

연속 스캐닝 진동계를 위한 체비셰프와 힐버트 방식의 비교

Investigation about unexpected effects of Chebyshev and Hilbert approach on using CSLDV

°왕세명* · 경용수** · 박기환* · 라종필** · 김경석+ · 강기수++ · 김창식#

Semyung Wang, Yongsoo Kyong, Kiyhwan Park, Jongpil La,
Kyoung Suk Kim, Ki Soo Kang, and Changsik Kim

Key Words : LDV(레이저 도플러 진동계), continuous scan(연속 스캐닝), Chebyshev Demodulation(체비셰프 다항식), Hilbert Transform Approach(힐버트 변환)

ABSTRACT

There are some methods for extracting mode shapes from a continuously scanned data such as a modulation, Chebyshev polynomial, and Hilbert approach. In this paper, Chebyshev and Hilbert approaches were investigated through the numerical experiment first. As some experimental parameters were altered with small quantities, data were checked and plotted. From those results, the effects of unexpected parameters will be configured. And then, it will be actually helpful to select the proper method for specific testing environments.

1. 서 론

진동현상은 주위 어디에서나 찾아볼 수 있다. 기계 부품을 설계할 때, 악기를 연주할 때에 진동에 관한 현상을 발견할 수 있다. 진동은 때에 따라서 해를 끼치기도 한다. 건물을 무너뜨리기도 하고, 교각을 붕괴시키기도 한다. 이러한 결과를 피하기 위해서 구조물의 진동현상을 미리 알아내는 것은 중요하다. 고유주파수, 댐핑 계수, 모드 형상은 진동현상을 나타내는 중요한 요소이다[1].

기존의 진동해석에서, 시스템의 응답을 얻기 위해 주로 가속도계가 사용되었지만, 이러한 접촉식 계측기는 시스템의 특성을 변화시키는 원인이 되거나 또는 측정하고자 하는 대상체의 범위에 한계가 있다.

따라서, 근래에는 레이저 도플러 진동 측정계와 같은 비접촉식 계측기의 연구가 활발하게 진행되고 있으며, 또한 널리 쓰이고 있다.

빠른 데이터 확보를 위해 반사경과 구동계를 사용, 레이저로 구조물을 연속 스캐닝하는 방식이 소개되었고, 라[2] 등에 의해서 스캐닝궤적이 정확하게 사인형태를 이루는 연구가 진행되었다. 연속 스캐닝을 이용한 모드 형상 추출 알고리즘에 대한 기존의 연구 결과를 살펴보면, 체비셰프 다항식을 이용한 방법이 주로 사용되고 있고[3-8], 힐버트 변환을 이용하는 방식도 소개되었다[9].

2. 연속 스캐닝

1차원의 외팔보가 스캐닝할 대상체이고, 대상체는 물체 자체의 공진주파수중의 하나로 가진되고 있다. 공간의 속도분포는 stationary하다고 가정한다. 스캔은 x축상에서 수행되며, -1 에서 +1 까지 스캔하는 것으로 정규화하였다. 그러면, 측정하는

* 광주과학기술원 기전공학과 교수
E-mail : smwang@kjist.ac.kr
Tel.:(062)970-2390, Fax:(062)970-2384

** 광주과학기술원 기전공학과 박사과정

+ 조선대학교 기계설계공학과 교수

++ 조선대학교 기계설계공학과 박사과정

남선산업 (주) 정보사업부 대표

위치는 다음 식(1)과 같이 표현할 수 있다.

$$x(t) = \cos(\Omega_y t) \quad (1)$$

단, Ω_y 는 스캐닝 주파수이다.

2.1 체비셰프 방법

모드 형상의 추출에는 여러 가지 방법이 있으나, Sriram 등이 후처리 과정으로 체비셰프 방법을 제안하였다[2]. 체비셰프 다항식을 사용하면, 대상체의 시간에 따른 진동속도를 이용하여, 모드형상을 대략적인 다항식으로 표현할 수 있다.

한편, 일차원 모드 형상은 다음과 같이 V_m 을 계수로 하는 m 차 다항식으로 표현할 수 있다.

$$\phi(x) = \sum_m V_m x^m \quad (2)$$

위의 측정 위치 식(1)을 식(2)에 대입하면, 모드 형상을 시간에 따른 함수로 표현할 수 있다.

$$\phi(x) = \phi[\cos(\Omega_y t)] = \sum_m V_m \cos^m(\Omega_y t) \quad (3)$$

삼각함수의 공식(4)와 type I 체비셰프 다항식(5)를 이용하면,

$$\cos^{2\gamma} \alpha = \frac{1}{2^{2\gamma}} \left\{ \sum_{\beta=0}^{\gamma-1} 2_{2\gamma} C_{\beta} \cos 2(\gamma - \beta)\alpha + 2_{\gamma} C_{\gamma} \right\} \quad (4)$$

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \quad (5)$$

모드 형상은 다음 식(6)과 같이 간략하게 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_m V_m \cos^m(\Omega_y t) \\ &= A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} 2A_m \cos(m\Omega_y t) \\ &= A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} 2A_m \cos(m \cdot \cos^{-1} x) \\ &= A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} 2A_m T_m(x) \end{aligned} \quad (6)$$

위 식중 A 는 푸리에 계수로서 속도신호를 푸리에 변환하여 얻을 수 있다.

계수를 추출하기 위해, 속도 분포가 다음과 같다고 하면,

$$v(x, t) = \phi(x) \cdot \sin(\omega t) \quad (7)$$

위의 속도는 시간의 함수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} v(t) &= A_0 \sin(\omega t) + \sum_{m=1}^{\infty} 2A_m \cos(m\Omega_y t) \cdot \sin(\omega t) \\ &= A_0 \sin(\omega t) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \{ \sin[(\omega + m\Omega_y)t] + \sin[(\omega - m\Omega_y)t] \} \end{aligned} \quad (8)$$

이때의 계수들이 푸리에 계수이다. 계수를 구하여 위의 모드형상 식(6)에 대입하여 값을 구한다. 이때 계수들은 물체의 공진주파수와 스캐닝 주파수의 배수만큼 떨어진 측파대에서 추출한다. 단, 계수 추출시에 FFT를 취한 데이터의 Phase도 함께 계산하여 비교하여야 한다. 위상이 0이면 계

수는 양의 값을 가지고, 위상이 180° 혹은 -180° 이면 부호가 반대가 되어야 한다.

위의 푸리에 계수만으로도 모드형을 표현하는 것은 가능하나, 이를 오로지 x 의 함수로 나타내기 위해서는 체비셰프 다항식의 특징을 이용해야만 한다.

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \quad (9)$$

위의 식으로부터 변환 행렬을 얻을 수 있고, 변환행렬을 통해 다항식으로 표현이 가능하다.

2.2 힐버트 방법 [9]

진동학에서 힐버트 변환은 주로 충격응답으로부터 공진의 댐핑계수를 추정한다든지, cross correlation으로부터 propagation time을 계산할 때 사용되었다.

장[9]은 Hilbert 변환을 모드 형상 계산에 응용하였다. 연속 스캐닝된 속도 신호의 점근선은 모드 형상을 나타내고, 위상은 모드 형상의 부호를 나타낸다.

연속 스캐닝을 통해 얻은 속도 신호를 $v(t)$ 라 하고, 힐버트 변환된 속도를 $\tilde{v}(t)$ 라 하면 다음과 같다.

$$\tilde{v}(t) \equiv H\{v(t)\} \quad (10)$$

점근선을 계산하기 위해 아래의 $z(t)$ 와 같은 함수를 가정하면

$$z(t) = v(t) + j\tilde{v}(t) = E(t)e^{j\theta(t)} \quad (11)$$

아래의 식에 의해 원하는 점근선 및 위상을 구할 수 있다.

$$E(t) = \sqrt{v^2(t) + \tilde{v}^2(t)} \quad (12)$$

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{\tilde{v}(t)}{v(t)}\right) \quad (13)$$

3. Experiments for errors

그림 1과 같은 외팔보를 사용하여 수치 실험을 수행하고, 그림 2의 장비로 실제 실험을 수행하였다.

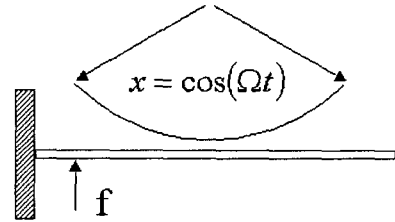


Fig. 1 외팔보와 스캐닝 모양

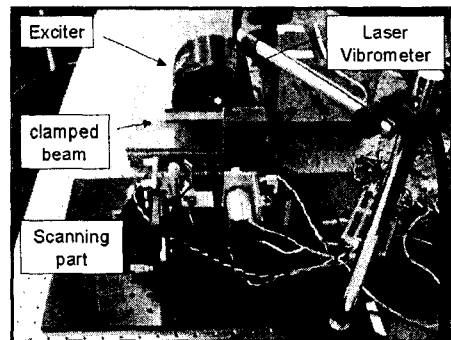


Fig. 2 스캐닝 실험 모습

외팔보의 모드 형상은 수식적으로 아래 식(14)와

같이 표현된다 [11].

$$W(x) = C_n \left[\begin{array}{l} \sin \beta_n x - \sinh \beta_n x \\ + \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x) \end{array} \right] \quad (14)$$

단, 계수값은 아래와 같다.

$$\alpha_n = \left(\frac{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l} \right), \quad \begin{array}{l} \beta_1 l = 1.875104 \\ \beta_2 l = 4.694091 \\ \beta_3 l = 7.854757 \\ \beta_4 l = 10.995541 \end{array}$$

대상체의 모달 정보를 파악하는 것은 중요하지만, 본 연구에서는 모드 형상 계산에 초점을 맞추었다. 실험에 사용한 모드 형상은 외팔보의 2차 bending 모드로서 두 가지 방법에 대해 표 1에 나타내었다.

표 1. 에러가 없는 경우의 모드 형상 비교

Analytic	체비세프 방법	힐버트 방법
이론 모드형상	FFT data	위상
속도 신호	계산 모드 형상	계산 모드 형상
Measured	체비세프 방법	힐버트 방법
이론 모드형상	FFT data	위상
속도 신호	계산 모드 형상	계산 모드 형상

고유주파수의 정확한 계산, 스캐닝 시스템의 거울의 불안정한 진동의 영향, 속도신호에 포함된 잡음의 영향등이 고려되기도 하였으나 모드 형상 계산에 큰 영향을 주지 않는 것으로 밝혀졌다.

3.1 측정 위치

연속 스캐닝을 하는 방법에도 여러가지가 있으나 주로 사용되는 것이 삼각함수를 이용하는 방식이다. 본 연구에서는 코사인 함수의 모양으로 스캔하는데, 스캔하고자 하는 대상체의 양쪽 끝이 시작점이 될 수 있다. 빔의 스캔 시작위치와 측정 시작위치가 다른 경우에 대해서 시뮬레이션과 실험을 수행하였고 그 결과를 표 2에 나타내었다.

표 2. 측정위치변화에 따른 모드 형상 비교

Analytic	체비세프 방법	힐버트 방법
이론 모드형상	FFT data	위상
속도 신호	계산 모드 형상	계산 모드 형상
Measured	체비세프 방법	힐버트 방법
이론 모드형상	FFT data	위상
속도 신호	계산 모드 형상	계산 모드 형상

체비세프 방법의 경우, 주파수 성분은 이상적인 경우와 거의 비슷하게 추정되었으나, 위상 정보가 달라

저서 모드 형상이 일그러짐을 알 수 있다.

한편, 힐버트 방법의 경우, 스캔과 측정이 동시에 triggering되지 않으면 모드 형상이 찌그러짐을 알 수 있다. 이를 해결하기 위해서 스캔위치 정보와 데이터 측정 시작점이 동시에 감시되어야 한다.

3.2 불연속점이 있는 구조물

대부분의 물체가 이러한 부분을 가지고 있다. 그러한 불연속적인 지점을 스캔 빔이 지나갈 때, 스캔된 신호는 매끄러운 면을 스캔한 신호와 다르다는 것은 상식적으로 알 수 있다. 그리고 그러한 신호는 왜곡된 모드형상으로 계산될 수 있다.

표 3. 불연속인 모드 형상 비교

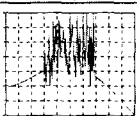
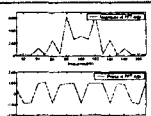

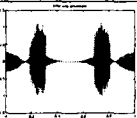
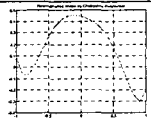
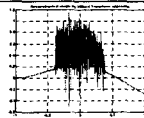
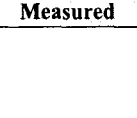
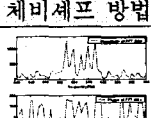

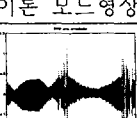
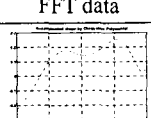
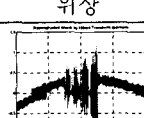
Analytic	체비셰프 방법	힐버트 방법
		
이론 모드형상	FFT data	위상
		
속도 신호	계산 모드 형상	계산 모드 형상
Measured	체비셰프 방법	힐버트 방법
		
이론 모드형상	FFT data	위상
		
속도 신호	계산 모드 형상	계산 모드 형상

표 3을 보면, 힐버트 방법의 경우, 이러한 불연속 구조물의 모드 형상은 쉽게 계산됨을 알 수 있다. 그러나 체비셰프 방법에서는 DFT 특성 때문

에, 모드형상이 일그러질 수 밖에 없다.

4. 결론

본 연구를 통해, 스캔 데이터를 이용한 진동모드형상 계산 프로그램이 개발되었다. 외팔보의 두번째 모드 형상을 대상으로 하여, 두가지 에러요인에 대해 실험이 수행되었다. 측정시작점과 스캔 시작점이 다른 경우와 불연속점이 있는 구조물의 경우에 대해 수행된 실험에서, 힐버트 방법이 좀더 강건한 특성을 나타내었다.

그러나, 물체가 단일 주파수로 가진되지 않고, 충격함수나 랜덤함수로 가진될 경우에는 체비셰프 방법을 사용하여야 한다. 이때 정확한 모드 형상 계산을 위해서 위상정보를 정확히 얻어내는 것이 필수요소이다.

후 기

이 연구는 2002년도 산자부 산업기술개발사업에 의하여 지원되었음.

참 고 문 헌

1. David J. Ewins, Modal Testing: Theory and Practice. (Research Studies Press Ltd., John Wiley & Sons Inc., England, 1984)
2. J. La, J. Choi, S. Wang, K. Kim, and K. Park, "Continuous scanning laser Doppler vibrometer for mode shape analysis", Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, accepted for publication Aug. 6 (2002)
3. P. Sriram, S. Hanagud, J. Craig and N. M. Komerath, "Scanning Laser Doppler Technique for velocity profile sensing on a moving surface", Applied Optics, Vol.29, No.16, pp.2409-2417 (1990)
4. P. Sriram, Sathya V. Hanagud and James I. Craig, "Scanning Laser Doppler Technique for Modal Testing of

Distributed-Parameter Systems”, AIAA Journal, Vol.30, No.3, pp.765-766 (1992)

5. P. Sriram, S. Hanagud and J. I. Craig, “Mode Shape Measurement Using a Scanning Laser Doppler Vibrometer”, The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol.7, No.3, pp.169-178 (1992)

6. A. B. Stanbridge and D. J. Ewins, “Structural Modal Analysis Using A Scanning Laser Doppler Vibrometer”, International Forum On Aeroelasticity and Structural Dynamics, pp.85.1-85.7 (1995)

7. A. B. Stanbridge and D. J. Ewins, “Using a Continuously-Scanning Laser Doppler Vibrometer for Modal Testing”, Proc. Of IMAC XIV, pp.816-822 (1996)

8. A. B. Stanbridge and D. J. Ewins, “Modal Testing Using A Scanning Laser Doppler Vibrometer”, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol.13, No.2, pp.255-270 (1999)

9. M. S. Kang, A. B. Stanbridge, T. G. Chang and H. S. Kim, “Measuring Mode Shapes with a Continuously Scanning Laser Vibrometer – Hilbert Transform approach”, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol.16, No.2-3, pp.201-210 (2002)

10. Practical use of the “Hilbert transform”, Application Note, Bruel&Kjaer

11. Singiresu S. Rao, *Mechanical Vibration, 3rd edition*. (Addison-Wesley Publishing Company, Inc., United States of America, 1995)