

열린 균열이 있는 일반 회전체계의 효율적인 동적 모델 An Efficient Dynamic Model of General Rotor Systems with Open Cracks

최성환*· 홍성욱**· 이종원***

Sung-Hwan Choi, Seong-Wook Hong, and Chong-Won Lee

Key Words : Rotor System(회전체 계), Open Crack(열린 균열), Finite Element Modeling(유한요소모델링), Equivalent Spring Coefficient(등가스프링상수), Natural Frequency(고유진동수)

ABSTRACT

This paper presents an efficient dynamic modeling method for open cracked rotor-bearing systems. An equivalent bending spring model is introduced to represent the structural weakening effect in the presence of cracks. The proposed modeling method is validated through a series of simulations and experiments. First, the proposed method is rigorously compared with a commercial finite element code. Then, an experiment is performed to validate the proposed modeling method. Finally, a numerical example is introduced to demonstrate the possible application of the proposed method in the crack diagnosis for rotor systems.

1. 서론

회전기계에 있어 균열은 가장 위험한 결함으로 인식되고 있으며 실제로 균열에 의한 회전기계 사고가 많이 보고되고 있다.^[1] 따라서 회전기계의 균열을 조기에 진단하는 것은 회전기계를 포함한 전체 구조물의 안전성을 확보하는데 핵심적인 일이 되고 있으며 최근 회전기계의 균열진단 기술에 대한 활발한 연구가 진행되고 있다.

일반적으로 회전체에 균열이 발생하게 되면 균열 부위에서의 응력집중으로 인해 해당 부위에서 큰 강성의 변화를 일으키게 되며 상대적으로 큰 변형이 발생하는 것으로 알려져 있다.^[2] 따라서 균열의 발생에 따른 이러한 변화를 적절히 파악할 수 있는 방법이 있다면 회전체의 기능을 정지시키거나 훼손하지 않고도 균열을 진단할 수 있기 때문에 많은 연구가 집중되어 왔다.^[2-6]

특히 파괴역학의 개념을 도입하여 균열의 진행에 따른 구조 강성의 변화를 표현하려는 노력이 있어 왔다.^[2-7] 그러나 실제적인 대부분의 균열의 개폐거동(Breathing behavior)^[6,7]은 비선형적인 특성을 보이게 되므로 모델링 및 해석 결과의 일반화에 한계가 있는 실정으로서 많은 연구는 아직까지 열린 균열을 중심으로 진행되어 왔다.

한편, 최근 이종원^[8]은 균열 진단에 관한 보다 적극적인 방법을 제시하고 있는데, 회전기계에 가진장치를 도입하고 이를 이용하여 열린 균열 상태를 유지하도록 함으로서 비선형적 거동을 배제하는 것이다. 이럴 경우, 균열이 있는 회전체는 전형적인 비대칭 회전체의 특성을 보이게 된다. 따라서 열린 균열이 있는 회전체를 비

대칭 회전체로 두고 이에 대한 모델링 및 해석을 통해 균열을 진단하는 방법이 유용할 것으로 기대된다.

본 연구에서는 열린 균열이 있는 일반 회전체의 새로운 모델링 방법을 제시하고 이를 기초로 동특성 해석을 실시하였다. 열린 균열에 의한 강성저하 효과를 표현하기 위해 균열 위치에서의 각변위에 대한 스프링 모형을 적용하였다. 균열에 의해 발생하는 비대칭성을 고려하여 비대칭 회전체에 대해 정지좌표 및 회전 복소 좌표계 운동방정식을 유도하였다. 그리고 이를 기초로 열린 균열을 갖는 회전체에 대한 동특성 변화를 분석하였다.

제시한 방법의 적정성을 확인하기 위해 먼저 균열이 있는 단순 축에 대해 제안된 방법 및 상용 유한요소 코드를 이용한 결과를 비교하였다. 또한 단순 회전축에 균열을 발생시켜 얻은 실험적 고유진동수와 제안된 방법에 의해 계산된 고유진동수를 비교하여 제안된 모델링 방법의 적합성을 검증하였다. 마지막으로, 제안된 방법을 회전체에 적용하는 과정을 설명하기 위한 수치예제를 소개하였다.

2. 열린 균열이 있는 회전축 계의 모델링

2.1 균열 효과 모델링

Fig.1 은 축에 발생한 열린 균열의 기하학적 특성과 좌표계를 보여주고 있다. 여기서 균열이 발생한 방향과 이에 수직인 방향을 나타내는 축회전좌표가 각각 η, ξ 이다.

Fig.2(a)와 같이 열린 균열이 있는 축의 특정 부위를 고려하자. 여기서 균열의 폭은 미세하다고 가정하고 균열이 있는 부위를 기준으로 좌우로 구분하고, 각각을 Fig.2(b)와 같이 부재 1, 2 로 두었을 때 부재 1 의 우측단과 부재 2 의 좌측단 간에는 다음과 같은 연속 조건이

* 금오공과대학교 대학원, 삼성탈레스

** 정회원, 금오공과대학교 기계공학부

E-mail : swhong@kumoh.ac.kr

Phone : 054-467-4214, Fax : 054-467-4472

*** 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

성립한다고 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_{1yR} &= u_{2yL}, u_{1zR} = u_{2zL} \\ f_{1yR} &= f_{2yL}, f_{1zR} = f_{2zL} \\ m_{1yR} &= m_{2yL}, m_{1zR} = m_{2zL} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, u 는 보의 횡변위이고 f, m 은 전단력 및 모멘트를 나타낸다. 또, 하첨자 y, z 는 수평 및 수직좌표를 나타내며, 하첨자의 숫자는 부재의 번호를 나타낸다. Fig.2(b)는 변위(u) 및 각변위(ϕ)에 관한 좌표규약을 보여주고 있다.

횡변위와는 달리 각변위는 균열의 존재로 인해 불연속이 발생하게 된다. 축이 정지해 있다고 가정하고 균열에 관한 회전좌표계와 정지좌표계를 일치시키고, y, z 방향 각변위간 연성을 무시한 경우, 각변위에 대해 다음과 같은 관계를 갖는다.

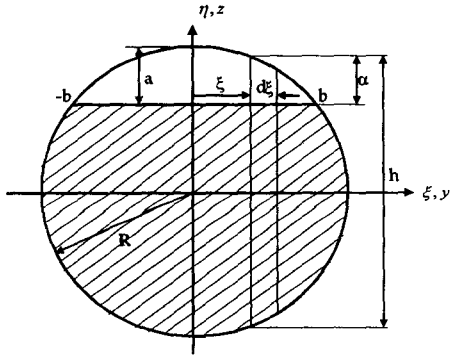
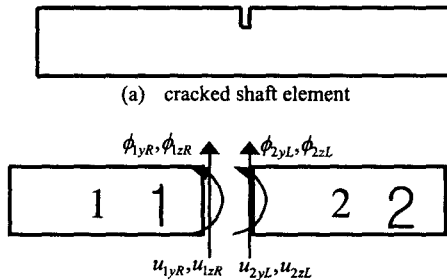


Fig. 1 Sectional view of open cracked shaft and the coordinate system



(b) Sign conventions for partitioned shaft elements

Fig. 2 Cracked shaft element and the sign convention

$$\Delta\phi_y = u'_{2zL} - u'_{1zR} = c_\xi m_y = \frac{1}{k_\xi} m_y, \quad (2)$$

$$\Delta\phi_z = u'_{2yL} - u'_{1yR} = c_\eta m_z = \frac{1}{k_\eta} m_z$$

여기서 Fig. 1 과 같이 정의된 균열에 관한 변수들을 이용하면 균열의 존재에 의한 응력집중에 의한 유연성계수(Flexibility coefficient)는 다음과 같이 쓸 수 있다.^[2,15]

$$c_\xi = \frac{1-\nu^2}{E} \int_{-b}^b \int_0^\alpha \frac{32}{\pi^2 R^8} (R^2 - \xi^2) \pi \eta F_{2\xi}^2 \left(\frac{\eta}{h} \right) d\eta d\xi \quad (3-1)$$

$$c_\eta = \frac{1-\nu^2}{E} \int_0^\alpha \int_{-b}^b \frac{32}{\pi^2 R^8} \xi^2 \pi \eta F_{2\eta}^2 \left(\frac{\eta}{h} \right) d\eta d\xi \quad (3-2)$$

또, 무차원화된 유연성 계수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{c}_\xi = \{ \pi R^3 E / (1-\nu^2) \} c_\xi \quad (4-1)$$

$$\bar{c}_\eta = \{ \pi R^3 E / (1-\nu^2) \} c_\eta \quad (4-2)$$

여기서 ν 는 포아송비(Poisson ratio), 그리고 E 는 영률(Young's modulus)이다. 또, $\alpha = \sqrt{R^2 - \xi^2} - (R - a)$, $h = 2\sqrt{R^2 - \xi^2}$ 로 표현되며 a 는 균열의 깊이이다. 또 보정함수는 다음과 같다.

$$F_{2\xi} \left(\frac{\eta}{h} \right) = \sqrt{\frac{2h}{\pi\eta} \tan\left(\frac{\pi\eta}{2h}\right)} \{ 0.923 + \quad (5-1)$$

$$0.199[1 - \sin\left(\frac{\pi\eta}{2h}\right)]^4 \} / \cos\left(\frac{\pi\eta}{2h}\right)$$

$$F_{2\eta} \left(\frac{\eta}{h} \right) = \sqrt{\frac{2h}{\pi\eta} \tan\left(\frac{\pi\eta}{2h}\right)} \{ 0.752 + 2.02(\eta/h) \quad (5-2)$$

$$+ 0.37[1 - \sin\left(\frac{\pi\eta}{2h}\right)]^3 \} / \cos\left(\frac{\pi\eta}{2h}\right)$$

균열에 의한 각변위 강성 계수는 다음과 같이 모델링을 할 수 있다.

$$k_\xi = \frac{1}{c_\xi}, \quad k_\eta = \frac{1}{c_\eta} \quad (6)$$

이상과 같이 표현된 각변위 스프링 상수는 균열이 깊어질수록 작아지게 되며, 균열이 없는 경우에는 모두 무한의 값을 가지게 된다. 따라서 식(2)로부터 알 수 있는

바와 같이 각변위의 불연속이 없어지고, 균열효과 또한 사라지게 된다.

2.2 열린 균열이 있는 축 요소의 모델링

균열에 의한 축의 비대칭성이 있다면, 균열이 있는 위치 좌우의 두 개 요소를 분리하여 요소 행렬을 구한 후 이들을 조합하여 복소정좌표계에서 균열이 있는 축 요소 운동방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M^c \ddot{p}^c - j\Omega G^c \dot{p}^c + K^c p^c + K_r^c e^{j2\Omega t} \bar{p}^c = g^c \quad (7)$$

여기서 상첨자 c 는 균열이 포함된 요소를 의미한다. 또, p^c 는 균열이 있는 축요소에 대한 복소좌표벡터이며 M^c, G^c, K^c, K_r^c 는 축의 유한 요소 행렬을 조합하여 얻게 된다. 관성행렬과 자이로 행렬의 두 요소간 조합은 다음과 같이 이루어지게 된다.

$$M^c \text{ or } G^c = \begin{bmatrix} A & A & A & A & 0 & 0 & 0 \\ A & A & A & A & 0 & 0 & 0 \\ A & A & A+B & A & B & B & B \\ A & A & A & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 & B & B & B \\ 0 & 0 & B & 0 & B & B & B \\ 0 & 0 & B & 0 & B & B & B \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서 A 와 B 는 각각 부재 1 과 부재 2 의 요소를 의미한다. 또, 강성행렬은 각각 다음과 같이 조합된다.

$$K^c = \begin{bmatrix} A & A & A & A & 0 & 0 & 0 \\ A & A & A & A & 0 & 0 & 0 \\ A & A & A+B & A & B & B & B \\ A & A & A & A+k_m & -k_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & -k_m & B+k_m & B & B \\ 0 & 0 & B & 0 & B & B & B \\ 0 & 0 & B & 0 & B & B & B \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$K_r^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_d & -k_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_d & k_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서 $k_m = \frac{k_\xi + k_\eta}{2}$, $k_d = \frac{k_\xi - k_\eta}{2}$ 로 정의한다.

2.3 전역 운동방정식 및 고유치 문제

고려 대상이 되는 회전체 계를 등방성이라고 가정하도록 한다. 회전체 전체를 요소로 구분하고 균열이 없는 요소는 부록의 요소행렬을 적용하고 균열이 있는 요소는 식(7)과 같이 얻어진 요소행렬을 적용하여 전역행렬을 구성한다. 또한 강체디스크나 베어링 등의 집중요소행렬도 전역행렬에 포함시켜서 전역운동방정식을 구성하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M^G \ddot{p} + C_{ff}^G \dot{p} + K_{ff}^G p + K_r^G e^{j2\Omega t} \bar{p} = g \quad (11)$$

여기서

$$C_{ff}^G = C^b - j\Omega G^{s+d}, \quad K_{ff}^G = K^b + K^s$$

여기서 상첨자 G 는 전역행렬을 의미하며, 상첨자 s, d, b 는 각각 축, 디스크 그리고 베어링을 의미한다

식(11)를 회전좌표계로 변환하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

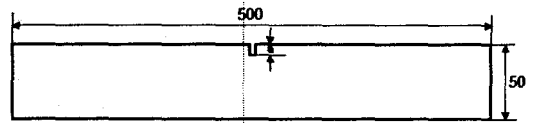


Fig. 3 Numerical cracked shaft model

Table 1 Specification of the numerical cracked shaft model

Property	Data
Dimension	$L = 50cm$ $R = 2.5cm$
Young's Modulus	$2.08 \times 10^{11} N/m^2$
Density	$7833 kg/m^3$
Poisson Ratio	0.3

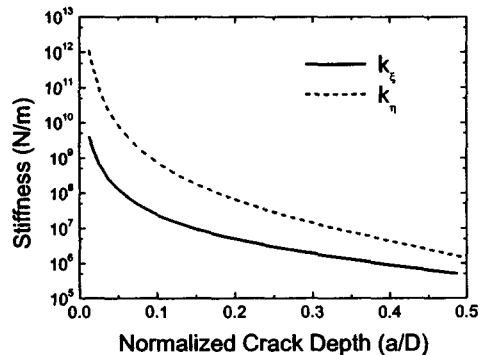


Fig. 4 Equivalent bending stiffness coefficients for the numerical cracked shaft model

$$M^G \ddot{r} + (C_{ff}^G + 2j\Omega M) \dot{r} + (K_{ff}^G + j\Omega C_{ff}^G - \Omega^2 M^G) r + K_r^G \bar{r} = g^* \quad (12)$$

여기서 $p = re^{j\Omega t}$, $g = g^* e^{j\Omega t}$ 로 정의된다.

따라서 식(12)로부터 다음과 같은 상태방정식을 유도할 수 있다.

$$A\dot{X} + BX = F \quad (13)$$

여기서

$$X = \begin{Bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\bar{r}} \\ r \\ \bar{r} \end{Bmatrix}, F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ g^* \\ \bar{g}^* \end{Bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} M^G & 0 \\ 0 & M^G \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_{ff}^G + 2j\Omega M^G & 0 \\ 0 & \bar{C}_{ff}^G - 2j\Omega M^G \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{ff}^G + j\Omega C_{ff}^G - \Omega^2 M^G & K_r^G \\ \bar{K}_r^G & \bar{K}_{ff}^G - j\Omega \bar{C}_{ff}^G - \Omega^2 M^G \end{bmatrix}$$

식(13)에 대응되는 고유치 문제는 다음과 같이 쓸 수 있다.

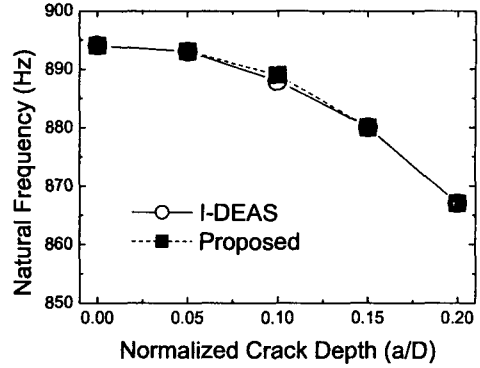
$$(\lambda A + B)X = 0 \quad (14)$$

3. 제안된 모델링 방법의 검증

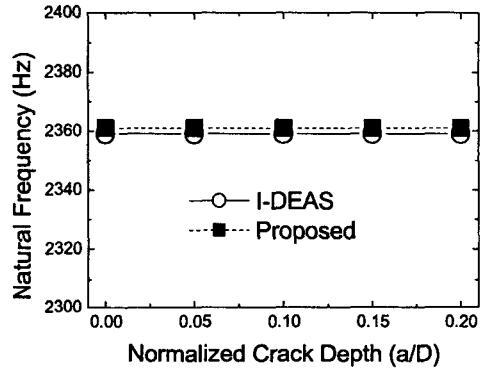
3.1 수치적 검증

제안된 모델링 방법의 타당성을 검증하기 위하여 단순 균일 축의 중앙에 균열이 존재하는 경우의 고유진동수 변화를 분석하였다. 고려한 축은 Fig. 3 과 같고 정지 상태이며 양단 모두 자유단인 조건을 고려하였으며, 그 밖의 사양은 Table 1 에 주어진 바와 같다. Fig. 4 에는 본 예제에서 고려하고 있는 축에 대해 균열의 깊이에 따른 각변위 스프링 상수의 변화를 보여주고 있다.

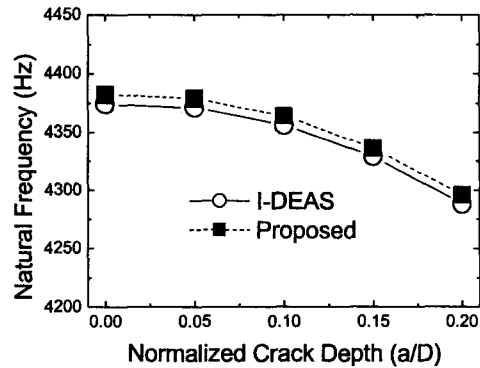
비교를 위해 일반적인 상용 코드인 I-DEAS⁽¹⁰⁾를 이용하여 균열 있는 축에 대한 정밀한 모델링을 하여 고유진동수를 계산하였다. 고유진동수는 균열이 발생한 방향의 모드만을 고려하였다. 모델링에는 요소당 16 절점을 갖는 6 면체형 요소(Hexahedral element)를 이용하였고, 요소의 수는 약 18,000 개를 적용하여 충분한 정밀도를 확보할 수 있도록 하였다.



(a) 1st mode



(b) 2nd mode



(c) 3rd mode

Fig. 5 Natural frequencies of a uniform shaft model (numerical model) by I-DEAS and the proposed method

Table 2 Comparison of natural frequencies of the experimental model (cracked direction : η)

Mode	Method	Natural frequency (Hz)		
		a/D=0.1	a/D=0.2	a/D=0.3
1	Experiment	455	450	437
	I-DEAS	455	449	438
	Proposed	455	450	438
2	Experiment	1245	1245	1245
	I-DEAS	1244	1244	1244
	Proposed	1244	1244	1244
3	Experiment	2395	2370	2330
	I-DEAS	2392	2370	2329
	Proposed	2393	2371	2330

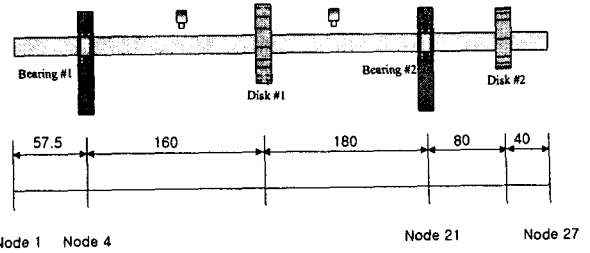


Fig. 6 Numerical model

Table 3 Comparison of natural frequencies of the experimental model (orthogonal to the cracked direction: ξ)

Mode	Method	Natural frequency (Hz)		
		a/D=0.1	a/D=0.2	a/D=0.3
1	Experiment	458	457	454
	I-DEAS	457	456	454
	Proposed	457	456	454
2	Experiment	1246	1246	1246
	I-DEAS	1244	1244	1244
	Proposed	1244	1244	1244
3	Experiment	2404	2400	2392
	I-DEAS	2399	2396	2389
	Proposed	2399	2397	2389

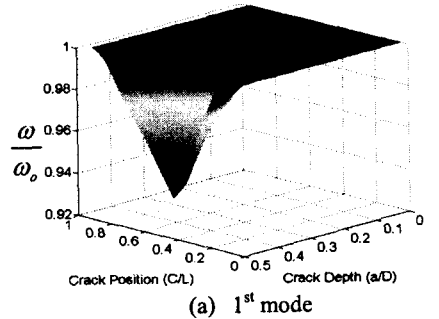
상용코드에 의해 계산된 고유진동수를 기준으로 두고 제안된 방법에 의해 고유진동수를 계산한 결과와 비교하였다.

Fig. 5 에는 상용코드 I-DEAS 및 제안된 방법에 의한 고유진동수 계산 결과를 비교해서 보여주고 있다. 결과에서 알 수 있는 바와 같이 제안된 방법과 상용 코드에 의한 계산 결과가 제시된 3 개 모드에서 모두 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다.

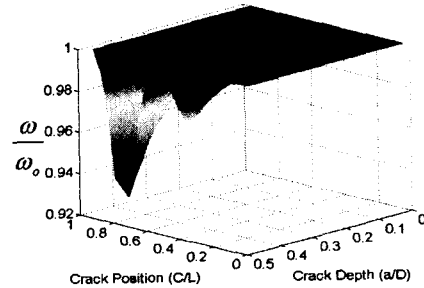
3.2 실험적 검증

제안된 모델의 타당성을 확인하기 위하여 실험을 실시하였다. 균일한 축의 중앙에 서로 다른 깊이의 균열을 발생시킨 후 고유진동수를 측정하고 이를 제안된 방법으로 계산한 결과와 비교하였다. 실험에 사용된 시편은 길이가 50cm, 직경이 2.5cm 로서 중앙에 1mm 의 폭으로 열린 균열을 발생시켰다. 양단 모두 자유단 조건을 주었다.

Table 2, 3 에서는 균열의 발생 방향과 그 직각 방향으로의 고유진동수에 대해 실험에 의해 얻어진 고유진동수와 제안된 방법, 그리고 I-DEAS 로 계산된 결과를 비교해서 보여주고 있다. 1, 2 차 모드에서는 오차가 거의 없으며 3 차 모드에서도 0.2% 미만의 오차를 보이고 있어 고려하고 있는 모든 모드에서 매우 뛰어난 상관성을 보이고 있음을 알 수 있다.



(a) 1st mode



(b) 3rd mode

Fig. 7 Variation of natural frequencies of the numerical model due to a crack: the effect of depth and position (rotational speed = 3000 rpm)

이상 시뮬레이션과 실험을 통해 제안된 방법에 의한 균열 효과 모델링 방법을 통해 동특성 변화를 매우 정확하게 예측할 수 있음을 확인하였다.

4. 동특성 해석

제안된 방법을 균열 진단에 활용하는 예를 보이기 위해 회전체 베어링계에서 균열의 크기와 위치에 따른 효과를 분석하였다. Fig. 6 이 본 예제에서 고려한 모델이

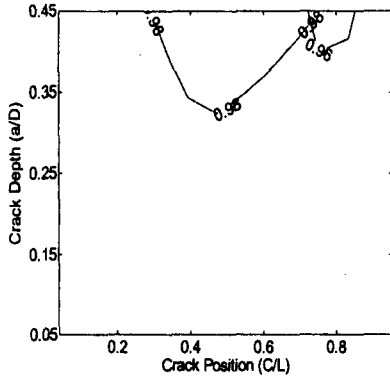


Fig. 8 Determination of the crack depth and position when the first and third natural frequencies are shifted due to the crack by 2,4%, respectively (Rotational speed = 3000 rpm)

다. Fig. 7 은 3000 rpm 으로 회전하는 경우 균열의 위치와 깊이가 변할 때의 고유진동수 변화를 보여주고 있다. 그림은 균열이 없을 때의 고유진동수(ω_0)로 균열이 있을 때의 고유진동수(ω)를 나눈 것이다.

균열이 1 개 존재한다고 가정하고 그 균열의 크기와 위치를 찾는 것은 2 개의 고유진동수에 대한 변화를 관찰함으로써 가능하다. 예컨대 균열이 발생한 방향으로의 1,3 차 모드를 고려한다면 Fig. 8 은 3000rpm 인 경우, 1,3 차 모드가 각각 2%,4% 변화된 경우의 균열 위치와 크기에 대한 결과를 보여주고 있다. 두 선이 교차되는 지점이 균열의 위치와 깊이에 대응한다.

5. 요약 및 결론

본 연구에서는 열린 균열을 있는 회전체계에 대한 동적 모델링 방법을 제시하였다. 열린 균열에 의한 강성 저하 효과를 고려하기 위해 균열 부위를 경계로 발생하는 각변위 차이에 대한 굽힘 스프링으로 모델링하였으며 균열 있는 요소 행렬을 정의함으로써 유한요소 방법에 적용하였다. 제안된 모델링 방법의 타당성을 검증하기 위해 상용유한요소 코드 및 실험 결과 등과의 비교를 하였으며 매우 정확한 예측이 가능함을 확인하였다. 제안된 모델링 방법의 응용 관점에서 균열의 깊

이 및 위치에 따른 고유진동수 변화에 관한 3 차원 선도 명하는 예를 제시하였다. 또한 이를 근거로 균열을 진단하는 간단한 방법을 제시하였다.

후기

본 연구는 국방과학연구소에서 지원하는 장기기초 연구(TECD-413-001115) 결과의 일부입니다.

참고문헌

- (1) Dimarogonas, A., 1996, "Vibration of cracked structures: a state of the art review," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.55, No.5, pp.831-857.
- (2) Tada, H., Paris, P. and Irwin, G., 1985, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, 2nd ed., St. Louis, Research Cooperation
- (3) Tsai, T.C. and Wang, Y.Z., 1996, "Vibration analysis and diagnosis of a cracked shaft," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.192, No.3, pp.607-620.
- (4) Seibold, S. and Weinert, 1996, "A time domain method for the localization of cracks in rotors," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.195, No.1, pp.57-73.
- (5) Wu, M.C. and Huang, S.C., 1998, "Vibration and crack detection of a rotor with speed-dependent bearings," *International Journal of Mechanical Science*, Vol.40, No.6, pp.545-555.
- (6) Chondros, T.G., Dimarogonas, A.D. and Yao, D., 2001, "Vibration of a beam with a breathing crack," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.239, No.1, 57-67.
- (7) Lee, C.W., Yun, J.S. and Jun, O.S., 1992, "Modeling of a simple rotor with a switching crack and its experimental verification," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol.114, pp.217-225.
- (8) C.W. Lee, 2001, "Why We Need to Install Exciters in Rotating Machines: Benefits and Prospects," *First International Symposium on Stability Control of Rotating Machinery (ISCORMA-1)*, South Lake Tahoe.
- (9) Pilkey, W.D., 1994, *Formulas for stress, strain, and structural matrices*, John Wiley & Sons, Inc.
- (10) 1997, I-DEAS: Exploring I-DEAS Design, SDRC.