \right] \delta u \right\} R d\theta \\ - \int_0^\pi \left\{ M \left[\frac{U}{R} (\dot{u}' + \dot{v}') + \frac{U^2}{R^2} (u' - v') \right] \delta v \right\} R d\theta \quad (10)$$

여기서 중괄호 속의 표현식은 상대 유동속도와 파이프 운동의 상호 연성 때문에 발생하는 유체의 가속도를 의미하며 유체 속도에 대한 물질미분으로부터 얻을 수 있다. 각 괄호 속의 첫 항은 코리올리 힘을 나타내고, 둘째 항은 원심력을 나타낸다.

식 (6), (9) 그리고 (10)을 고려하여 Hamilton 원리로부터 운동방정식을 유도하면, 아래와 같은 비선형 지배방정식과 경계조건이 얻어진다.

$$(m+M)\ddot{u} + 2\frac{MU}{R}(\dot{u}' - \dot{v}') + \frac{MU^2}{R^2}(u'' - v'') + \frac{EI}{R^4}(u^{iv} - v^{iv}) \\ + \frac{EA}{R^2}(u + v') + \frac{EA}{R^3} \left(\frac{3}{2}u^2 - \frac{1}{2}u'^2 - uu'' + 4uv' - u'v'' \right) \\ - u''v' + \frac{1}{2}v^2 + \frac{5}{2}v'^2 + vv'' = \frac{MU^2}{R} \quad (11)$$

$$(m+M)\ddot{v} + \frac{MU}{R}(\dot{u}' + \dot{v}') + \frac{MU^2}{R^2}(u' - v'') + \frac{EI}{R^4}(u'' - v'') \\ - \frac{EA}{R^2}(u' + v'') - \frac{EA}{R^3}(4uu' + u'u'' - uv + 3uv'' \\ + 3u'v' - u''v + 3v'v'') = 0 \quad (12)$$

$$u = u' = v = 0 \quad \text{at } \theta = 0, \pi \quad (13)$$

지배방정식 (11)과 (12)는 반경 및 원주방향의 변위들이 선형과 비선형의 형태로 복잡하게 연성되어 있다. 위 식에서 비선형 효과를 무시하고 선형 항을 고려하는 경우, 인장 가능 이론을 적용한 Misra *et al.*⁽⁷⁾의 식과 일치함을 볼 수 있다. 그러나 본 연구에서 유도된 비선형 항은 Dupuis and Rousselet⁽⁸⁾의 식과 차이를 보인다. 위 식 (11)과 (12)를 유도할 때, 미소 변형을 이론 대신에 Lagrange 변형을 이론을 사용했다는 점을 고려한다면 본 연구에서 유도된 운동방정식이 반경방향과 원주방향의 변위를 좀 더 엄밀하게 표현할 수 있다.

다음으로 아래와 같은 무차원 변수들을 도입하여 지배방정식을 일반화한다.

$$u^* = \frac{u}{R}, \quad v^* = \frac{v}{R}, \quad \beta^* = \sqrt{\frac{M}{(m+M)}}, \\ k^* = \frac{AR^2}{I}, \quad t^* = \sqrt{\frac{EI}{(m+M)R^2}} t, \quad (14) \\ U^* = \sqrt{\frac{M}{EI}} RU, \quad \Omega^* = \sqrt{\frac{(m+M)}{EI}} R^2 \omega$$

여기서 Ω^* 는 무차원 고유진동수를 나타내며 무차원 지배방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\ddot{u} + 2\beta U(\dot{u}' - \dot{v}') + U^2(u'' - v'') + (u^{iv} - v^{iv}) + k \left(u + v' + \frac{3}{2}u^2 \right) \\ - \frac{1}{2}u'^2 - uu'' + 4uv' - u'v'' - \frac{1}{2}v^2 + \frac{5}{2}v'^2 + vv'' = U^2 \quad (15)$$

$$\ddot{v} + \beta U(\dot{u}' + \dot{v}') + U^2(u' - v'') + (u'' - v'') - k(u' + v'') \\ - k(4uu' + u'u'' - uv + 3uv'' + 3u'v' - u''v + 3v'v'') = 0 \quad (16)$$

표현식의 간편성을 위하여 기호 *는 생략되었다. 무차원 지배방정식 (15)와 (16)에 대한 근사해를 구하기 위하여 본 연구에서는 Galerkin 방법을 적용한다. 반경방향과 원주방향의 변위를 각각 다음과 같은 비교함수의 급수해로 가정하여 대

입한다.

$$u(\theta, t) = \sum_{n=1}^N U_n(\theta) X_n^u(t) \quad (17)$$

$$v(\theta, t) = \sum_{n=1}^N V_n(\theta) X_n^v(t) \quad (18)$$

여기서 $U_n(\theta)$ 와 $V_n(\theta)$ 는 정지상태의 빔에 대한 고유함수를 이용하고, $X_n^u(t)$ 와 $X_n^v(t)$ 는 결정하여야 할 미지함수이고, N 은 비교함수의 총 수이다. 식 (17) 과 (18) 을 식 (15) 와 (16) 에 대입하고 가중함수를 곱하여 영역 $0 \leq \theta \leq \pi$ 에 대하여 적분한다. 이상을 수행하면 다음과 같은 이산화된 비선형 행렬-벡터 방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + 2\beta U \mathbf{G}\dot{\mathbf{X}}(t) + (\mathbf{K} + U^2 \mathbf{B})\mathbf{X}(t) + \mathbf{N}(\mathbf{X}(t)) = \mathbf{F} \quad (19)$$

여기서 \mathbf{M} 은 질량행렬, \mathbf{G} 는 코리올리 힘과 연관된 행렬, \mathbf{K} 는 구조물의 강성행렬, \mathbf{B} 는 원심력과 연관된 행렬, \mathbf{N} 은 기하학적 비선형성 때문에 발생하는 비선형 벡터 그리고 \mathbf{F} 는 정적 평형상태와 연관된 힘 벡터를 나타낸다.

3. 고유진동수 해석

시스템의 고유진동수를 조사하기 위하여 (19) 식으로 주어진 비선형 방정식에 섭동법을 적용하여 선형화된 방정식을 구한다. 일정한 유체 유동 속도에 의한 반원형 곡선관의 평형 위치는 비선형 방정식으로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$(\mathbf{K} + U^2 \mathbf{B})\mathbf{X}_0 + \mathbf{N}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{F} \quad (20)$$

여기서 \mathbf{X}_0 는 유동 속도에 의존하는 평형위치를 나타내며, 수치적으로 구할 수 있다. 다음으로 파이프 내부에 일정한 유체 유동이 있는 경우, 평형 위치 부근에서 선형화된 섭동방정식은 다음 식으로 표현된다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + 2\beta U \mathbf{G}\dot{\mathbf{X}}(t) + (\mathbf{K} + U^2 \mathbf{B} + \mathbf{K}_T)\mathbf{X}(t) = 0 \quad (21)$$

여기서 \mathbf{K}_T 는

$$\mathbf{K}_T = \left. \frac{\partial \mathbf{N}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0} \quad (22)$$

와 같고, 비선형 항의 영향을 평형위치에서 선형화한 접선 강성행렬을 나타낸다.

우선 본 연구에서 구한 고유진동수의 수렴성을 검증하기 위하여 유체 유동이 없는, 즉 $U=0$ 반원형 곡선관에 대한 고유치 해석을 수행하여 Blevins⁽¹⁰⁾의 결과와 비교하였다. 이때 사용된 무차원 변수들의 값은 각각 $\beta = \sqrt{0.5}$, $k = 10^4$ 이다. Table 1 에서 알 수 있듯이 기저함수가 증가함에 따라 참고문헌에 제시된 해석해에 잘 수렴하고 있다. 여기서 가장 낮은 세 개의 고유진동수는 모두 반경방향의 굽힘 모드에 해당하지만, 원주방향 인장에 대한 근사함수의 수가 적을 경우는 수렴성이 떨어진다. 보편적으로 곡선관을 해석할 경우 6~7 개 이상의 근사함수가 추천되며, 본 연구에서 비선형 성의 영향을 엄밀하게 해석하기 위하여 각각 10 개의 기저함수를 사용하여 모든 해석을 수행하고자 한다.

다음으로 본 연구에서 유도한 지배방정식을 바탕으로 유동 속도에 따른 고유진동수의 변화를 계산하였다. 특히 비선형성의 영향을 엄밀하게 논의하기 위하여 선형 해석과 비선형 해석을 수행하였다. 선형 해석은 Lagrange 변형울 이론에 나타난 비선형 항을 무시하고 구해진 운동방정식을 바탕으로 한다. 이산화된 선형 방정식은 식 (19) 에 나타난 비선형 벡터항이 사라진다. 그러나 파이프의 중심선은 인장 가능 이론을 적용한다는 점을 명심하여야 한다. Fig. 2 의 (a) 와 (b) 는 각각 선형 방정식으로부터 계산된 고유치의 실수부와 허수부를 나타낸다. 고유치의 허수부는 파이프의 고유진동수를 나타내며, 실수부가 양의 값을 가지면 시스템은 불안정하게 된다. Fig. 2 에 따르면 유동

Table 1 Convergence characteristics of the dimensionless natural frequencies when $U = 0$

N	First	Second	Third
5	4.4862	9.9683	19.5900
6	4.4138	9.8072	18.3573
7	4.3994	9.7149	18.1107
8	4.3913	9.6699	18.0181
9	4.3862	9.6564	17.9392
10	4.3851	9.6444	17.9382
Reference ⁽¹⁰⁾	4.3849	9.6329	17.6203

속도가 증가함에 따라 고유진동수가 감소하고 유동 속도가 3.01에 이르면 파이프는 첫번째 모드에서 발산형 불안정을 나타낸다. 만약 유동 속도가 더욱 증가하여 3.93이 되면 시스템은 두번째 모드에서 플러터 불안정을 나타낸다. 비록 파이프의 중심선이 인장 가능하지만 이 결과는 인장 불가능에 바탕을 둔 Chen⁽³⁾의 연구결과와 동일하다.

Fig. 3은 평형위치 부근에서 선형화된 섭동방정식 (21)로부터 계산된 고유진동수의 변화를 도

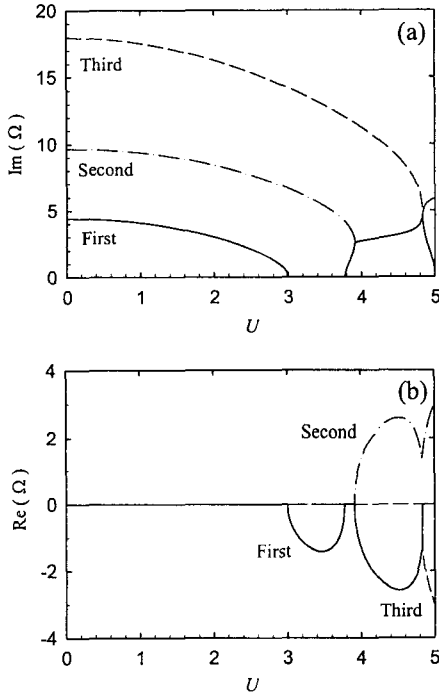


Fig. 2 Eigenfrequencies Ω versus the flow velocity U results from linear equations: (a) imaginary part; (b) real part

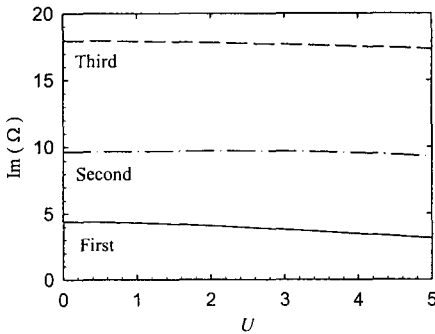


Fig. 3 Natural frequencies $Im(\Omega)$ versus the flow velocity U results from non-linear equations

시한 것이다. 이 경우 고유치의 실수부는 모두 0의 값을 갖는다. 여기서 가장 주목할 점은 양단이 고정된 반원형 곡선관의 경우, 발산형 및 플러터 불안정 현상을 나타내지 않는다는 점이다. Hill and Davis⁽⁵⁾와 Misra *et al.*⁽⁷⁾도 파이프에 작용하는 초기 힘을 고려하여 동일한 결론을 유도하였다. 그러나 기존의 연구는 유체의 원심력에 의한 초기 힘을 모델링하고 여기에 선형적인 변형의 관계식을 이용하여 유도한 것으로, 유동의 변화와 변위 사이의 복잡한 비선형성을 엄밀하게 표현하지 못한다. 본 연구에서는 기하학적인 비선형성을 고려하여 유체 유동에 의한 평형해를 구하고 선형화된 운동방정식을 이용하여 반원형 곡선관의 동특성을 해석하였다. 해석결과로부터 선형방정식이 반원형 파이프의 정적 평형상태를 적절하게 표현할 수 없기 때문에 반드시 기하학적인 비선형성을 고려하여 운동 방정식을 유도하여야 함을 알 수 있다.

4. 동적 응답

비선형 모델링의 필요성을 검토하고 선형 모델과의 차이점을 검증하기 위하여 시간적분법을 이용하여 반원형 곡선관의 동적 응답을 계산하였다. 파이프는 초기에 유동에 의한 평형상태에 있다고 가정하여 평형해를 구하고 이 값을 변위에 대한 초기조건으로 사용하였다. 그리고 반경방향으로

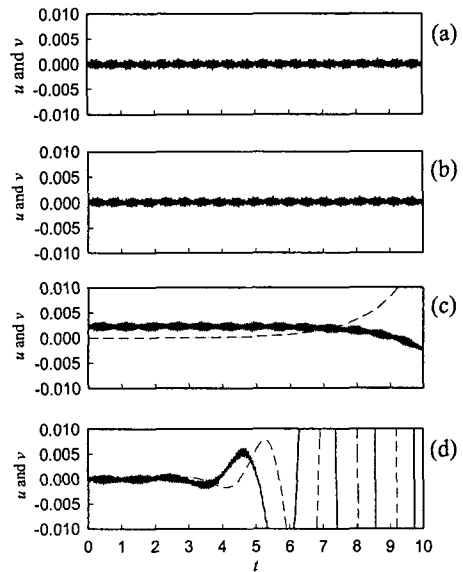


Fig. 4 Time responses computed from the linear equations at various flow velocities: (a) $U=0$; (b) $U=1.0$; (c) $U=3.1$; (d) $U=4.0$

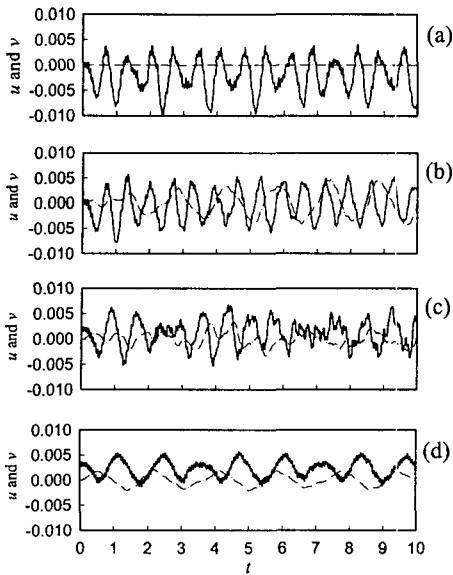


Fig. 5 Time responses computed from the non-linear equations at various flow velocities: (a) $U = 0$; (b) $U = 1.0$; (c) $U = 3.1$; (d) $U = 4.0$

단위 충격력을 가하여 파이프 중심점 $\theta = \pi/2$ 의 자유진동에 대한 응답을 도시하였다.

Fig. 4 는 선형 안정성 해석결과를 비교하기 위하여 단위 충격에 대한 시간 응답을 도시하였다. 여기서 실선은 반경방향 변위를 나타내고, 점선은 원주방향의 변위를 나타내며, (a) 유동이 없는 정지 상태, (b) 유동 속도 1.0 인 안정상태, (c) 유동 속도 3.1 인 발산형 불안정 상태 그리고 (d) 유동 속도 4.0 인 플러터 불안정 상태에 대한 예측 결과와 잘 일치한다. 다음으로 기하학적 비선형성을 고려한 해석에 대한 결과를 검증하기 위하여 동일한 유동 속도에서 시간응답을 계산하여 Fig. 5 에 도시하였다. Fig. 5(a), (b) 와 Fig. 4(a), (b) 를 비교해보면 안정 상태에서의 응답이 더 큰 진폭으로 나타남을 볼 수 있는데, 그 이유는 기하학적 비선형성으로 인하여 큰 변형이 발생하기 때문이다. Fig. 5(c), (d) 를 보면 선형에서 예측된 불안정 거동을 나타내지 않고 안정 응답을 보이고 있음을 알 수 있다. 이는 평형위치 부근에서 선형화된 지배방정식으로부터 예측된 안정성 결과와 잘 일치한다.

5. 결론

본 연구에서 유체를 수송하는 양단 지지 반원형 곡선관에 대한 동특성을 조사하였다. 기하학적

인 비선형성과 중심선의 인장 가능 이론을 적용하여 Hamilton 원리로부터 비선형 지배방정식을 유도하였다. 지배방정식에 나타난 비선형 항의 영향을 규명하기 위하여 선형 방정식과 비선형 방정식으로부터 계산된 고유진동수를 비교하고 동적 시간응답을 구하여 검증하였다.

본 연구의 결과로부터 내부에 유체 유동이 있는 반원형 곡선관의 경우, 선형방정식은 유체 유동에 의한 평형상태를 적절히 표현할 수 없기 때문에 기하학적인 비선형성을 고려하여 평형위치를 구해야 함을 알 수 있다. 그리고 유동 속도에 따른 기하학적인 비선형성을 고려하여 평형위치에서 선형화된 운동방정식을 이용하여 동특성을 조사한 결과, 양단이 지지된 반원형 곡선관은 불안정 현상을 나타내지 않음을 알 수 있다.

참고문헌

- (1) M.P. Paidoussis, 1998, "Fluid-structure interactions, Volume 1: Slender structure and axial flow", Academic Press
- (2) V.A. Svetlisky, 1977, "Vibration of tubes conveying fluid", *Journal of Acoustical Society of America*, **62**, 595-600
- (3) S.S. Chen, 1972, "Vibration and stability of a uniformly curved tube conveying fluid", *Journal of Acoustical Society of America*, **51**, 223-232
- (4) S.S. Chen, 1973, "Out-of-plane vibration and stability of curved tubes conveying fluid", *Journal of Applied Mechanics*, **40**, 362-368
- (5) J.L. Hill and C.G. Davis, 1974, "The effect of initial forces on the hydrostatic vibration and stability of planar curved tubes", *Journal of Applied Mechanics*, **41**, 355-359
- (6) A.K. Misra, M.P. Paidoussis and K.S. Van, 1988, "On the dynamics of curved pipes transporting fluid. Part I: inextensible theory", *Journal of Fluid and Structures*, **2**, 211-244
- (7) A.K. Misra, M.P. Paidoussis and K.S. Van, 1988, "On the dynamics of curved pipes transporting fluid. Part II: extensible theory", *Journal of Fluid and Structures*, **2**, 211-244
- (8) C. Dupuis and J. Rousselet, 1992, "The equations of motion of fluid conveying curved pipes", *Journal of Sound and Vibration*, **153**, 473-489
- (9) C. Dupuis and J. Rousselet, 1993, "Hamilton's principle and the governing equations of motion of fluid conveying curved pipes", *Journal of Sound and Vibration*, **160**, 172-174
- (10) R.D. Blevins, 1979, "Formulas for natural frequency and mode shape", Van Nostrand Reinhold