

# 계측기에서 얻어진 주파수 응답 함수의 오차 제거 방안 - 전달함수 합성법에의 응용 -

## A Suggestion of Method to Remove Bias Error of the FRF Obtained by FFT Analyzer - Application of TFS -

김승엽\*·정의봉\*\*·서영수\*

Seung Yup Kim, Weui Bong Jeong and Young Soo Seo

**Key Words :** Frequency Response Function(FRF), Transfer Function Synthesis(TFS), Bias Error, FFT Analyzer, Impulse Response Function

### ABSTRACT

The frequency response function(FRF) of each substructure is used for the transfer function synthesis method(TFS). The dynamic characteristics of the full system are obtained by synthesizing FRFs of each substructure. The validation of TFS depends on accuracy for FRF of each substructure. Impact hammer testing is widely used to obtain the modal characteristics of structures. However, the FRF obtained from impact hammer testing contains bias errors, such as finite record length error and leakage error of which characteristic depends on data acquisition time which we call record length. In this paper, a method to remove these errors is proposed so as to enhance results of TFS. Numerical and experimental examples show that the FRF of full structure can be predicted nearly exactly by the method proposed in this paper.

### 1. 서론

선박 등의 대형 구조물의 동특성을 파악할 때 주로 전체 구조물을 부분구조로 나누어 전달함수 합성법(Transfer Function Synthesis, 이하 TFS)을 사용한다. 그런데, 만약 부분구조에서 약간의 bias 오차가 발생할 경우 오차 전파에 의해 전체구조물의 특성을 제대로 파악하기 힘들 것이다.

각 부분구조 전달함수의 주파수 응답 함수(Frequency Response Function, 이하 FRF)를 구할 때 비교적 실험하기 쉬운 충격해머 실험이 널리 사용되고 있다. 그런데, 비주기적인 충격신호를 디지털 신호처리 하여 구한 충격응답함수는 신호획득시간의 길이에 따라 값이 달라지는 결점을 가지고 있다.<sup>(1)</sup> 이러한 각 부분구조에서 발생한 왜곡된 스펙트럼에 의해 더욱 왜곡된 TFS 결과를 얻게 된다.<sup>(2)</sup>

본 논문에서는 보다 정확한 크기와 위상을 가지는 FRF를 구하는 방법을 소개하고, 적용 예로 수치해석적인 방법과 실험적인 방법으로 구한 각각의 FRF를 대상으로 삼고, 이를 TFS에 적용하여 정확한 FRF를 구하고자 한다.

### 2. 전달함수 합성법의 구성

Fig. 1 과 같이 부분구조 A 와 부분구조 B 가 강성 k 와 감쇠 c 로 연결되어있을 때, 결합점의 부분구조 A 에서 f 점 가진에 의한 결합점 i 의 응답을  $G_{if}^A = \frac{X_i^A}{F_f}$  라 하고, 결합점 i 가진에 의한 결합점 j 의 응답을  $G_{ji}^A = \frac{X_j^A}{R_i}$  라 하고, 부분구조 B 에서 결합점 i 가진에 의한 결합점 j 의 응답을  $G_{ji}^B = \frac{X_j^B}{R_i}$  라 하자.<sup>(3)</sup> 결합점 i 에서 각 부분구조 A, B 에서의 변위는 다음과 같다.

$$X_i^A = G_{if}^A F_f + \sum_{k=1}^n G_{ik}^A R_k \quad (1)$$

$$X_i^B = G_{in}^B R_1 + \sum_{k=1}^n G_{ik}^B R_k \quad (2)$$

여기서, i 점에서의 반력  $R_i$  는 다음과 같다.

$$R_i = (K_i + j\omega c_i)(X_i^B - X_i^A) \quad (3)$$

식(3)을 매트릭스 형태로 나타내면, 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ k_1 + j\omega c_1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & k_n + j\omega c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^B \\ X_2^B \\ \vdots \\ X_n^B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1^A \\ X_2^A \\ \vdots \\ X_n^A \end{bmatrix} \quad (4)$$

\* 정회원, 부산대학교 기계설계공학과 대학원

\*\* 정회원, 부산대학교 기계공학부

E-mail : wbjeong@pusan.ac.kr

Tel : (051) 510-2337, Fax : (051) 517-3805

식(4)에서 반력을 구하여 결합후의 응답점  $r$  에서

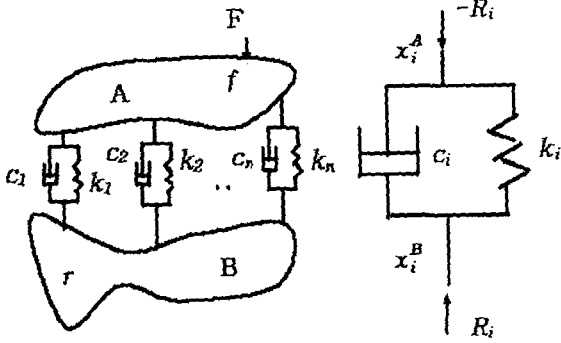


Fig. 1 A schematic model for TFS

의 변위 값은 식(5)와 같이 예측할 수 있다.

$$X_r^A = [G_{r1}^A \quad G_{r2}^A \quad \dots \quad G_{rn}^A] \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

### 3. 충격응답 스펙트럼의 오차

점성감쇠를 가진 진동계의 운동방정식에서 힘을 Dirac delta 함수로 나타내면

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (6)$$

$$\text{단, } f(t) = F_0 \delta(t)$$

와 같고, 변위 응답은

$$x(t) = F_0 h(t) = F_0 \frac{e^{-\zeta\omega_d t}}{m\omega_d} \sin\omega_d t, \quad t \geq 0 \quad (7)$$

과 같다. 여기서  $h(t)$  는 단위충격응답함수이다. 식(7)과  $f(t)$  를 푸리에 변환하면 다음과 같다.<sup>(1)</sup>

$$\frac{X(j\omega)}{F_0} \Big|_{T>0} = \frac{1}{k - \omega^2 m + j\omega c} [1 - E(j\omega)]_T \quad (8)$$

여기서 유한획득시간오차  $E(j\omega)_T$  는

$$E(j\omega)_T = e^{(-\zeta\omega_n - j\omega)T} \left\{ \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_d T + \cos\omega_d T + j\frac{\omega}{\omega_d} \sin\omega_d T \right\} \quad (9)$$

이고  $\lim_{T \rightarrow \infty} E(j\omega)_T = 0$  임을 알 수 있으며  $T$  를 무한히 크게 하면 다음과 같은 이론식에 수렴하게 됨을 알 수 있다.

$$H(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X(\omega)_T}{F(\omega)_T} = \frac{1}{k - \omega^2 m + j\omega c} \quad (10)$$

## 4. Bias 오차 개선 방법

### 4.1 Bias 오차개선을 위한 이론적 해석

신호획득시간과 주파수 분해능에 의한 Bias 오차를 개선하기 위하여 이론적인 모드해석을 통해 FRF 를 구하기로 한다.

감쇠 다자유도계에서의 응답신호는 다음과 같다.

$$h(t) = \sum_{r=1}^n A_r e^{-\sigma_r t} \sin\omega_{dr} t \quad (11)$$

$$\text{단, } A_r = \frac{1}{m_r \omega_{nr} \sqrt{1-\zeta_r^2}} \quad (11a)$$

$$\sigma_r = \zeta_r \omega_{nr} \quad (11b)$$

$$\omega_{dr} = \sqrt{1-\zeta_r^2} \omega_{nr} \quad (11c)$$

식(11)을 푸리에 변환하여 등비급수 합 공식을 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\tilde{H}(k\Delta f) = \frac{T_{RL}}{2} \sum_{r=1}^n A_r \left[ \frac{1 - e^{-\sigma_r T_{RL}} \cdot e^{j2\pi((p_r+q_r)-k)T_{RL}}}{2\pi\{(p_r+q_r)-k\} - j\sigma_r T_{RL}} + \frac{1 - e^{-\sigma_r T_{RL}} \cdot e^{-j2\pi((p_r+q_r)+k)T_{RL}}}{2\pi\{(p_r+q_r)+k\} - j\sigma_r T_{RL}} \right] \quad (12)$$

여기서,  $T_{RL}$  은 신호획득 시간을 나타내고,  $A_r$  은 진폭,  $\sigma_r$  은 감쇠상수,  $p_r$  은 정수로  $r$  차 모드의 피크가 있는 위치의 일련번호로 지지값이 되고,  $q_r$  은 소수로 주파수 분해능 때문에 스펙트럼 상에서는 나타낼 수 없는 미지값인 주파수 오차량이다. 즉, 모드의 정확한 주파수는  $(p_r + q_r) \times \Delta f$  로 나타낼 수 있다.

최적화를 위한 목적함수를 구성하기 위해 설계변수로  $q_r$ ,  $\sigma_r$ ,  $A_r$  ( $r = 1, \dots, n$ )의 함수로 구성하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{H}_k(\{q\}^T \{A\}^T \{\sigma\}^T) = \text{Re}[\tilde{H}_k(\{q\}^T \{A\}^T \{\sigma\}^T)] - j\text{Im}[\tilde{H}_k(\{q\}^T \{A\}^T \{\sigma\}^T)] \quad (13)$$

최적화를 위한 목적함수는 식(13)으로 표현되는 이론식과 실험으로 구한 충격응답스펙트럼과의 오차를 제공한 값들의 합으로 다음과 같이 정의한다. 미지수인 설계변수는  $u_i$  ( $i = 1, \dots, 3n$ )로 총칭한다.

$$J(\{q\}^T \{A\}^T \{\sigma\}^T) = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} \{ \text{Re}[\tilde{H}_k(\{q\}^T \{A\}^T \{\sigma\}^T)] - \text{Re}[\hat{H}(k\Delta f)] \}^2 + \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} \{ \text{Im}[\tilde{H}_k(\{q\}^T \{A\}^T \{\sigma\}^T)] - \text{Im}[\hat{H}(k\Delta f)] \}^2 \quad (14)$$

목적함수의 설계변수에 대한 미분은 다음과 같다.

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} = 2 \sum_{k=0}^{k-1} \left( \{ \text{Re}[\tilde{H}_k] - \text{Re}[\hat{H}(k\Delta f)] \} \frac{\partial \text{Re}[\tilde{H}_k]}{\partial u_i} + \{ \text{Im}[\tilde{H}_k] - \text{Im}[\hat{H}(k\Delta f)] \} \frac{\partial \text{Im}[\tilde{H}_k]}{\partial u_i} \right), \quad i=1, \dots, 3n \quad (15)$$

식(15)와 같이 목적함수의 설계변수에 대한 미분값이 구해지면 최적화 기법을 이용하여 식(14)를 최소화하는 설계변수를 구할 수 있다. Gauss-Newton 법을 이용하여 탐색방향을 다음과 같이 정한다.

$$\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial^2 J}{\partial u_i \partial u_j} \Delta u_j = -\frac{\partial J}{\partial u_i}, \quad i=1, \dots, 3n \quad (16)$$

식(16)의 연립방정식으로부터 탐색방향이 결정되면 1 차원 탐색방법인 황금분할법을 이용하여 식(14)가 최소가 되는 설계변수를 구한다. 이 때 각 모드의 초기치는 다음 식으로 구한다.<sup>(4)</sup>

$$R_{r+}^2 = \frac{|H[p, \Delta f]|^2}{|H[(p, \pm 1)\Delta f]|^2} \quad (17)$$

$$= \frac{[2p_r(q_r \mp 1) + (\sigma_r T_{RL} / 2\pi)^2]^2 + [2(\sigma_r T_{RL} / 2\pi)]^2}{[q_r \cdot 2p_r + (\sigma_r T_{RL} / 2\pi)^2]^2 + [2(\sigma_r T_{RL} / 2\pi)p_r]^2}$$

$$\sigma_r = \frac{\pi}{T_{RL}} \sqrt{-\left( \frac{R_{r+}^2 - R_{r-}^2}{R_{r+}^2 + R_{r-}^2 - 2} \right)^2 + \frac{8}{R_{r+}^2 + R_{r-}^2 - 2}} \quad (18)$$

여기서,  $R_{r+}$ 는 실험으로 구한  $r$  차모드 피크점의 하나 뒤의 점의 크기를,  $R_{r-}$ 는 그 피크점의 하나 앞의 점의 크기를 나타낸다. 식(17), (18)에서  $q_r$ ,  $\sigma_r$ 을 구할 수 있고, 이를 식(12)에 대입하면  $A_r$ 을 구할 수 있다. 이 값을 초기치로 하여 식(14)를 최소화 하는 설계변수  $q_r$ ,  $\sigma_r$ ,  $A_r$  ( $r=1, \dots, n$ )이 구해지면 오차가 제거된 새로운 주파수 응답함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$H(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{A_r \omega_{dr}}{(\omega_{nr}^2 - \omega^2 + j2\sigma_r \omega)} \quad (19)$$

## 4.2 신호획득시간오차의 발생

신호획득시간에 따른 오차를 없애기 위해서는 비교적 긴 시간동안 데이터를 받아야 한다. 하지만, 기존의 방법은 계측기에서 시간응답데이터를 얻을 때, 긴 시간동안 데이터를 받기가 힘들다. 그러므로 본 논문에서는 짧은 시간의 기존 방법에

의한 신호데이터를 대상으로 하여 보다 정확한 FRF를 구해보고자 하는 것이다.

## 5. 수치해석 적용예

### 5.1 모델의 선정

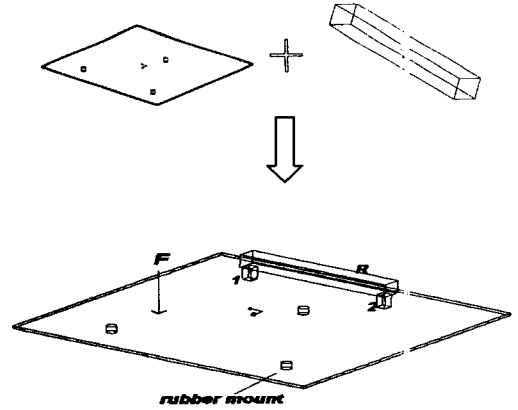


Fig. 2 A Numerical model for TFS

Fig. 2와 같이 평판(부분구조 A)과 보(부분구조 B)가 결합된 전달함수합성 모델을 고려한다. 평판은 가로 500mm, 세로 510mm, 두께 5.9mm, 밀도 7850kg 이고, 바닥에 강성  $k=23939\text{N/m}$ , 감쇠  $c=3\text{N/s/m}$  인 고무 마운트로 지지되어있다. 보(beam)는 가로 30mm, 세로 30mm, 길이 249mm, 밀도 7850kg 이고, 평판과의 결합부 특성은 강성  $k=73548\text{N/m}$ , 감쇠  $c=8\text{N/s/m}$  이다. F는 가진력을 나타내고, 지점 1, 2는 부분구조 결합 전·후의 평판과 보의 연결점을 나타내며, 지점 R은 결합후의 응답점을 나타낸다.

### 5.2 수치해석 방법

본 논문에서 제안하는 방법과 기존의 방법을 비교하기 위하여 정확한 FRF의 도출을 이론적으로 구해보기로 한다. Fig. 2를 유한요소법을 이용하여 운동방정식을 만들면 다음과 같다.

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (20)$$

식(20)에서 [C]는 감쇠행렬로 고무 마운트의 감쇠값에 의해 정의되고 이 미분방정식을 고유치 해석을 하여 고유진동수  $\omega_r$ 와 고유벡터  $\{\phi\}$ 를 구하여 모드 좌표계에서 풀면 다음과 같다.

$$\{\ddot{P}\} + [\phi^T C \phi] \{\dot{P}\} + [\omega_r^2] \{P\} = [\phi^T] \{f\} \quad (21)$$

단,  $\{P\} = [\phi^T] \{x\}$ ,  $[\omega_r^2] = [\phi^T K \phi]$

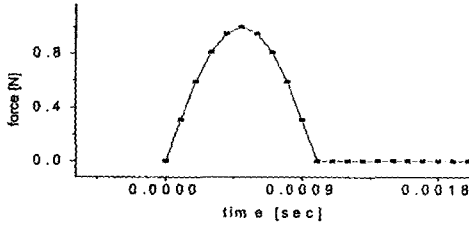


Fig. 3 A typical impulse signal

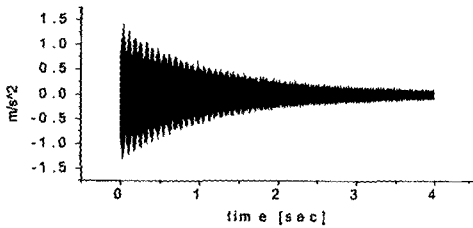


Fig. 4 A typical impulse response signal

식(21)과 같은 모드 좌표계에서  $n$  개의 2 계 미분 방정식을  $2n$  개의 1 계 미분 방정식의 형태로 바꾸면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} P \\ \dot{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[\omega_r^2] & [\phi^T C \phi] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ \dot{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ [\phi^T f] \end{bmatrix} \quad (22)$$

식(22)를 수치적인 방법을 이용하여 시간 데이터를 얻을 수 있다.<sup>(5)</sup> 이 때 충격 가진 시간 신호를 Fig. 3 과 같은 반주기 사인함수로 하고, 이에 대한 응답 시간 신호는 Fig. 4 와 같다. 각각의 가진, 응답 시간 신호를 푸리에 변환(Fourier Transform)을 하여 구하는 충격응답 스펙트럼을 얻게 된다.

### 5.3 기존 방법에 의한 전달함수합성 결과

5.2 절에서 구한 FRF 를 신호획득 시간에 따라 나타내기로 한다. Fig. 5 ~ Fig. 10 에서 참값(Exact)은 식(21)에서  $\{P\} = \{\bar{P}\}e^{j\omega t}$  라 두면,

$$\{\bar{P}\} = (-\omega^2 [I] + j\omega [\phi^T C \phi] + [\omega_r^2])^{-1} \{\phi^T f\} \quad (23)$$

와 같이 표현되므로  $\{x(\omega)\} = [\phi] \{\bar{P}(\omega)\}$  관계로부터 구할 수 있다.<sup>(6)</sup>

Fig. 4 의 응답신호에서 만약 신호획득 시간을

1 초로 하였을 경우 이후의 응답을 무시하게 되므로 왜곡된 FRF 가 예상되며, 4 초로 하였을 경우에는 1 초보다 나은 결과가 예상된다.

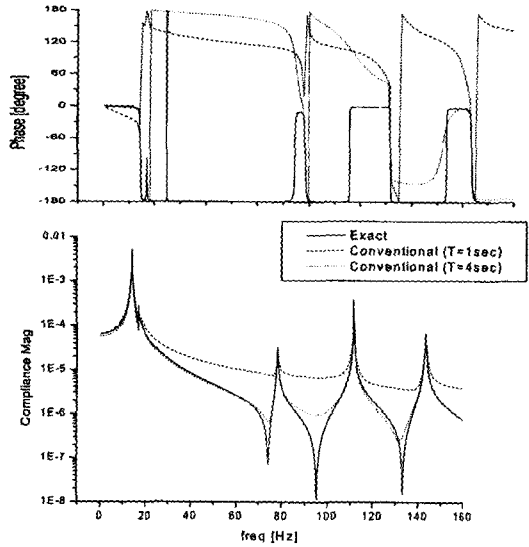


Fig. 5 FRF of  $G_{11}^A$  by conventional method ( $T_{RL} = 1$  sec)

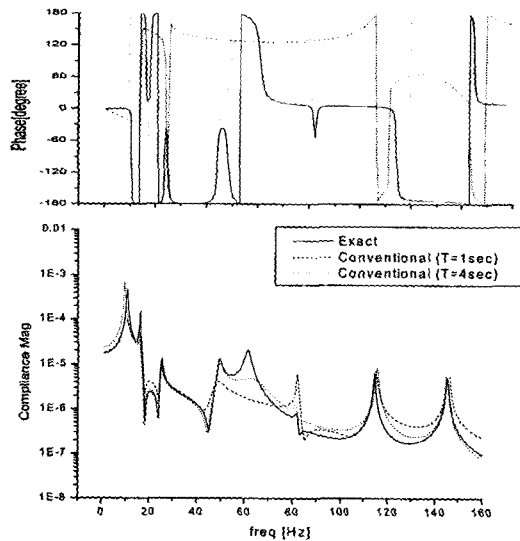


Fig. 6 The spectrum after TFS by conventional method ( $T_{RL} = 4$  sec)

Fig. 5 는 전달함수  $G_{11}^A$  를 신호획득 시간 1 초, 4 초에 따른 FRF 의 크기와 위상을 각각 나타낸 것이고, Fig. 6 은 TFS 결과이다. 신호획득 시간이 짧을 경우 크기와 위상의 차이가 있음을 알 수 있다. 그리고 4 초의 경우 TFS 의 결과가 크기는 비슷하지만,

위상은 정확하지 않음을 알 수 있다. 즉, 신호획득 시간이 길수록 더 나은 FRF를 얻을 수 있다.

#### 5.4 제안하는 방법에 의한 전달함수 합성 결과

5.3 절에서 신호획득 시간에 따른 오차에 의해 정확하지 않은 TFS 결과가 도출되는 것을 알아 보았다. 이제 본 논문에서 제안한 방법으로 수정된 FRF에 의해 TFS를 해 본다. 신호획득 시간 1초일 때의 FRF를 대상으로 하여 제안하는 방법으로 구해본다.

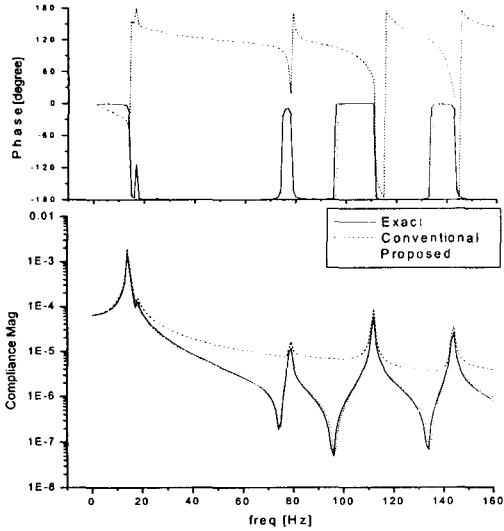


Fig. 7 FRF of  $G_{11}^A$  by proposed method

( $T_{RL} = 1$  sec)

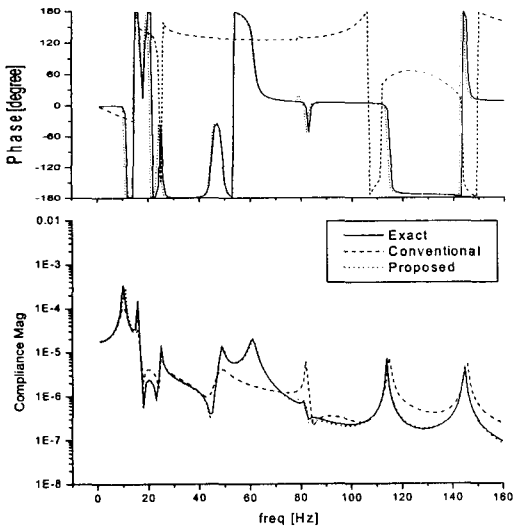


Fig. 8 The spectrum after TFS by proposed method ( $T_{RL} = 1$  sec)

Fig. 7~8은 본 논문에서 제안한 방법으로 수정된 FRF의 크기와 위상을 나타내며, 거의 정확함을 알 수 있다. 수정된 FRF에 의한 전달함수 합성법의 결과 역시 크기와 위상이 거의 정확함을 알 수 있다.

## 6. 실험 적용에

### 6.1 모델 선정

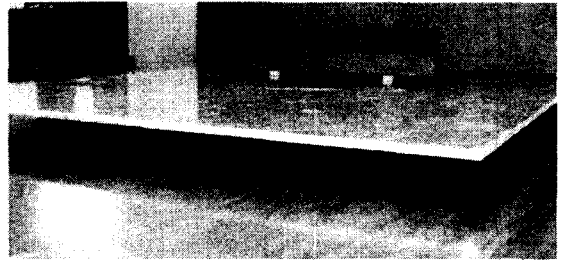
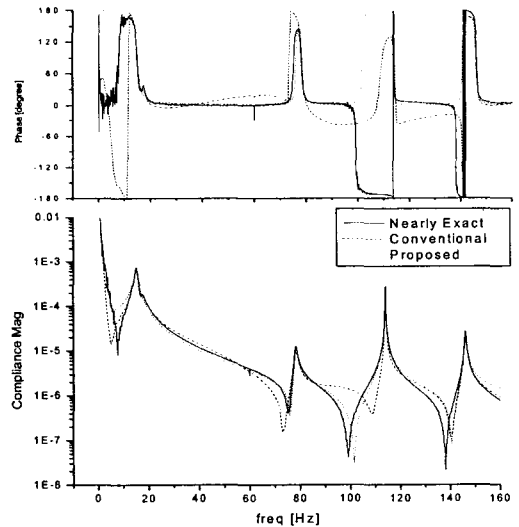


Fig. 9 An experimental model for TFS

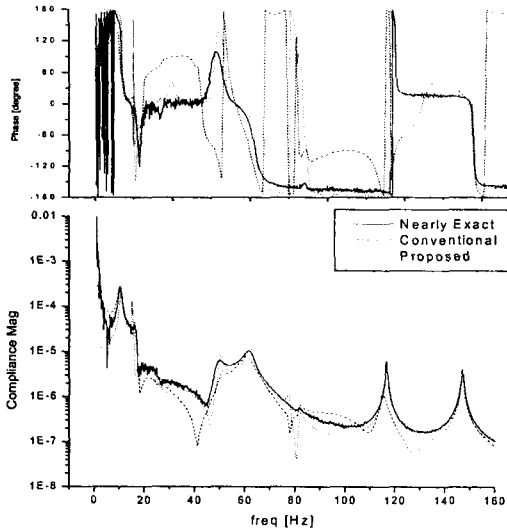
Fig. 9는 이론 적용예의 모델(Fig. 2)과 같으며, 동일한 물성치를 사용했다.

### 6.2 제안하는 방법의 전달함수 결과

실험에 적용하기 위하여 신호획득시간을 8초로 하는 FRF를 거의 정확하다고 가정한다. 그리고, 신호획득시간이 1초일 때의 FRF를 대상으로 하여 제안하는 방법을 적용했다.



**Fig. 10** FRF of  $G_{11}^A$  by proposed method  
( $T_{RL} = 1$  sec)



**Fig. 11** The spectrum after TFS by proposed method ( $T_{RL} = 1$  sec)

Fig. 10 은  $G_{11}^A$  의 FRF 를 나타낸 것으로 제안하는 방법이 기존의 방법인 신호획득시간이 1 초일 때의 결과보다 8 초일 때(Nearly Exact)의 결과에 근접함을 알 수 있고, Fig. 11 에서 TFS 결과로 제안하는 방법이 8 초일 때의 결과에 근접함을 알 수 있다. 그리고, 제안하는 방법은 각각의 모드를 이용한 결과이므로 노이즈도 제거됨을 알 수 있다.

## 7. 결론

- 1) 과도 응답 신호가 소멸될 만큼 신호획득시간이 충분하지 못할 경우, 유한획득시간 오차가 발생하게 된다. 그리고, 신호획득시간에 따라 얻어진 FRF 가 달라지게 됨을 보였다.

2) 실험 시에 발생하는 유한획득시간오차와 주파수분해능오차 등의 bias 오차는 TFS 를 하였을 경우, 더욱 증폭되어 왜곡된 FRF 를 표현함을 보였다.

3) bias 오차를 수정하는 방법을 제시하였으며, 제시한 방법을 이용하여 수치해석과 계측기에서 얻어진 실험치 FRF 에 적용한 결과 신호획득시간에 무관하게 정확한 FRF 를 얻을 수 있었으며 오차가 없는 TFS 가 가능함을 보였다.

4) 앞으로의 과제는 최적화기법의 반복계산을 피하고, 각 모드의 위상차가 고려된 방법으로 동특성을 분석하려고 한다.

## 참고문헌

- (1) 안세진, 정의봉, 2002, “충격해머 가진으로 구한 주파수 응답함수의 오차와 해결방법”, 한국소음진동공학회 논문집, 제 12 권, 제 9 호, pp. 702 ~ 708.
- (2) 정의봉, 안세진, 장호엽, 장진혁, 2001, “디지털 푸리에 변환에서 누설오차의 개선”, 한국소음진동공학회지, 제 11 권, 제 3 호, pp. 455 ~ 460.
- (3) 長松昭男, 1991, 部分構造合成法, 培風館.
- (4) 장진혁, 2000, “푸리에 변환된 다자유도 신호의 누설오차개선”, 부산대학교 일반대학원 기계설계공학과 석사 졸업논문.
- (5) 안세진, 정의봉, 김승엽, 2002, “FRF 누설오차 개선에 의한 전달함수 합성법의 향상”, 한국소음진동공학회 2002 추계발표, p. 354
- (6) Nuno. M. M Maia, Julio M. M. Silva, 1998, Theoretical and Experimental Modal Analysis, Research Studies Press Ltd.